Modèle de Rousselier pour la rupture ductile

Résumé

Le modèle de Rousselier décrit l'endommagement dû à la croissance plastique de cavités dans un métal. Il permet de modéliser la fissuration et la rupture ductile. La relation de comportement est élastoplastique ou viscoplastique avec écrouissage isotrope. Elle permet les changements de volume plastique et est écrite en petites déformations. L'écriture en grandes déformations avec une formulation de Simo et Miehe modifiée, dans le cas élastoplastique seulement, est décrite dans [R5.03.06].
Ce modèle est disponible dans la commande STAT_NON_LINE par l'intermédiaire du mot-clé RELATION = 'ROUSS_PR' ou 'ROUSS_VISC' sous le mot-clé facteur COMPORTEMENT et avec le mot-clé DEFORMATION = 'PETIT_REAC'.
Ce modèle est implanté pour les modélisations tridimensionnelle (3D), axisymétrique (AXIS), en contraintes planes et en déformations planes (C_PLAN, D_PLAN).

On présente l'écriture et le traitement numérique de ce modèle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Notations....4
3 Modèle de Rousselier....5
3.1 Dérivation des équations du modèle....5
3.2 Equations du modèle....7
4 Formulation numérique....8
4.1 Mots clés, données matériau et variables internes....8
4.2 Expression du modèle discrétisé....8
4.3 Résolution de l'équation scalaire non linéaire....10
4.4 Expression de la matrice tangente du comportement....10
5 Bibliographie....12
6 Fonctionnalités et vérification....12
7 Description des versions du document....12

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Les mécanismes à l'origine de la rupture ductile des métaux sont associés au développement de cavités au sein du matériau. On distingue généralement trois phases :

- germination : il s'agit de l'amorçage ou nucléation des cavités, en des sites qui correspondent préférentiellement aux particules de seconde phase présentes dans le matériau,
- croissance : c'est la phase qui correspond au développement proprement dit des cavités, piloté essentiellement par l'écoulement plastique de la matrice métallique qui entoure ces cavités,
- coalescence : c'est la phase qui correspond à la localisation de la déformation entre les cavités pour créer des fissures macroscopiques.

Le modèle de Rousselier [bib1], [bib2], [bib3] présenté ici se fonde sur des hypothèses microstructurales qui introduisent une microstructure constituée de cavités et d'une matrice dont les déformations élastiques sont négligeables comparées aux déformations plastiques. Dans ce cas, et en l'absence de nucléation de nouvelles cavités, la porosité f, définie comme le rapport entre le volume de la cavité V^c et le volume total V du volume élémentaire représentatif, est directement reliée à la déformation plastique macroscopique par :

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{1-f_0}{1-f} \text{ avec } f=\frac{V^c}{V}\Leftrightarrow \dot{f}=(1-f)\,\mathrm{tr}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \qquad \text{éq 1-1}$$

où f_0 désigne la porosité initiale, ρ_o et ρ sont respectivement la masse volumique dans les configurations initiale et actuelle (on prend dans la suite $\rho_o=1$) et $\dot{\varepsilon}^p$ le taux de déformation plastique du volume total V.
La construction du modèle repose sur une analyse thermodynamique et phénoménologique qui amène à écrire le potentiel *plastique* F sous la forme suivante :

$$F(\boldsymbol{\tau},\ p,\ f)=\tau_{eq}+\sigma_1 D_1 f\exp\left(\frac{\tau_m}{\sigma_1}\right)-R(p) \qquad \text{éq 1-2}$$

où $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\sigma}/\rho$ est la contrainte de Kirchhoff, $\boldsymbol{\sigma}$ est la contrainte de Cauchy, R l'écrouissage isotrope fonction de la déformation plastique cumulée p, σ_1 et D_1 des paramètres du matériau. La présence dans le potentiel plastique de la contrainte hydrostatique τ_m autorise les changements de volume plastique.
En cas de nucléation de nouvelles cavités, on considère que la fraction volumique créée est proportionnelle à la déformation plastique cumulée. Il suffit donc de remplacer f par $f+A_n p$ dans les équations du modèle. A_n est un paramètre du matériau. L'équation [éq 1-1] n'est pas modifiée.
Dans le cas viscoplastique, on écrit le potentiel *viscoplastique* F^{vp} comme une fonction du potentiel plastique F :

