Comportement viscoplastique avec endommagement de CHABOCHE

Résumé :

Le modèle visco-plastique couplé à l'endommagement isotrope de Chaboche (développé à l'origine pour prédire avec succès la durée de vie et la fissuration des aubes des turboréacteurs modernes) est utilisé pour des calculs de prédiction du temps de ruine de structures à hautes températures.

Ce modèle est implanté dans *Code_Aster* sous le nom de VENDOCHAB ; les équations en vitesse sont intégrées numériquement par un schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 2 avec découpage automatique en sous-pas locaux en fonction d'une estimation de l'erreur d'intégration (méthode de Runge-Kutta emboîtée, confer [R5.03.14]), ou par une méthode d'intégration implicite [R5.03.01].

Les tests SSNV126 et SSNV183 valident l'intégration de ce modèle. Le document de validation [V6.04.126] fournit la solution analytique pour un essai de fluage uni-axial isotherme.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Formulation du modèle....4
2.1 Cadre théorique....4
2.2 Equations du modèle....7
3 Calcul des paramètres matériau....8
4 Implantation dans Code_Aster....10
4.1 Algorithme de résolution....10
4.2 Intégration implicite de la relation de comportement....10
4.2.1 Discrétisation implicite des équations du modèle....11
4.2.2 Résolution numérique....12
4.2.3 Opérateur de comportement tangent....12
4.2.4 Cas particulier des contraintes planes....13
4.3 Intégration implicite optimisée....14
5 Signification des variables internes....17
6 Bibliographie....17
7 Description des versions du document....17

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Les calculs par éléments finis effectués dans le cadre des études sur les accidents graves des réacteurs nucléaires ont mis en évidence le besoin d'utiliser des modèles d'endommagement afin de prévoir la ruine d'une structure telle que la cuve soumise aux conditions thermiques sévères et complexes (hautes températures allant jusqu'à la fusion, forts gradients thermiques dans l'espace ou le temps, etc.) que lui imposerait le corium [bib1].

L'intérêt majeur de ce choix réside dans le fait que la valeur de la variable d'endommagement à la rupture (ou à la fissuration) peut être considérée comme un paramètre intrinsèque du matériau qui est accessible, bien que cela soit difficile et délicat, par des mesures physiques (ultrasons, diffraction X, etc.). Le critère de rupture avec la théorie de l'endommagement est alors plus "physique" que les critères en déformation maximale utilisés parfois dans des calculs viscoplastiques sans endommagement ou les critères d'endommagement non couplé (règle de cumul du temps effectivement passé dans certaines conditions (σ, T) divisé par le temps de ruine pour ces mêmes conditions).

Le modèle implémenté dans *Code_Aster* est un modèle de comportement viscoplastique à écrouissage viscosité-multiplicatif couplé à l'endommagement isotrope (modèle dû à Chaboche [bib2]).

Nota Bene :

On trouvera dans la référence [bib3] une description détaillée des capacités du modèle, une méthodologie pour l'identification des paramètres et les valeurs de ces paramètres pour l'acier 22 MoNiCr 3 7.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Formulation du modèle

2.1 Cadre théorique

Dans ce sous-chapitre, on insiste sur la spécificité de la loi VENDOCHAB (c'est-à-dire l'endommagement) par rapport aux modèles viscoplastiques habituels. Pour plus de détails, on se référera à [bib2].

La théorie de l'endommagement décrit l'évolution des phénomènes entre l'état vierge et l'amorçage de la fissure macroscopique dans un matériau au moyen d'une variable continue (scalaire ou tensorielle) décrivant la détérioration progressive de ce matériau. Cette idée, due à Kachanov qui fut le premier à l'utiliser pour modéliser la rupture par fluage des métaux en sollicitation uni-axiale, a été reprise en France dans les années 70 par Lemaitre et Chaboche. L'évolution du matériau de son état vierge à son état endommagé n'est pas toujours facile à distinguer du phénomène de déformation l'accompagnant le plus souvent et est due à plusieurs mécanismes différents dont le fluage fait partie. L'endommagement visco-plastique de fluage correspond aux dé-cohésions inter-granulaires accompagnant les déformations visco-plastiques pour les métaux à des températures moyennes et élevées.

Pour définir ce qu'est cette variable d'endommagement, considérons l'aire S d'une des faces d'un élément de volume Ω repérée par sa normale orientée vers l'extérieur $\mathbf{n}$. Sur cette section, les microfissures et les cavités qui constituent le dommage laissent des traces de formes diverses. Soit $\tilde{S}$ l'aire résistante effective et S_D l'aire totale de l'ensemble des traces.

