Relation de comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire et isotrope non linéaire. Modélisations 3D et contraintes planes.

Résumé :

Ce document décrit une loi de comportement élastoplastique à écrouissage mixte, cinématique linéaire et isotrope non linéaire. Les équations à résoudre pour intégrer numériquement cette relation de comportement sont précisées, ainsi que la matrice tangente cohérente.

Ce comportement est utilisable pour les modélisations de milieux continus 3D, 2D (AXIS, C_PLAN, D_PLAN), et pour les modélisations DKT, COQUE_3D et TUYAU.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Description du modèle....4
3 Intégration de la relation de comportement....5
4 Calcul de la rigidité tangente....7
5 Identification des caractéristiques du matériau....8
6 Cas particulier des contraintes planes : calcul de p....10
7 Signification des variables internes....12
8 Bibliographie....13

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Lorsque le trajet de chargement n'est plus monotone, les écrouissages isotrope et cinématique ne sont plus équivalents. En particulier, on peut s'attendre à avoir simultanément une part cinématique et une part isotrope. Si on cherche à décrire précisément les effets d'un chargement cyclique, il est souhaitable d'adopter des modélisations sophistiquées (mais simples d'emploi) telles que le modèle de Taheri, par exemple, voir [R5.03.05]. En revanche, pour des trajets de chargement moins complexes, on peut souhaiter n'inclure qu'un écrouissage cinématique linéaire, toutes les non linéarités de l'écrouissage étant portées par le terme isotrope. Cela permet de décrire précisément une courbe de traction, tout en représentant quand même des phénomènes tels que l'effet Bauschinger [1] (voir par exemple la figure 5-a).

Les caractéristiques de l'écrouissage sont alors données par une courbe de traction et une constante, dite de Prager, pour le terme d'écrouissage cinématique linéaire. Elles sont introduites dans la commande DEFI_MATERIAU :

Écrouissage isotrope linéaire	Écrouissage isotrope non linéaire
DEFI_MATERIAU / ECRO_LINE SY : *limite d'élasticité* D_SIGM_EPSI : *pente de la courbe de traction* PRAGER: (C : *constante de Prager*)	DEFI_MATERIAU TRACTION : (SIGM : *courbe de traction* PRAGER: (C: *constante de Prager*)

Ces caractéristiques peuvent aussi dépendre de la température, à condition d'employer alors les mots clés facteurs ECMI_LINE_FO et ECMI_TRAC_FO à la place de ECRO_LINE et TRACTION. L'emploi de ces lois de comportement est disponible dans les commandes STAT_NON_LINE ou DYNA_NON_LINE :

Écrouissage isotrope linéaire	Écrouissage isotrope non linéaire
STAT_NON_LINE COMPORTEMENT : RELATION :'VMIS_ECMI_LINE'	STAT_NON_LINE COMPORTEMENT : RELATION:'VMIS_ECMI_TRAC'

Dans la suite de ce document, on décrit précisément le modèle d'écrouissage combiné. On présente ensuite le détail de son intégration numérique en lien avec la construction de la matrice tangente cohérente. Enfin, un essai de traction compression uniaxial illustre l'identification des caractéristiques du matériau.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Description du modèle

A tout instant, l'état du matériau est décrit par la déformation ε, la température T, la déformation plastique ε^p et la déformation plastique cumulée p. Les équations d'état définissent alors en fonction de ces variables d'état la contrainte $\sigma = \sigma^H \mathbf{Id} + \tilde{\sigma}$ (décomposée en parties hydrostatique et déviatorique), la part isotrope de l'écrouissage R et la part cinématique $\mathbf{X}$, aussi appelée contrainte de rappel :

$$\sigma^H = \frac{1}{3} tr(\sigma) = K\, tr(\varepsilon - \varepsilon^{th}) \text{ avec } \varepsilon^{th} = \alpha (T - T^{réf})\, \mathbf{Id} \quad \text{[éq 2-1]}$$

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma^H \mathbf{Id} = 2\mu (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon^p) \text{ où } \tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1}{3} tr(\varepsilon)\, \mathbf{Id} \quad \text{[éq 2-2]}$$

$$R = R(p) \quad \text{[éq 2-3]}$$

$$\mathbf{X} = C\, \varepsilon^p \quad \text{[éq 2-4]}$$

où K, μ, α, R et C sont des caractéristiques du matériau qui peuvent dépendre de la température. Plus précisément, ce sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement, le coefficient de dilatation thermique moyen (voir [R4.08.01]), la fonction d'écrouissage isotrope et la constante de Prager. Quant à $T^{réf}$, il s'agit de la température de référence, pour laquelle la déformation thermique est nulle.