$$F^{vp}=\Lambda(F,p,f) \qquad \text{éq 1-3}$$

On considèrera seulement le cas particulier tel que :

$$\dot{p}=\frac{\partial\Lambda}{\partial F}=\dot{\varepsilon}_0\left[sh\left(\frac{F}{\sigma_0}\right)\right]^m \qquad \text{éq 1-4}$$

qui se réduit à une fonction puissance (loi de type Norton) lorsque les deux paramètres du matériau $\dot{\varepsilon}_0$ et σ_0 sont très grands.
Par la suite, on présente les relations de comportement du modèle de Rousselier et son intégration numérique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Notations

On notera par :

$\mathbf{Id}$	tenseur identité du deuxième ordre
$\mathbf{II}$	tenseur identité du quatrième ordre
$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}$	trace du tenseur du deuxième ordre $\mathbf{A}$
$\tilde{\mathbf{A}}$	partie déviatorique du tenseur $\mathbf{A}$ définie par $\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{A}-(\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathbf{A})\mathbf{Id}$
A_m	partie hydrostatique du tenseur $\mathbf{A}$ définie par $A_m=\frac{\mathrm{tr}\,\mathbf{A}}{3}$
A_{eq}	valeur équivalente de von Mises définie par $A_{eq}=\sqrt{\frac{3}{2}\tilde{\mathbf{A}}:\tilde{\mathbf{A}}}$
:	produit doublement contracté : $\mathbf{A}:\mathbf{B}=\sum_{i,j}A_{ij}B_{ij}=\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})$
$\otimes$	produit tensoriel : $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})_{ijkl}=A_{ij}B_{kl}$
λ,μ,E,ν,K	coefficients de l'élasticité isotrope
$\dot{p}$	vitesse de déformation plastique équivalente $\dot{p}=\sqrt{\frac{2}{3}\tilde{\dot{\varepsilon}}^{p}:\tilde{\dot{\varepsilon}}^{p}}$

Par ailleurs, dans le cadre d'une discrétisation en temps, toutes les quantités Q évaluées à l'instant précédent sont indicées par $^-$, les quantités évaluées à l'instant $t=t^-+\Delta t$ ne sont pas indicées et les incréments sont désignés par Δ. On a ainsi :

$$Q=Q^-+\Delta Q$$

La résolution numérique est effectuée par une θ-méthode, avec $0\leq\theta\leq 1$. Pour toutes les quantités, on définit :

$$Q^{\theta}=Q^-+\theta\Delta Q$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modèle de Rousselier

Nous décrivons maintenant la dérivation des équations du modèle de Rousselier présenté en introduction.

3.1 Dérivation des équations du modèle

On suppose que l'énergie libre *spécifique* se décompose en trois parties : une partie hyperélastique qui ne dépend que de la déformation élastique, une partie liée au mécanisme d'écrouissage et une partie liée à l'endommagement :

$$\Phi\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}},\ p,f\right)=\Phi^{e}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}\right)+\Phi^{p}\left(p\right)+\Phi^{f}\left(f\right) \qquad \text{éq 3.1-1}$$

L'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit (on ne considère pas la partie thermique) :

$$\boldsymbol{\tau}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\Phi}\geq 0 \qquad \text{éq 3.1-2}$$

expression dans laquelle $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e}+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}$ représente le taux de déformation.