On a :

$$S_D = S - \tilde{S}$$

et on définit la variable d'endommagement par :

$$D_n = \frac{S_D}{S}$$

D_n est la mesure de l'endommagement local relativement à la direction n. D'un point de vue physique, la variable d'endommagement D_n est donc l'aire relative des fissures et cavités coupées par le plan normal à la direction $\vec{n}$. D'un point de vue mathématique, en faisant tendre S vers 0, la variable $D_{\vec{n}}$ est la densité surfacique des discontinuités de la matière dans le plan normal à n. $D_n = 0$ correspond à l'état vierge non endommagé. $D_n = 1$ correspond à l'élément de volume rompu en deux parties selon un plan normal à n.

L'hypothèse d'isotropie implique que les fissures et cavités sont uniformément distribuées en orientation en un point du matériau. Dans ce cas, la variable d'endommagement devient un scalaire qui ne dépend plus de l'orientation et est notée D. On a :

$$D = D_n \forall\, n$$

Nous ne considérerons ici que la variable d'endommagement isotrope.

Les mesures mécaniques globales (modification des caractéristiques d'élasticité, de plasticité ou de viscoplasticité) sont plus faciles à interpréter en terme de variable d'endommagement grâce à la notion de contrainte effective introduite par Rabotnov. La contrainte effective représente la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts. Dans le cas de l'endommagement isotrope, elle s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)}$$

Et on a :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1) $\tilde{\sigma}=\sigma$ pour un matériau vierge
2) $\tilde{\sigma}\to+\infty$ au moment de la rupture

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le principe d'équivalence en déformation implique que tout comportement à la déformation, unidimensionnelle ou tridimensionnelle d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective.

On distingue 2 types de variables pour caractériser le milieu :

Les variables observables (mesurables) :

- la température T
- la déformation totale $\underline{\underline{\varepsilon}}$ qui se décompose comme indiqué ci-dessous :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}=\underline{\underline{\varepsilon}}^{e}+\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}+\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$$

Les variables internes :

- la déformation viscoplastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$
- la variable d'écrouissage isotrope r
- la variable d'endommagement isotrope D

Soit $\Psi=\Psi\left(\underline{\underline{\varepsilon}},\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp},T,r,D\right)$, le potentiel d'état, les lois d'état décrivant ce potentiel sont :

$$\begin{cases}\underline{\underline{\sigma}}=\rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}}\\ R=-\rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial r}\\ s=-\rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial T}\\ Y=-\rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial D}\end{cases}$$

D'après la loi de normalité, on a, avec Φ , le potentiel de dissipation :

$$\begin{cases}\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vp}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial\underline{\underline{\sigma}}}\\ \dot{r}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial R}\\ \dot{D}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial Y}\end{cases}$$

La modélisation de l'écrouissage et de l'endommagement du matériau se fait par l'intermédiaire de variables internes (ou cachées). Dans le cas du modèle VENDOCHAB, les variables internes introduites dans *Code_Aster* sont :

- $\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$: tenseur des déformations inélastiques
- p : déformation plastique cumulée
- r : variable d'écrouissage viscosité
- D : variable scalaire d'endommagement isotrope

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Equations du modèle

Les équations du modèles s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{e} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} \\ \underline{\underline{\sigma}} = (1-D)\,\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{e} \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vp} = \frac{3}{2}\,\dot{p}\,\frac{\underline{\underline{\sigma}}'}{\sigma_{eq}} \\ \dot{p} = \frac{\dot{r}}{(1-D)} \\ \dot{r} = \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_{y}(1-D)}{(1-D)\,K\,r^{1/M}} \right\rangle^{N} \\ \dot{D} = \left\langle \frac{\chi(\underline{\underline{\sigma}})}{A} \right\rangle^{R} (1-D)^{-k(\chi(\underline{\underline{\sigma}}))} \end{cases}$$

avec :

$$\chi(\underline{\underline{\sigma}}) = \alpha J_0(\underline{\underline{\sigma}}) + \beta J_1(\underline{\underline{\sigma}}) + (1-\alpha-\beta) J_2(\underline{\underline{\sigma}})$$

où : $J_0(\underline{\underline{\sigma}})$ est la contrainte principale maximale

$$J_1(\underline{\underline{\sigma}}) = Tr(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$J_2(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\tilde{\sigma}'_{ij}\tilde{\sigma}'_{ij}}$$

$\langle x \rangle$ partie positive de x

où :

$\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{e}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$	sont respectivement les déformations totale, élastique, thermique et plastique,
$\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} = \left(\Lambda_{ijkl}\right)$	est le tenseur de rigidité élastique,
$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} Tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) \underline{\underline{Id}}$	est la partie déviatorique du tenseur des contraintes,
p	est la déformation plastique cumulée,
r	est la variable d'écrouissage isotrope viscoplastique
D	est la variable scalaire d'endommagement isotrope

Nota Bene :

L'ensemble des paramètres du modèle $\alpha, \beta, N, M, K, A, R$ et k peuvent être fonctions de la température (en $^{\circ}C$). k peut être constant, dépendre de la température ou de $\chi\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$ (en MPa) et de la température.

Par ailleurs, on voit que ce modèle considère qu'il peut exister un seuil viscoplastique σ_y qui dépend de la température.