K, μ sont reliés au module d'Young E et au coefficient de Poisson par :

$$3K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1 - 2\nu}$$

$$2\mu = \frac{E}{1 + \nu}$$

Remarque :

Concernant la part cinématique de l'écrouissage [éq 2-4] on constate qu'elle est linéaire dans ce modèle. Par ailleurs, il faut prendre garde au fait que dans certaines références, on appelle constante de Prager $2C/3$ et non pas C. De même, pour la fonction d'écrouissage isotrope, la limite d'élasticité y est incluse par $R(0) = \sigma^y$, certaines références la traitant à part.

L'évolution des variables internes ε^p et p est gouvernée par une loi d'écoulement normale associée à un critère de plasticité F :

$$F(\sigma, R, \mathbf{X}) = (\tilde{\sigma} - \mathbf{X})_{eq} - R \quad \text{[éq 2-5]}$$

avec $\mathbf{A}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}}$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\tilde{\sigma} - \mathbf{X}}{(\tilde{\sigma} - \mathbf{X})_{eq}} \quad \text{[éq 2-6]}$$

$$\dot{p} = \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p \cdot \dot{\varepsilon}^p} \quad \text{[éq 2-7]}$$

Quant au multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$, il est obtenu par la condition de cohérence suivante :

$$\begin{cases} \text{si } F < 0 \text{ ou } \dot{F} < 0 & \dot{\lambda} = 0 \\ \text{si } F = 0 \text{ et } \dot{F} = 0 & \dot{\lambda} >= 0 \end{cases} \quad \text{[éq 2-8]}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Intégration de la relation de comportement

Pour réaliser numériquement l'intégration de la loi de comportement, on effectue une discrétisation en temps et on adopte un schéma d'Euler implicite, réputé approprié pour des relations de comportement élastoplastiques. Dorénavant, on emploiera les notations suivantes : A^-, A et ΔA représentent respectivement les valeurs d'une quantité A au début et à la fin du pas de temps considéré ainsi que son incrément durant le pas. Le problème est alors le suivant : connaissant l'état au temps t^- ainsi que les incréments de déformation $\Delta\varepsilon$ et de température ΔT , déterminer l'état au temps t ainsi que les contraintes σ .

Dans un premier temps, on prend en compte les variations des caractéristiques par rapport à la température en remarquant que :

$$\sigma^H = \frac{K}{K^-}\sigma^{H^-} + K\,\mathrm{tr}\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{\mathbf{th}}\right) \quad \text{[éq 3-1]}$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\mu}{\mu^-}\tilde{\sigma}^- + 2\mu\left(\Delta\tilde{\varepsilon} - \Delta\varepsilon^{\mathrm{p}}\right) \quad \text{[éq 3-2]}$$

$$\mathbf{X} = \frac{C}{C^-}\mathbf{X}^- + C\Delta\varepsilon^{\mathrm{p}} \quad \text{[éq 3-3]}$$

Au vu de l'équation [éq 3-1], on constate que le comportement hydrostatique est purement élastique. Seul le traitement de la composante déviatorique est délicat. Pour alléger les écritures à venir, on introduit $\tilde{\mathbf{s}}^e$ la différence $\tilde{\sigma} - \mathbf{X}$ en l'absence d'incrément de déformations plastiques, si bien que :

$$\tilde{\sigma} - \mathbf{X} = \underbrace{\frac{\mu}{\mu^-}\tilde{\sigma}^- - \frac{C}{C^-}\mathbf{X}^- + 2\mu\Delta\tilde{e}}_{\tilde{s}^e} - \left(2\mu + C\right)\Delta\varepsilon^p \quad \text{[éq 3-4]}$$