La dissipation s'écrit encore :

$$\left(\boldsymbol{\tau}-\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}}\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e}+\boldsymbol{\tau}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}-\frac{\partial\Phi}{\partial p}\dot{p}-\frac{\partial\Phi}{\partial f}\dot{f}\geq 0 \qquad \text{éq 3.1-3}$$

Le second principe de la thermodynamique requiert alors l'expression suivante pour la relation contrainte-déformation élastique :

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{e}} \qquad \text{éq 3.1-4}$$

On définit les forces thermodynamiques associées à la déformation élastique, à la déformation plastique cumulée et à la porosité conformément au cadre des matériaux standards généralisés :

$$\boldsymbol{\tau}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{e}\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{e}} \qquad \text{éq 3.1-5}$$

$$A\left(p\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial p} \qquad \text{éq 3.1-6}$$

$$B\left(f\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial f} \qquad \text{éq 3.1-7}$$

Il reste alors pour la dissipation :

$$\boldsymbol{\tau}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}-A\,\dot{p}\ -B\,\dot{f}\geq 0 \qquad \text{éq 3.1-8}$$

Le principe de dissipation maximale appliqué à partir du potentiel *viscoplastique* $F^{\mathrm{vp}}(\boldsymbol{\tau},\mathrm{A},\mathrm{B})$ permet d'en déduire les lois d'évolution de la déformation plastique, de la déformation plastique cumulée et de la porosité, soit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}=\frac{\partial F^{vp}}{\partial\boldsymbol{\tau}} \qquad \text{éq 3.1-9}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\dot{p}=-\frac{\partial F^{vp}}{\partial A} \quad \text{éq 3.1-10}$$

$$\dot{f}=-\frac{\partial F^{vp}}{\partial B} \quad \text{éq 3.1-11}$$

On suppose que $F^{\text{vp}}(\boldsymbol{\tau}, A, B)$ est une fonction du potentiel *plastique* $F(\boldsymbol{\tau}, A, B)$ et que ce dernier se décompose en deux termes dépendant respectivement du deuxième invariant de $\boldsymbol{\tau}$ couplé à A et du premier invariant de $\boldsymbol{\tau}$ couplé à B :

$$F^{vp}=\Lambda(F)=\Lambda\left(F_{vM}(\tau_{eq}, A)+F_m(\tau_m, B)\right) \quad \text{éq 3.1-12}$$

Par hypothèse, le premier terme se décompose de façon additive comme le potentiel de von Mises :

$$F_{vM}(\tau_{eq}, A)=\tau_{eq}-A(p)-R_0=\tau_{eq}-R(p) \quad \text{éq 3.1-13}$$

Pour ne pas obtenir un résultat trivial, la décomposition du second terme doit être multiplicative :

$$F_m(\tau_m, B)=g(\tau_m)h(B) \quad \text{éq 3.1-14}$$

Compte tenu de l'équation [éq 1-1], les lois d'évolution pour $\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et $\dot{f}$ conduisent à l'égalité :

$$\frac{g'(\tau_m)}{g(\tau_m)}=\left(\frac{-1}{1-f}\right)\frac{h'(B(f))}{h(B(f))} \quad \text{éq 3.1-15}$$

Les deux membres de cette équation sont des fonctions des deux variables indépendantes τ_m et f, donc ils sont égaux à une constante de dimension l'inverse d'une contrainte, c'est le paramètre du matériau $1/\sigma_1$. Le paramètre sans dimension D_1 apparaît dans l'intégration de g'/g :

$$g(\tau_m)=D_1\sigma_1\exp\left(\frac{\tau_m}{\sigma_1}\right) \quad \text{éq 3.1-16}$$

La fonction $B(f)$ et la fonction inverse $f=h_1(B)$ sont inconnues. Le choix le plus simple et le plus naturel est de prendre $h_1\equiv h$, ce qui donne :

$$h(B)\equiv h_1(B)=f \quad \text{éq 3.1-17}$$

$$h'(B)=\frac{df}{\mathrm{dB}}=-\frac{1}{\sigma_1}f(1-f) \quad \text{éq 3.1-18}$$

Le potentiel plastique s'écrit finalement :

$$F=\tau_{eq}+\sigma_1 D_1 f\exp\left(\frac{\tau_m}{\sigma_1}\right)-R(p) \quad \text{éq 3.1-19}$$