On voit que ce modèle se ramène au modèle viscoplastique de Lemaitre si on considère que $D=0$ et si on néglige l'équation d'évolution de D. $M, N,$ et K sont des coefficients caractéristiques du comportement purement viscoplastique du matériau.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'évolution de l'endommagement est régi par une loi à trois paramètres : A, R, et k. La contrainte équivalente $\chi\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$ permet de tenir compte d'un éventuel effet de la partie sphérique du tenseur des contraintes sur l'endommagement (un peu comme dans les lois de croissance de cavités à la base des modèles de Gurson et de Rousselier). Le fait que la contrainte principale maximale puisse jouer un rôle dans $\chi\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$ est difficile à imaginer pour des matériaux comme l'acier mais rend le modèle plus général.

3 Calcul des paramètres matériau

Les paramètres de la loi de comportement peuvent être calculés à partir d'essais de fluage effectués pour différents niveaux de contraintes et de température. Pour cela on utilise une loi de comportement unidimensionnelle car la sollicitation d'une éprouvette cylindrique en traction peut se modéliser en dimension 1. Le tenseur des contraintes se réduit à sa composante axiale.

$$\underline{\underline{\sigma}}=\begin{pmatrix}\sigma_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ et } \underline{\underline{\sigma}}'=\sigma_0\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

On a donc : $J_0\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)=J_1\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)=J_2\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)=\sigma_0$
$\chi\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)=\sigma_0 \quad \forall\left(\alpha,\beta\right)$

Le système d'équations à résoudre est alors :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}=\dot{p}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\dot{p}=\frac{\dot{r}}{(1-D)}$$

$$\dot{r}=\left\langle\frac{\sigma_0-\sigma_y(1-D)}{(1-D)K\,r^{\frac{1}{M}}}\right\rangle^N$$

$$\dot{D}=\left\langle\frac{\sigma_0}{A}\right\rangle^R(1-D)^{-k(\sigma_0)}$$

Ce système d'équations est intégrable, ce qui permet d'avoir une seule équation pour le taux de déformation viscoplastique cumulée (qu'on peut assimiler à la déformation totale en négligeant les déformations élastiques).

On peut alors corréler cette expression aux données expérimentales pour ajuster les coefficients, mais le nombre de paramètres et les non-linéarités rendent cela difficile (de plus il n'y a pas unicité).
Il faut donc utiliser une méthode de corrélation faisant appel à des hypothèses "physiques" sur le phénomène de fluage dont la courbe est représentée ci-après.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

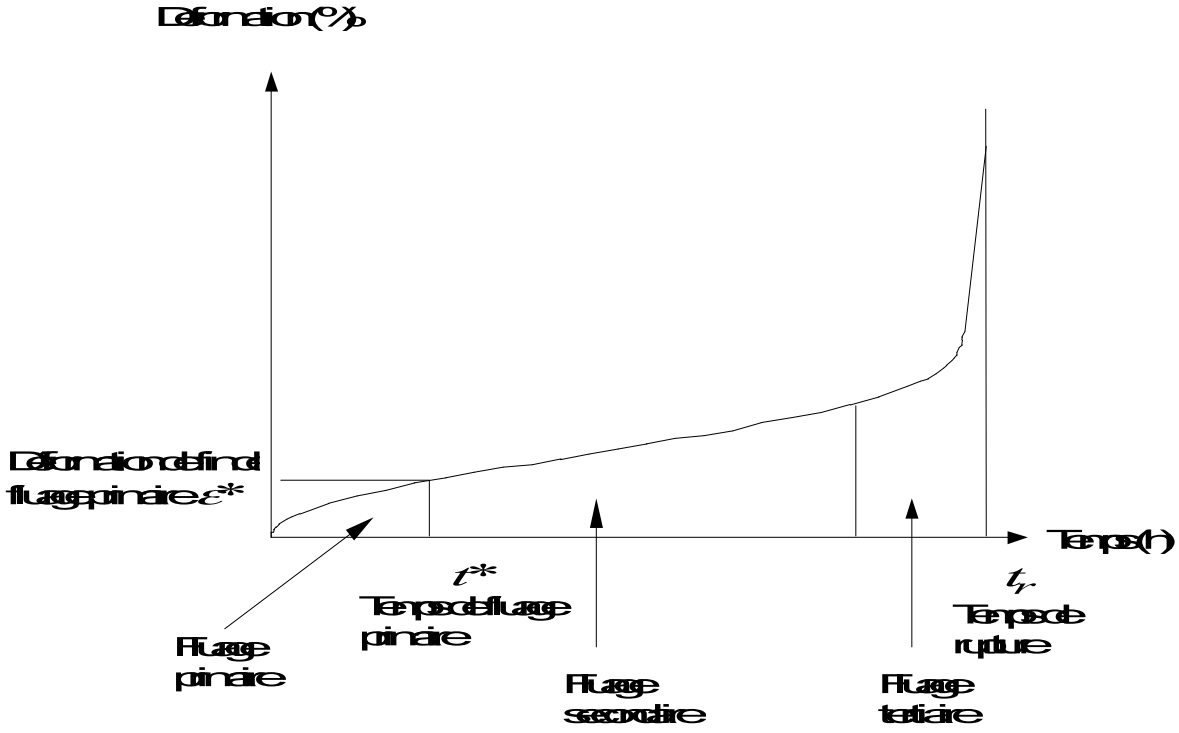


Figure 3-a : Les différentes phases de fluage sur une courbe de fluage

La courbe de déformation en fonction du temps obtenue après un essai de fluage se décompose en trois parties :