Les équations d'écoulement [éq 2-6] et [éq 2-7] et la condition de cohérence [éq 2-8] s'écrivent une fois discrétisées et en remarquant que $p = \lambda$:

$$\Delta\varepsilon^p = \frac{3}{2}\Delta p\,\frac{\tilde{\sigma} - \mathbf{X}}{\left(\tilde{\sigma} - \mathbf{X}\right)_{eq}} \quad \text{[éq 3-5]}$$

$$F <= 0 \quad \Delta p >= 0 \quad F\Delta p = 0 \quad \text{[éq 3-6]}$$

Le traitement de la condition de cohérence [éq 3-6] est classique. On commence par un essai élastique ($\Delta p = 0$) qui est bien la solution si le critère de plasticité n'est pas dépassé, c'est-à-dire si :

$$F = s^e_{eq} - R\left(p^-\right) <= 0 \quad \text{[éq 3-7]}$$

Dans le cas contraire, la solution est plastique ($\Delta p > 0$) et la condition de cohérence [éq 3-6] se réduit à $F = 0$. Pour la résoudre, on commence par montrer qu'on peut se ramener à un problème scalaire en éliminant $\Delta\varepsilon^p$. En effet, en tenant compte de [éq 3-4] et [éq 3-5], on constate que $\Delta\varepsilon^p$ est colinéaire à $\tilde{\mathbf{s}}^e$ car :

$$\Delta\varepsilon^{\mathrm{p}} = \frac{3}{2}\frac{\Delta p}{\left(\tilde{\sigma} - \mathbf{X}\right)_{eq}}\left[\tilde{s}^e - \left(2\mu + C\right)\Delta\varepsilon^p\right] \quad \text{[éq 3-8]}$$

Par ailleurs, d'après [éq 3-5], la norme de $\Delta\epsilon^p$ vaut :

$$\left(\Delta\varepsilon^{\mathrm{p}}\right)_{eq} = \frac{3}{2}\Delta p \quad \text{[éq 3-9]}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On en déduit donc immédiatement l'expression de $\Delta \varepsilon^p$ en fonction de Δp :

$$\Delta \varepsilon^p = \frac{3}{2} \Delta p \frac{\tilde{\mathbf{s}}^e}{s^e_{eq}} \quad \text{[éq 3-10]}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à remplacer $\Delta \varepsilon^{\mathbf{p}}$ par son expression [éq 3-10] dans l'équation [éq 3-4] on obtient :

$$\tilde{\sigma} - \mathbf{X} = \tilde{s}^e \left[1 - \frac{\frac{3}{2}(2\mu + C)\Delta p}{s^e_{eq}} \right]$$

en reportant $\tilde{\sigma} - \mathbf{X}$ dans l'équation $F = 0$, on se ramène à une équation scalaire en Δp à résoudre, à savoir :

$$|s^e_{eq} - \frac{3}{2}(2\mu + C)\Delta p| - R(p^- + \Delta p) = 0 \quad \text{[éq 3-11]}$$

Dans la mesure où la fonction R est positive, ce que l'on admettra dorénavant, il existe une solution Δp à cette équation, caractérisée par :

$$\frac{3}{2}(2\mu + C)\Delta p + R(p^- + \Delta p) = s^e_{eq} \quad \text{[éq 3-12]}$$

$$\text{où } 0 < \Delta p < \frac{2}{3} \frac{s^e_{eq}}{2\mu + C}$$

Notons que dans l'intervalle précisé dans [éq 3-12], la solution est unique. Pour des détails quant à la résolution de cette équation, on se reportera à [R5.03.02].
Le cas particulier des contraintes planes est étudié au §6.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Calcul de la rigidité tangente

Afin de permettre une résolution du problème global (équations d'équilibre) par une méthode de Newton, il est nécessaire de déterminer la matrice tangente cohérente du problème incrémental. Pour cela, on adopte une fois de plus la convention d'écriture des tenseurs symétriques d'ordre 2 sous forme de vecteurs à 6 composantes. Ainsi, pour un tenseur $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}={}^{t}\left[a_{xx}\quad a_{yy}\quad a_{zz}\quad \sqrt{2}a_{xy}\quad \sqrt{2}a_{xz}\quad \sqrt{2}a_{yz}\right] \qquad \text{[éq 4-1]}$$

Si on introduit en outre le vecteur hydrostatique $\mathbf{1}$ et la matrice de projection déviatorique $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{1}={}^{t}\left[1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\right] \qquad \text{[éq 4-2]}$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{Id}-\frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \qquad \text{[éq 4-3]}$$