La loi d'évolution pour $\dot{p}$ donne :

$$\dot{p}=\frac{d\Lambda(F)}{\mathrm{dF}}=V(F) \quad \text{éq 3.1-20}$$

La fonction $V(F)$ définit la viscosité du matériau. On considèrera seulement le cas particulier tel que :

$$V(F)=\dot{\varepsilon}_0\left[sh\left(\frac{F}{\sigma_0}\right)\right]^m \quad \text{éq 3.1-21}$$

qui se réduit à une fonction puissance (loi de type Norton) lorsque les deux paramètres du matériau $\dot{\varepsilon}_0$ et σ_0 sont très grands. Inversement on a :

$$F-S(\dot{p})=0 \quad \text{éq 3.1-22}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$S(\dot{p})=\sigma_0 sh^{-1}\left[\left(\frac{\dot{p}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{\frac{1}{m}}\right] \quad \text{éq 3.1-23}$$

Dans le cas de la plasticité indépendante du temps, l'équation précédente devient $F=0$ (critère ou seuil de plasticité) et $\dot{p}$ est donné par l'équation de consistance $\dot{F}=0$ si $F=0$ et $\dot{p}=0$ si $F<0$.

Les équations du modèle sont maintenant complètement définies, dans le cas sans nucléation de nouvelles cavités. En cas de nucléation de nouvelles cavités, on considère que la fraction volumique créée est proportionnelle à la déformation plastique cumulée. Il suffit donc de remplacer f par $f+A_n p$ dans les équations du modèle. A_n est un paramètre du matériau. L'équation [éq 1-1] n'est pas modifiée.

3.2 Equations du modèle

On résume les équations du modèle déduites de l'analyse thermodynamique et phénoménologique qui précède :

$$\Phi_{vp}=\tau_{eq}+\sigma_1 D_1\left(f+A_n p\right)\exp\left(\frac{\tau_m}{\sigma_1}\right)-R(p)-\sigma_0 sh^{-1}\left[\left(\frac{\dot{p}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{\frac{1}{m}}\right]=0 \quad \textbf{éq 3.2-1}$$

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho}=\left[\lambda\left(\mathbf{Id}\otimes\mathbf{Id}\right)+2\mu\,\mathbf{II}\right]:\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \text{éq 3.2-2}$$

$$\rho=\frac{1-f-A_n p}{1-f_0} \quad \text{éq 3.2-3}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\dot{p}\frac{3\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{2\sigma_{eq}}=\dot{p}\frac{3\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{2\tau_{eq}} \quad \text{éq 3.2-4}$$

$$tr\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\dot{p}\,D_1\left(f+A_n p\right)\exp\left(\frac{\tau_m}{\sigma_1}\right) \quad \text{éq 3.2-5}$$

$$\dot{f}=A_1\left(1-f\right)tr\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad \text{éq 3.2-6}$$

avec $A_1=1$, ce paramètre étant introduit uniquement pour des raisons numériques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Formulation numérique

4.1 Mots clés, données matériau et variables internes

En vue des applications prévisibles, le modèle a été implanté sous deux mots clés distincts : 'ROUSS_PR' pour le modèle plastique avec nucléation de cavités ou 'ROUSS_VISC' pour le modèle viscoplastique sans nucléation. Cela permet d'éviter des calculs numériques inutiles. Les équations simplifiées correspondantes sont obtenues à partir des équations générales en posant respectivement $\sigma_0=0$ ou $A_n=0$.

L'ensemble des paramètres du modèle est fourni sous les mots clés facteurs 'ROUSSELIER' ou 'ROUSSELIER_FO' et 'TRACTION' (pour définir la courbe de traction) de la commande DEFI_MATERIAU ([U4.43.01]). Les paramètres du modèle viscoplastique (σ_0 , $\dot{\varepsilon}_0$ et m) sont fournis par le mot-clé 'VISC_SINH'.