- une partie dite de fluage primaire où l'endommagement est négligeable.
- une partie dite de fluage secondaire où la vitesse de déformation est sensiblement constante.
- une partie dite de fluage tertiaire où l'écrouissage est saturé et où les phénomènes d'endommagement sont prépondérants.

Une méthode de calcul des paramètres utilisant les données expérimentales (ε, t) (on utilise également $(\dot{\varepsilon}, t)$ qui s'en déduit par une procédure numérique) pour différents niveaux de contraintes et différentes températures a été élaborée au CEA. Elle utilise les expressions trouvées plus haut dans le cas d'une contrainte homogène et unidimensionnelle en faisant des hypothèses suivant la partie de la courbe où sont prises les données. Par exemple, dans la phase de fluage primaire, on fait l'hypothèse $D=0$ et dans la phase de fluage secondaire, on utilise le fait que $\dot{\varepsilon}$ est constant.

On trouvera dans les références [bib3] et [bib4] la description complète et des exemples de calculs effectués sur l'acier de cuve allemand 22 MoNiCr 3 7.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Implantation dans *Code_Aster*

4.1 Algorithme de résolution

L'algorithme utilisé est du type global-local.

Les itérations globales utilisent la matrice de rigidité élastique calculée à partir de la matrice de Hooke endommagée :

$$\underline{\underline{\Lambda}}=(1-D)\,\underline{\underline{\Lambda}}^{0}$$

Au niveau des itérations locales (c'est-à-dire en chaque point de GAUSS), l'intégration numérique des équations en vitesse peut être effectuée soit par un schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 2 avec découpage automatique en sous-pas locaux en fonction d'une estimation de l'erreur d'intégration (méthode de Runge-Kutta emboîtée), soit par un schéma implicite d'Euler résolu par une méthode de Newton. On se reportera aux références [bib3] pour tous les détails concernant les méthodes numériques, et à [R5.03.14] pour les algorithmes explicites employés et leur programmation informatique.

4.2 Intégration implicite de la relation de comportement

A chaque itération globale de résolution du problème variationnel de l'équilibre et pour chaque point d'intégration élémentaire, il faut intégrer les équations du modèle décrites au [§3] pour obtenir le tenseur des contraintes et éventuellement calculer l'opérateur de comportement tangent.
Le problème écrit sous une forme générique à l'instant t est constitué des quatre systèmes d'équations non linéaires suivants :

$$\begin{cases}\underline{Rb}\left(\underline{\beta},\underline{p},\underline{\varepsilon},\underline{v}_{etat}^{t-1}\right)=\underline{0}\\ \underline{Rp}\left(\underline{\beta},\underline{p},\underline{\varepsilon},\underline{v}_{etat}^{t-1}\right)=\underline{0}\end{cases} \qquad \textbf{éq 4.2-1}$$

avec

$$\begin{cases}\underline{\Omega}\left(\underline{\underline{\sigma}},\underline{\beta},\underline{p},\underline{\varepsilon},\underline{v}_{etat}^{t-1}\right)=\underline{0}\\ \underline{\Theta}\left(\underline{v}_{etat},\underline{\beta},\underline{p},\underline{\varepsilon},\underline{v}_{etat}^{t-1}\right)=\underline{0}\end{cases} \qquad \textbf{éq 4.2-2}$$

Rb est un système de six équations (six inconnues) décrivant les inconnues associées aux contraintes. On note $\underline{\beta}$ le vecteur 6 composantes de ces inconnues. La liaison entre $\underline{\beta}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ est réalisée au moyen du système d'équations $\underline{\Omega}$ et le vecteur $\underline{p}$ contient les variables r et D.
Rp est un système d'équations décrivant les inconnues internes. On opte pour un système de 2 équations avec $\dot{D}$ et $\dot{r}$ comme inconnues internes. L'évolution des variables d'état est décrite par le système d'équations $\underline{\Theta}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le schéma implicite d'Euler est utilisé et l'algorithme se présente sous la forme suivante :