Alors la matrice de rigidité tangente cohérente s'écrit pour un comportement élastique :

$$\frac{\partial s}{\partial \Delta\varepsilon}=K\,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}+2\mu\,\mathbf{P} \qquad \text{[éq 4-4]}$$

et pour un comportement plastique :

$$\frac{\partial s}{\partial \Delta\varepsilon}=K\,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}+2\mu\left(1-\frac{3\mu\,\Delta p}{s^{e}_{eq}}\right)\mathbf{P}+9\mu^{2}\left(\frac{\Delta p}{s^{e}_{eq}}-\frac{1}{\mathrm{R}'(p)+\frac{3}{2}(2\mu+C)}\right)\left(\frac{\tilde{\mathbf{s}}^{e}}{s^{e}_{eq}}\otimes\frac{\tilde{\mathbf{s}}^{e}}{s^{e}_{eq}}\right) \qquad \text{[éq 4-5]}$$

La matrice tangente initiale, utilisée par l'option `RIGI_MECA_TANG` est obtenue en adoptant le comportement du pas précédent (élastique ou plastique, signifié par une variable interne x valant 0 ou 1) et en prenant $\Delta p=0$ dans l'équation [éq 4-5].

Remarque :
*`RIGI_MECA_TANG` est l'opérateur linéarisé par rapport **au temps** (cf. `[R5.03.01], [R5.03.05]`) et correspond à ce qu'on appelle le problème en vitesse ; dans le cas présent, la linéarisation par rapport à Δu , en $\Delta u=0$, fournit la même expression.*

On se propose maintenant de démontrer l'expression [éq 4-5]. En différentiant les [éq 2-1] et [éq 2-2] à température fixée, on obtient immédiatement :

$$\delta\sigma=\left[K\,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}+2\mu\,\mathbf{P}\right]\delta\varepsilon-2\mu\,\delta\varepsilon^{p} \qquad \text{[éq 4-6]}$$

Si le régime de comportement est plastique, la loi d'écoulement incrémentale [éq 3-10] fournit alors :

$$\delta\varepsilon^{p}=\frac{3}{2}\delta p\frac{\tilde{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}}{s^{e}_{eq}}+\frac{3}{2}\Delta p\,\delta\left(\frac{\tilde{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}}{s^{e}_{eq}}\right) \qquad \text{[éq 4-7]}$$

Quant à dp, il est obtenu en différentiant l'équation implicite [éq 3-12] :

$$\left[\frac{3}{2}(2\mu+C)+\mathrm{R}'(p)\right]\delta p=\delta s^{e}_{eq} \qquad \text{[éq 4-8]}$$

Enfin, il ne reste plus qu'à fournir les variations de $\tilde{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}$:

$$\delta\tilde{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}=2\mu\,\delta\tilde{\varepsilon}\,ds^{e}_{eq}=3\mu\frac{\tilde{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}}{s^{e}_{eq}}\cdot\delta\tilde{\varepsilon}\,\delta\left(\frac{\tilde{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}}{s^{e}_{eq}}\right)=\frac{1}{s^{e}_{eq}}\left(2\mu-3\mu\frac{\tilde{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}}{s^{e}_{eq}}\otimes\frac{\tilde{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}}}{s^{e}_{eq}}\right)\cdot\delta\tilde{\varepsilon} \qquad \text{[éq 4-9]}$$

En remplaçant alors [éq 4-7], [éq 4-8] et [éq 4-9] dans [éq 4-6], on obtient bien l'expression [éq 4-5].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette expression est formellement identique à celle définie dans R5.03.02 : [éq 4-3] et s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = K\,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + 2\mu\left(1 - \frac{3\mu\,\xi\,\Delta p}{s^e_{eq}}\right)\left(\mathbf{Id} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right) + 9\mu^2\xi\left(\frac{\Delta p}{s^e_{eq}} - \frac{1}{\mathrm{R}' + \frac{3}{2}(2\mu + C)}\right)\left(\frac{\tilde{\mathbf{s}}^e}{s^e_{eq}}\otimes\frac{\tilde{\mathbf{s}}^e}{s^e_{eq}}\right)$$

avec $\xi = 1$ si $\Delta\varepsilon$ conduit à une plastification, et $\xi = 0$ sinon.

En utilisant [éq 3-12], on trouve :

$$\frac{\partial s}{\partial \Delta \varepsilon} = \lambda^*\,\vec{\mathbf{1}}\otimes\vec{\mathbf{1}} + 2\mu^*\,\mathbf{Id} - \xi\frac{9\mu^2}{H(p)}\left(1 - \frac{\mathrm{R}'.\Delta p}{\mathrm{R}(p)}\right)\frac{1}{\mathrm{R}' + \frac{3}{2}(2\mu + C)}\left(\frac{\sigma^{\mathbf{dev}}}{R(p)}\otimes\frac{\sigma^{\mathbf{dev}}}{R(p)}\right)$$

avec $\lambda^* = K - \frac{2\mu}{3}\frac{G(\Delta p)}{H(\Delta p)}$ $2\mu^* = 2\mu\frac{G(\Delta p)}{H(\Delta p)}$

pour l'option FULL_MECA : $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{dev}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X}$

pour l'option RIGI_MECA_TANG : $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{dev}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-} - \mathbf{X}^{-}$

avec $H(\Delta p) = 1 + \frac{\frac{3}{2}(2\mu + C)\xi\,\Delta p}{R(p)}$

et $G(\Delta p) = 1 + \frac{3}{2}C\,\xi\frac{\Delta p}{R(p)}$

5 Identification des caractéristiques du matériau

Considérons un essai de traction compression uniaxial, [Figure 5-a]. On se propose de montrer comment il permet d'identifier la constante de Prager et la fonction d'écrouissage isotrope. Dans un tel essai, les différents tenseurs sont à directions fixes, c'est-à-dire que :

$$\tilde{\sigma} = \sigma\,\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}\,\Delta\varepsilon^p = \frac{3}{2}\varepsilon^p\,\mathbf{D} \qquad \text{[éq 5-1]}$$

$$\text{avec } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2/3 & & \\ & -1/3 & \\ & & -1/3 \end{bmatrix}$$

Tant que le chargement est monotone, donc en phase de traction, on obtient immédiatement les relations suivantes :

$$p = \varepsilon^p \quad X = \frac{3}{2}C\,\varepsilon^p \quad s^t = \frac{3}{2}C\,\varepsilon^p + \mathrm{R}(\varepsilon^p) \qquad \text{[éq 5-2]}$$

La constante de Prager est déterminée par la première plastification en compression, puisqu'on a :

$$\begin{cases} \sigma^t_A = \frac{3}{2}C\,\varepsilon^p_A + R(\varepsilon^p_A) \\ \sigma^c_A = \frac{3}{2}C\,\varepsilon^p_A - R(\varepsilon^p_A) \end{cases} \Rightarrow C = \frac{\sigma^t_A + \sigma^c_A}{3\,\varepsilon^p_A} \qquad \text{[éq 5-3]}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

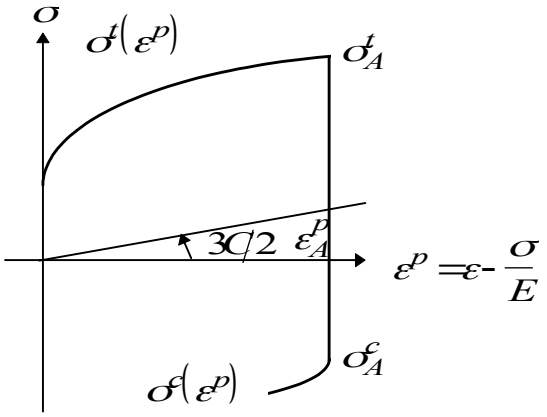


Figure 5-a : Essai de traction compression uniaxial

La courbe d'écrouissage $\sigma^t = F(\varepsilon^p)$ est déduite de la courbe de traction $\sigma^t = F(\varepsilon)$ fournie par l'utilisateur sous les mots clés ECRO_LINE ((SY et D_SIGM_EPSI (écrouissage linéaire)) ou bien TRACTION (écrouissage quelconque). Elle permet enfin d'obtenir la fonction d'écrouissage isotrope par [éq 5-2] :

$$R(\varepsilon^p) = s^t(\varepsilon^p) - \frac{3}{2} C \varepsilon^p$$

Pour le calcul effectif de R(p), suivant le document R5.03.02, on titre parti de la linéarité (ECMI_LINE) ou de la linéarité par morceaux de la courbe de traction (ECMI_TRAC) :

ECMI_LINE :

$$\sigma^t = F(\varepsilon^p) = \sigma_y + \frac{E.E_T}{E - E_T} p$$
$$R(p) = \sigma_y + \left(\frac{E.E_T}{E - E_T} - \frac{3}{2} C \right) p = \sigma_y + R'.p \qquad \text{[éq 5-4]}$$

L'équation [éq 3-12] devient alors :

$$\frac{3}{2}(2\mu + C)\Delta p + \sigma_y + R'.(p + \Delta p) = s^e_{eq} \qquad \text{[éq 5-5]}$$