Initialisation des inconnues du problème discrétisé et récupération des valeurs des variables d'état obtenues au pas précédent
itérations de la méthode de Newton (nombre maximum d'itérations pré défini par l'utilisateur) : 1) Récupération des valeurs des paramètres intervenant dans la loi matérielle (l'opérateur d'élasticité) 2) Calcul des critères de contrainte et de leurs dérivées par rapport aux contraintes 3) Récupération de la valeurs du paramètre k intervenant dans l'évolution de l'endommagement et sa dérivée 4) Calcul de la valeur courante des variables d'état, des équations décrivant les inconnues internes et des équations décrivant les contraintes 5) Calcul des dérivées des équations par rapport aux inconnues 6) Résolution du système linéaire $$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Rb}^n}{\partial \underline{\beta}} & \frac{\partial \mathbf{Rb}^n}{\partial p} \\ \frac{\partial \mathbf{Rp}^n}{\partial \underline{\beta}} & \frac{\partial \mathbf{Rp}^n}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\underline{\beta} \\ dp \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Rb}^n \\ \mathbf{Rp}^n \end{bmatrix}$$ **éq 4.2-3** • Test de convergence
Evaluation de l'opérateur tangent

4.2.1 Discrétisation implicite des équations du modèle

Considérant qu'un incrément de temps caractérise un nouvel état du système [éq 4.2-1] et [éq 4.2-2] résolu par un algorithme de Newton, on choisit d'identifier l'état d'une quantité à l'instant précédent par l'exposant $^{t-1}$ alors que son état courant est noté sans exposant. Ainsi la variation d'une quantité pour l'incrément de temps considéré se présente par $U = U^{t-1} + \Delta U = U^{t-1} + \Delta t\ \dot{U}(\theta \Delta t)$
Pour $\theta = 0$, on obtient une schéma explicite et pour $\theta = 1$, on obtient un schéma purement implicite.

Avec ces notations, la forme discrétisée du système vectoriel s'écrit :

$$\underline{Rb} \equiv \underline{\beta} - \left(1 - \left(D^{t-1} + \Delta t\ \dot{D}\right)\right)\ \underline{\Delta}\ \left(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_{th} - \left(\underline{\varepsilon}_{vp}^{t-1} + \Delta t\ \frac{3}{2}\ \dot{r}\ \frac{\underline{\sigma}'(\underline{\beta})}{\left(1 - \left(D^{t-1} + \Delta t\ \dot{D}\right)\right)\sigma_{eq}(\underline{\beta})}\right)\right) = \underline{0}$$

éq 4.2.1-1

ou plus simplement $\underline{Rb} \equiv \underline{\beta} - \left(1 - \left(D^{t-1} + \Delta t\ \dot{D}\right)\right)\ \underline{\Delta}\ \underline{\varepsilon}_{el} = \underline{0}$

$\underline{\Omega} \equiv \underline{\sigma} = \underline{\beta}$

où $\underline{\beta}$ est le vecteur 6 composantes issu du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\underline{Rp} \equiv \begin{cases} \dot{r} - \left\langle \dfrac{\sigma_{eq}(\underline{\beta}) - \sigma_y\left(1-\left(D^{t-1}+\Delta t\ \dot{D}\right)\right)}{\left(1-\left(D^{t-1}+\Delta t\ \dot{D}\right)\right)\ K\ \left(r^{t-1}+\Delta t\ \dot{r}\right)^{1/M}} \right\rangle^{N} = 0 \\ \dot{D} - \left\langle \dfrac{\chi(\underline{\beta})}{A} \right\rangle^{R} \left(1-\left(D^{t-1}+\Delta t\ \dot{D}\right)\right)^{-k(\chi(\underline{\beta}))} = 0 \end{cases} \quad \textbf{éq 4.2.1-2}$$

L'évolution des variables d'état est décrite par le système d'équations $\underline{\Theta}$:

$$\underline{\Theta} \equiv \begin{cases} D = D^{t-1} + \Delta t\ \dot{D} \\ \underline{\varepsilon}_{vp} = \underline{\varepsilon}_{vp}^{t-1} + \Delta t\ \dfrac{3}{2} \dfrac{\dot{r}}{\left(1-\left(D^{t-1}+\Delta t\ \dot{D}\right)\right)} \dfrac{\underline{\sigma}'}{\sigma_{eq}} = \underline{\varepsilon}_{vp}^{t-1} + \Delta t\ \dfrac{\dot{r}}{\left(1-\left(D^{t-1}+\Delta t\ \dot{D}\right)\right)} \dot{\sigma}_{eq} \\ r = r^{t-1} + \Delta t\ \dot{r} \end{cases} \quad \textbf{éq 4.2.1-3}$$

où D , $\underline{\varepsilon}_{vp}$ et r sont les variables d'état dont l'historique est conservé.

Les déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et les variables d'états ne sont pas des inconnues du problème. Ces grandeurs seront archivées à chaque incrément de temps convergé pour être réutilisées à l'incrément suivant.