ECMI_TRAC:

$$\sigma^t = F(\varepsilon^p) = \sigma_i + \frac{\sigma_{i+1} - s_i}{p_{i-1} - p_i}(p - p_i), \text{ pour } p_i <= p <= p_{i+1}$$
$$R(p) = \sigma_i + \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{p_{i-1} - p_i}(p - p_i) - \frac{3}{2} Cp = \sigma_i - \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{p_{i-1} - p_i} p_i + R'.p \qquad \text{[éq 5-6]}$$

Remarque :

Pour l'utilisation : la correspondance entre le modèle de comportement VMIS_CINE_LINE et le comportement VMIS_ECMI_LINE est la suivante :

- *Avec VMIS_CINE_LINE , il faut introduire dans DEFI_MATERIAU un écrouissage linéaire de pente Et par :*
  D_SIGM_EPSI : Et

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- *Avec* `VMIS_ECMI_LINE` *, pour reproduire le même comportement à écrouissage cinématique linéaire, il faut donner dans* `DEFI_MATERIAU` *.*
  un écrouissage linéaire de pente E_T *:* `D_SIGM_EPSI : Et`
  La constante de Prager C *:* `PRAGER : C`
  C *est déterminée par :* $C=\frac{2}{3}\frac{EE_T}{E-E_T}$
  Il faut bien remarquer que l'identification de C *et de* $R(\varepsilon^p)$ *n'ont de sens que dans un domaine de déformations limité (petites déformations). En particulier, si* $\sigma^t(\varepsilon^p)$ *présente une asymptote* $\sigma^t_{\max}$ *pour* ε^p *suffisamment grand, alors la contribution cinématique de l'écrouissage n'a plus de signification. Il est donc conseillé de se restreindre au domaine où l'écrouissage est strictement positif.*
- *Avec vec* `VMIS_CINE_GC` *, il faut introduire dans* `DEFI_MATERIAU` *un écrouissage linéaire de pente Et par :*
  `D_SIGM_EPSI : Et`
  Ce comportement est disponible en contrainte plane. Il n'est pas nécessaire de donner la constante de Prager. La correspondance entre `ET` et `C` est faite par le code et pris en compte notamment lors du calcul de ΔP , chapitre 6 .

6 Cas particulier des contraintes planes : calcul de Δ p

Il faut ajouter aux équations [éq 3-1] à [éq 3-4] la condition de contraintes planes $s_{33}=0$, ce qui ajoute une inconnue (la déformation correspondante) :

$$\sigma^H=\frac{K}{K^-}s^{H^-}+K\,\mathrm{tr}(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{\mathbf{th}}) \quad \text{[éq 6-1]}$$

$$\tilde{\sigma}=\frac{\mu}{\mu^-}\tilde{\sigma}^-+2\mu(\Delta\tilde{\varepsilon}-\Delta\varepsilon^p) \quad \text{[éq 6-2]}$$

$$\mathbf{X}=\frac{C}{C^-}\mathbf{X}^-+C\Delta\varepsilon^p \quad \text{[éq 6-3]}$$

$$\sigma_{33}=0 \quad \text{[éq 6-4]}$$

Alors, l'équation [éq 3-4] devient :

$$\tilde{\sigma}-X=\frac{\mu}{\mu^-}\tilde{\sigma}^--\frac{C}{C^-}X^-+2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^c-(2\mu+C)\Delta\varepsilon^p+2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^y=\tilde{\sigma}^e-(2\mu+C)\Delta\varepsilon^p+2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^y \quad \text{[éq 6-5]}$$

où $\Delta\tilde{\varepsilon}^c$ est entièrement déterminé par le comportement élastique :

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^c_{33}=\frac{-\nu}{1-\nu}(\Delta\tilde{\varepsilon}^c_{11}+\Delta\tilde{\varepsilon}^c_{22}),\ \Delta\tilde{\varepsilon}^c_{11}=\Delta\tilde{\varepsilon}_{11},\ \Delta\tilde{\varepsilon}^c_{22}=\Delta\tilde{\varepsilon}_{22}$$

et $\Delta\tilde{\varepsilon}^y=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\Delta Y\end{bmatrix}$ est inconnu. On suppose également que $\sigma_{13}=\sigma_{23}=\varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0$.

On a toujours :

$$\Delta\varepsilon^p=\frac{3}{2}\Delta p\frac{\tilde{\sigma}-\mathbf{X}}{(\tilde{\sigma}-\mathbf{X})_{eq}} \quad \text{[éq 6-6]}$$

$$F=\sigma_{eq}-R(p)\le 0\ ;\ \Delta p\ge 0\ ;\ F\,\Delta p=0 \quad \text{[éq 6-7]}$$

Essai élastique :

- Si

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$F = s_{eq}^{e} - R\left(p^{-}\right) <= 0 \qquad \text{[éq 6-8]}$$

alors

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\mathbf{s}}_{e} \quad \Delta p = 0 \quad \Delta Y = 0 \qquad \text{[éq 6-9]}$$

$$\sigma^{H} = \frac{K}{K^{-}} \sigma^{H^{-}} + K \operatorname{tr}\left(\Delta \varepsilon^{c} - \Delta \varepsilon^{\mathbf{th}}\right) \qquad \text{[éq 6-10]}$$

- Sinon, la solution est plastique : $\Delta p > 0$, $\Delta Y \neq 0$. On peut encore se ramener à un problème scalaire en Δp .

En tenant compte de [éq 6-5] et [éq 6-6], on constate que $\tilde{\sigma} - X$ est colinéaire à $\tilde{\mathbf{s}}^{e} + 2\mu \Delta \tilde{\varepsilon}^{y}$ car :

$$\left(\tilde{\sigma} - \mathbf{X}\right)\left(1 + \frac{\frac{3}{2}\left(2\mu + C\right)\Delta p}{R(p)}\right) = \left(\tilde{\sigma} - \mathbf{X}\right) H\left(\Delta p\right) = \left[\tilde{\mathbf{s}}^{e} + 2\mu \Delta \tilde{\varepsilon}^{y}\right] \qquad \text{[éq 6-11]}$$

Donc :

$$\left(\tilde{\sigma}_{33} - X_{33}\right) H\left(\Delta p\right) = \left[\tilde{s}_{33}^{e} + \frac{4}{3}\mu \Delta Y\right] \qquad \text{[éq 6-12]}$$

Nous allons exprimer l'équation [éq 6-12] en fonction de Δp seulement. D'après [éq 6-4] :

$$\sigma_{33} = 0 = \tilde{\sigma}_{33} + \sigma^{H} = \tilde{\sigma}_{33} + \sigma_{e}^{H} + K \,.\, \Delta Y \qquad \text{[éq 6-13]}$$

avec $\sigma_{e}^{H} = \frac{K}{K^{-}} \sigma^{H^{-}} + K \operatorname{tr}\left(\Delta \varepsilon^{c} - \Delta \varepsilon^{\mathbf{th}}\right)$

En utilisant [éq 6-5], [éq 6-6] et l'incompressibilité des déformations plastiques, on peut montrer que :

$$\tilde{s}_{33}^{e} + \sigma_{e}^{H} = -\frac{C}{C^{-}} X_{33}^{-} \qquad \text{[éq 6-14]}$$

Alors :

$$\tilde{\sigma}_{33} = \tilde{s}_{33}^{e} - K.\Delta Y + \frac{C}{C^{-}} X_{33}^{-} \qquad \text{[éq 6-15]}$$

Comme d'après [éq 6-3] :

$$X_{33} = \frac{C}{C^{-}} X_{33}^{-} + C \,.\, \Delta \varepsilon_{33}^{p} = \frac{C}{C^{-}} X_{33}^{-} + C \,.\, \frac{3}{2} \Delta p \frac{\tilde{\sigma}_{33} - X_{33}}{R(p)} \qquad \text{[éq 6-16]}$$

$$X_{33} \,.\, G\left(\Delta p\right) = \frac{C}{C^{-}} X_{33}^{-} + \frac{3}{2} C \Delta p \frac{\tilde{\sigma}_{33}}{R(p)} \qquad \text{[éq 6-17]}$$

avec $G\left(\Delta p\right) = 1 + \frac{3}{2} C \frac{\Delta p}{R(p)}$

A partir de [éq 6-12], [éq 6-15], [éq 6-17], on obtient une équation liant Δp et ΔY :

$$\Delta Y \,.\, \left(\frac{4}{3}\mu + K \frac{H\left(\Delta p\right)}{G\left(\Delta p\right)}\right) = \left[\tilde{\mathbf{s}}_{33}^{\mathbf{e}} \left(\frac{H\left(\Delta p\right)}{G\left(\Delta p\right)} - 1\right)\right] \qquad \text{[éq 6-18]}$$