4.2.2 Résolution numérique

La résolution du système non linéaire $\begin{cases} \mathbf{Rb} = \underline{0} \\ \mathbf{Rp} = \underline{0} \end{cases}$ utilise la méthode de Newton-Raphson associée à une technique d'approximation tangentielle afin de rechercher les solutions dans un domaine où les fonctions sont correctement conditionnées.

Suivant l'algorithme de Newton-Raphson, on résout ce système de manière itérative sur la séquence suivante :

1) Initialisation des inconnues
2) Recherche d'une direction de descente par la résolution du système [éq 4.2-3]
3) Test de la convergence $err = \dfrac{\sum |\Delta x|}{\sum |x|}$

4.2.3 Opérateur de comportement tangent

L'opérateur tangent s'obtient en dérivant les contraintes par rapport aux déformations totales suivant les règles de dérivation composées :

$$\frac{d\,\underline{\sigma}}{d\,\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \underline{\beta}} \frac{\partial \underline{\beta}}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \underline{p}} \frac{\partial \underline{p}}{\partial \underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \underline{\varepsilon}} \quad \textbf{éq 4.2.3-1}$$

où la fonction de contraintes $\Sigma\left(\underline{\beta}, \underline{p}, \underline{\varepsilon}, \underline{v}_{etat}^{t-1}\right) = \underline{\beta}$. Les dérivées des inconnues par rapport aux déformations totales s'obtiennent en dérivant le système [éq 4.2-1] soit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{Rb}}{\partial \underline{\beta}} & \frac{\partial \underline{Rb}}{\partial \underline{p}} \\ \frac{\partial \underline{Rp}}{\partial \underline{\beta}} & \frac{\partial \underline{Rp}}{\partial \underline{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\beta}}{\partial \underline{\varepsilon}} \\ \frac{\partial \underline{p}}{\partial \underline{\varepsilon}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{Rb}}{\partial \underline{\varepsilon}} \\ \frac{\partial \underline{Rp}}{\partial \underline{\varepsilon}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{éq 4.2.3-2}$$

4.2.4 Cas particulier des contraintes planes

Les éléments 2D en contraintes planes devant être utilisables pour ce modèle de comportement, on effectue un traitement supplémentaire en sur-couche du traitement général effectué en 3D.
Un test positif sur le cas des contraintes planes signifie :

1) A la résolution du système [éq 4.2-1], on ajoute les équations supplémentaires $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$
2) On modifie l'opérateur tangent pour assurer l'équilibre énergétique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Intégration implicite optimisée

Dans le cas où on ne tient pas compte de la trace des contraintes (obtenu pour des valeurs nulles des coefficients α *et* β *),* la fonction $\chi(\underline{\underline{\sigma}})=J_2(\underline{\underline{\sigma}})$
Si de plus on a : $R=k$, alors les équations du modèle se réduisent à :

$$\Delta(\varepsilon^e)=(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}-\Delta\varepsilon^{vp})=\Delta\left(\frac{\Lambda^{-1}\sigma}{1-D}\right)=\left(\frac{\Lambda^{-1}\sigma}{1-D}\right)-\left(\frac{\Lambda^{-1}\sigma}{1-D^-}\right)^-$$

$$\Rightarrow \quad tr(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th})+\left(\frac{tr\,\sigma^-}{(3\lambda+2\mu)^-(1-D^-)}\right)=\frac{tr(\sigma)}{(3\lambda+2\mu)(1-D)}$$

$$2\mu\,(\Delta\varepsilon'-\Delta\varepsilon^{vp})+2\mu\left(\frac{\sigma'}{2\mu(1-D^-)}\right)^-=\frac{(\sigma')}{(1-D)}$$

$$\Delta\varepsilon^{vp}=\frac{3}{2}\frac{\Delta r}{(1-D)}\frac{\sigma'}{\sigma_{eq}}$$

$$\Delta r=\Delta t\left\langle\frac{\sigma_{eq}-\sigma_y(1-D)}{(1-D)K\,r^{1/M}}\right\rangle^N$$

$$\Delta D=\Delta t\left\langle\frac{\sigma_{eq}}{A(1-D)}\right\rangle^R$$

$\Delta a=a-a^-$ Représente la variation de la quantité a entre l'instant actuel et l'instant précédent noté -

On choisit ici une discrétisation implicite pure, c'est à dire que les termes en D, r qui apparaissent sont choisis à l'instant de calcul actuel.
Remarque : on peut écrire de manière équivalente la première équation sous la forme :

$$(\varepsilon^e)=(\varepsilon-\varepsilon^{th}-\varepsilon^{vp})=\left(\frac{\Lambda^{-1}\sigma}{1-D}\right)\Rightarrow\left(\frac{\sigma'}{1-D}\right)=2\mu\,(\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}-\Delta\varepsilon^{vp})=2\mu\,(\varepsilon^--\varepsilon^{p-}+\Delta\varepsilon'-\Delta\varepsilon^{vp})$$

$$\text{soit } (\varepsilon^e)=2\mu\,(\varepsilon^{e-}+\Delta\varepsilon'-\Delta\varepsilon^{vp})=2\mu\left(\left(\frac{\sigma'}{(1-D)2\mu}\right)^-+\Delta\varepsilon'-\Delta\varepsilon^{vp}\right)$$