L'équation [éq 6-11] permet d'obtenir l'équation scalaire en Δp à résoudre, à savoir :

$$\left(\tilde{\sigma} - \mathbf{X}\right)_{eq} H\left(\Delta p\right) = R\left(p^{-} + \Delta p\right) H\left(\Delta p\right) = \left[\tilde{\mathbf{s}}^{\mathbf{e}} + 2\mu \Delta \tilde{\varepsilon}^{y}\right]_{eq} \qquad \text{[éq 6-19]}$$

Équation dans laquelle ΔY est fonction de Δp par l'équation [éq 6-18].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Comme dans le cas de l'écrouissage isotrope, on obtient une équation scalaire en Δp , toujours non linéaire, qui est résolue par une méthode de sécante.

Une fois Δp connu, le calcul de $\tilde{\sigma}$ et X s'effectue à partir de l'expression de ΔY, donc de $\Delta \varepsilon$ entièrement connu, par une démarche semblable à celle de l'équation [éq 3-10].

$$\Delta \varepsilon^{p} = \frac{3}{2}\Delta p \frac{\tilde{\mathbf{s}}^{e} + 2\mu \Delta \tilde{\varepsilon}^{y}}{\left(\tilde{\mathbf{s}}^{e} + 2\mu \Delta \tilde{\varepsilon}^{y}\right)_{eq}} = \frac{3}{2}\Delta p \frac{\tilde{\sigma} - \mathbf{X}}{H(\Delta p)\left(\tilde{\mathbf{s}}^{e} + 2\mu \Delta \tilde{\varepsilon}^{y}\right)_{eq}} \quad \text{[éq 6-20]}$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\mu}{\mu^{-}}\tilde{\sigma}^{-} + 2\mu\left(\Delta \tilde{\varepsilon} - \Delta \varepsilon^{p}\right) \quad \text{[éq 6-21]}$$

On obtient en éliminant $\Delta \varepsilon^{p}$ à partir de [éq 6-6], [éq 6-3] et [éq 6-2] :

$$\tilde{\sigma} = \left(\frac{\mu}{\mu^{-}}\tilde{\sigma}^{-} + 2\mu \Delta \tilde{\varepsilon}\right)\frac{G(\Delta p)}{H(\Delta p)} + \frac{3}{2}2\mu \frac{\Delta p}{R(p)H(\Delta p)}\frac{C}{C^{-}}\mathbf{X}^{-} \quad \text{[éq 6-22]}$$

$$\mathbf{X} = \frac{3}{2}C\frac{\Delta p}{R(p)H(\Delta p)}\left(\frac{\mu}{\mu^{-}}\tilde{\sigma}^{-} + 2\mu \Delta \tilde{e}\right) + \left(1 - \frac{3}{2}C\frac{\Delta p}{R(p)H(\Delta p)}\right)\frac{C}{C^{-}}\mathbf{X}^{-} \quad \text{[éq 6-23]}$$

7 Signification des variables internes

Les variables internes du modèle aux points de Gauss (VARI_ELGA) sont pour toutes les modélisations :

- VARI_1 = p : la déformation plastique cumulée (positive ou nulle)
- VARI_2 = ξ : valant 1 si le point de Gauss a plastifié au cours de l'incrément ou 0 sinon.

X : tenseur de rappel :

Pour la modélisation 3D :

- VARI_3 = X_{11}
- VARI_4 = X_{22}
- VARI_5 = X_{33}
- VARI_6 = X_{12}
- VARI_7 = X_{13}
- VARI_8 = X_{23}

Pour les modélisations D_PLAN, C_PLAN, AXIS

- VARI_3 = X_{11}
- VARI_4 = X_{22}
- VARI_5 = X_{33}
- VARI_6 = X_{12}

Pour les modélisations de coques (DKT, COQUE_3D), en repère local et en chaque point d'intégration de chaque couche :

- VARI_3 = X_{11}
- VARI_4 = X_{22}
- VARI_5 = X_{33}
- VARI_6 = X_{12}

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Bibliographie

1) J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE : "Mécanique des matériaux solides". Dunod 1992

Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
5 .	J.M Proix , E.Lorentz EDF-R&D/AMA	Version initiale
8.5	J.M.Proix, EDF-R&D/AMA	Changement de notation du module de compressibilité, cf. fiche REX 10218

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)