Alors en éliminant la déformation viscoplastique, et en regroupant les termes inconnus dans l' équation en contraintes :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$tr(\sigma)=(3\lambda+2\mu)\left[\left(\frac{tr\,\sigma}{(3\lambda+2\mu)(1-D)}\right)^{-}+tr\left(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}\right)\right]$$

$$2\mu\left(\Delta\varepsilon^{vp}\right)=2\mu\left(\frac{\sigma'}{2\mu(1-D)}\right)^{-}+2\mu\left(\Delta\varepsilon'\right)-\frac{\sigma'}{(1-D)}=s^{e}-\frac{\sigma'}{(1-D)}$$

$$\text{avec}\quad s^{e}=2\mu\left(\frac{\sigma'}{2\mu(1-D)}\right)^{-}+2\mu\left(\Delta\varepsilon'\right)$$

$$2\mu\,\Delta\varepsilon^{vp}=\frac{3}{2}2\mu\frac{\Delta r}{(1-D)}\frac{\sigma'}{\sigma_{eq}}=s^{e}-\frac{\sigma'}{(1-D)}$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta t}=\left\langle\frac{\frac{\sigma_{eq}}{(1-D)}-\sigma_{y}}{K\,r^{1/M}}\right\rangle^{N}\Leftrightarrow K\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^{1/N}r^{1/M}+\sigma_{y}=\frac{\sigma_{eq}}{(1-D)}\quad\text{si}\ \frac{\sigma_{eq}}{(1-D)}\geq\sigma_{y},\quad\Delta r=0\ \text{sinon}$$

$$\Delta D=\Delta t\left\langle\frac{\sigma_{eq}}{A(1-D)}\right\rangle^{R}\Leftrightarrow\Delta D=\Delta t\left\langle\frac{1}{A}\left(K\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^{1/N}r^{1/M}+\sigma_{y}\right)\right\rangle^{R}$$

Dans ce cas on peut simplifier ce système d'équations en se ramenant à une seule équation en Δr, de la façon suivante :

$$\Delta r\ \text{solution de :}\ \begin{cases}K\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^{1/N}r^{1/M}+\sigma_{Y}+\frac{3\mu\Delta r}{1-D}=s^{e}_{eq} & \text{si}\ \frac{\sigma_{eq}}{1-D}\geq\sigma_{Y},\\ \Delta r=0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$\frac{\sigma'}{1-D}\left(1+\frac{3\,\mu\,\Delta\,r}{\sigma_{eq}}\right)=s^{e}\Rightarrow\sigma_{eq}+3\,\mu\,\Delta\frac{r}{1-D}=s^{e}_{\text{eq}}$$

où ΔD est une fonction de Δr définie par $\Delta D=\Delta t\left\langle\frac{1}{A}\left(K\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^{1/N}r^{1/M}+\sigma_{Y}\right)\right\rangle^{R}$

Numériquement, on multiplie cette équation par le terme en $\Delta t^{1/N}$ (pour éviter les soucis lorsque le pas de temps tend vers 0), et par $1-D$:

$$\Delta r\ \text{solution de :}$$

$$f(\Delta r)=(1-D)\left(K(\Delta r)^{1/N}r^{1/M}+\sigma_{y}(\Delta t)^{1/N}\right)+3\,\mu\,\Delta r(\Delta t)^{1/N}-(1-D)s^{eq}(\Delta t)^{1/N}=0$$

En fait, D ne peut pas augmenter jusqu'à 1, mais est limité à 0.99, ce qui permet d'éviter des matrices tangentes singulières.

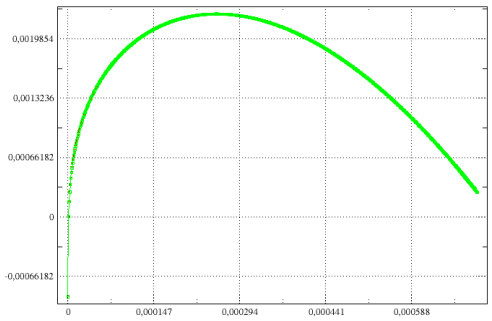
Pour trouver la solution de cette équation, on utilise une méthode de sécante, après avoir obtenu un encadrement. La fonction f est négative en 0 par construction. Il s'agit de chercher une borne supérieure pour laquelle f est positive.

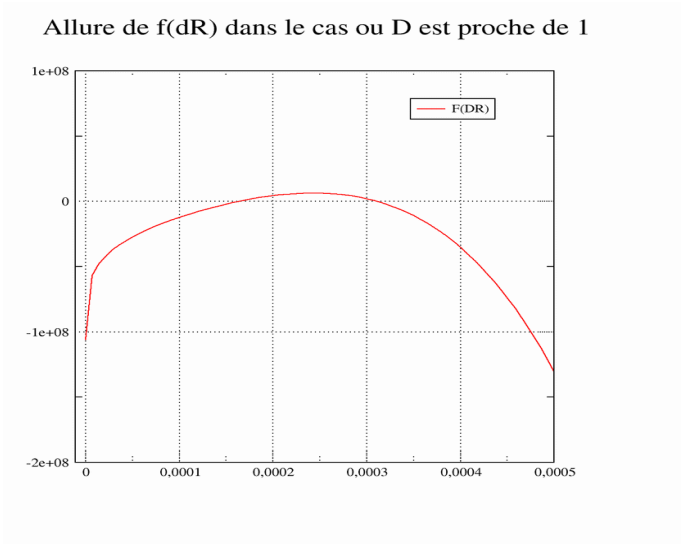
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\left\{\Delta r=-\frac{(1-D)}{3\mu}\left(K\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^{1/N} r^{1/M}+\sigma_y\right)+\frac{(1-D)}{3\mu}s^{e}{}_{eq} \le \frac{(1-D)}{3\mu}s^{e}{}_{eq}\le \frac{1}{3\mu}s^{e}{}_{eq}\right.$$

Si $f\left(\frac{1}{3\mu}s^{e}{}_{eq}\right)>0$, alors l'encadrement est bien défini. La solution est cherchée dans un intervalle défini par les bornes : $[0,\frac{1}{3\mu}s^{e}{}_{eq}]$.

Sinon, il faut chercher une borne supérieure rendant la fonction positive. Or cette fonction admet en général deux solutions : sur la courbe suivante est représentée la fonction $f(\Delta r)$ dans deux cas particuliers : pour une situation où D est petit, et pour une situation où D est proche de 1. On constate que la fonction croise deux fois l'axe des abscisses. La solution que l'on cherche est celle qui correspond à Δr minimum.





Pour ce faire, puisque $f\left(\frac{1}{3\mu}s^{e}{}_{eq}\right)<0$, on calcule la dérivée de f. Si est est positive on augmente la borne supérieure jusqu'à trouver une valeur telle que f soit positive. Si la dérivée est négative, on diminue la valeur de la borne pour obtenir $f>0$. On applique ensuite la méthode de corde.

La précision choisie pour la résolution est de $\text{RESI_INTE_RELA}*f(0)$.

Une fois la valeur de Δr obtenue, on a immédiatement celle de ΔD, puis le déviateur des contraintes se calcule par :

$$\sigma'=(1-D)\left(1+\frac{3\mu\Delta r}{\sigma_{eq}}\right)^{-1}s^{e}$$

et la trace par:

$$tr(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th})+\left(\frac{tr\,\sigma^{-}}{(3\lambda+2\mu)^{-}(1-D^{-})}\right)=\frac{tr(\sigma)}{(3\lambda+2\mu)(1-D)}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Signification des variables internes

Les variables internes du modèle aux points de Gauss (mot-clé VARI_ELGA) sont accessibles par :

1) $V1 = \varepsilon_{vp}^{11}$
2) $V2 = \varepsilon_{vp}^{22}$
3) $V3 = \varepsilon_{vp}^{33}$
4) $V4 = \varepsilon_{vp}^{12}$
5) $V5 = \varepsilon_{vp}^{13}$
6) $V6 = \varepsilon_{vp}^{23}$
7) $V7 = p$, la déformation plastique cumulée
8) $V8 = r$, la variable d'écrouissage isotrope viscoplastique
9) $V9 = D$, la variable d'endommagement
10) $V10 = ind$, indicateur valant 0 si le point courant est resté élastique au pas courant, 1 sinon.

6 Bibliographie

- P. MONGABURE, A. SIRVENT, M. DESMET : « RUPTHER : essai 1 », rapport DMT/95/367
- LEMAITRE J., CHABOCHE J.L. : "Mécanique des matériaux solides", Ed. Dunod (1985)
- P. DUPAS, J.-R. SCHNEITER : " Introduction d'un modèle couplé de dommage viscoplastique dans Aster " - Rapport d'avancement de la phase 4 du CERD RNE 533, note EDF/MTC à paraître
- H. JAMET : " Détermination des paramètres de la loi de comportement viscoplastique couplé à l'endommagement pour l'acier 20MnMoNI55. Application au calcul par éléments finis d'un élément de tuyauterie du circuit primaire ", note CEA/DRN/DMT/SEMT/LAMS/ DMT/95/406

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6.4	P.DUPAS	Texte initial
8.4	J.M.PROIX, 0.DIARD	Modifications en implicite
9.4	J.M.PROIX	Modification des mots-clés et variables internes
10,1	J.M.PROIX	Amélioration de la recherche de la solution pour les cas où l'endommagement est fort : nouvel algorithme d'encadrement et méthode de sécante.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)