Les variables internes produites dans *Code_Aster* sont :

- V1, la déformation plastique cumulée p ,
- V2, la porosité f ,
- V3 à V8, le tenseur de déformation élastique ε^e ,
- V9, l'indicateur de plasticité (0 si le dernier incrément calculé est élastique, 1 si solution plastique régulière, 2 si solution plastique singulière).

Nous présentons maintenant l'intégration numérique de la loi de comportement et donnons l'expression de la matrice tangente (options FULL_MECA et RIGI_MECA_TANG).

4.2 Expression du modèle discrétisé

La résolution numérique est effectuée par une θ -méthode, avec $0\leq\theta\leq1$, et de façon incrémentale. Pour toutes les quantités Q , on définit :

$$Q=Q^-+\Delta Q$$
$$Q^\theta=Q^-+\theta\Delta Q$$

L'écriture incrémentale nécessite la prise en compte de l'éventuelle variation des propriétés matériau (du fait, par exemple, d'un changement de température durant le pas de temps).
Le système d'équations discrétisé est :

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}^\theta=2\mu\theta\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e+\frac{2\mu\theta+(1-\theta)2\mu^-}{2\mu^-}\tilde{\boldsymbol{\tau}}^-=2\mu\theta\left(\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right)+\frac{2\mu\theta+(1-\theta)2\mu^-}{2\mu^-}\tilde{\boldsymbol{\tau}}^- \quad \text{éq 4.2-1}$$

$$\tau_m^\theta=K\theta\,\mathrm{tr}\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e+\frac{3K*\theta+(1-\theta)3K^-}{3K^-}\tau_m^-=K\theta\left(\mathrm{tr}\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}-\mathrm{tr}\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\right)\frac{3K*\theta+(1-\theta)3K^-}{3K^-}\tau_m^- \quad \text{éq 4.2-2}$$

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\Delta p\frac{3\tilde{\boldsymbol{\tau}}^\theta}{2\tau_{eq}^\theta} \quad \text{éq 4.2-3}$$

$$\mathrm{tr}\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p=\Delta pD_1\left(f^\theta+A_n p^\theta\right)\exp\left(\frac{\tau_m^\theta}{\sigma_1}\right) \quad \text{éq 4.2-4}$$

$$\Delta f=A_1\left(1-f^\theta\right)\mathrm{tr}\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad \text{éq 4.2-5}$$

$$\Phi_{vp}^\theta=\tau_{eq}^\theta+\sigma_1 D_1\left(f^\theta+A_n p^\theta\right)\exp\left(\frac{\tau_m^\theta}{\sigma_1}\right)-R(p^\theta)-\sigma_0 sh^{-1}\left[\left(\frac{\Delta p}{\dot{\varepsilon}_0\Delta t}\right)^{\frac{1}{m}}\right]=0 \quad \textbf{éq 4.2-6}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ce système se ramène à la résolution d'une seule équation scalaire pour l'inconnue Δf, connaissant $\Delta \varepsilon$, Δt et les quantités Q^-. On note que ρ n'intervient pas dans l'algorithme, par contre il interviendra dans le calcul de la matrice tangente cohérente. On calcule successivement :

$$\tau_m^\theta = \frac{3K*\theta+(1-\theta)3K^-}{3K^-}\tau_{m^-} + K\theta\left(\mathrm{tr}\,\Delta\varepsilon - \frac{\Delta f}{A_1(1-f^\theta)}\right) \quad \text{éq 4.2-7}$$

Δp est la racine positive de l'équation du second degré :

$$A_n\theta(\Delta p)^2 + \left(f^\theta + A_n p^-\right)\Delta p - \frac{\Delta f}{A_1(1-f^\theta)}\frac{1}{D_1\exp\left(\tau_m^\theta/\sigma_1\right)} = 0 \quad \text{éq 4.2-8}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}^\theta = \left(1 - \frac{3\mu\,\theta\Delta p}{\left[\frac{2\mu\,\theta+(1-\theta)2\mu^-}{2\mu^-}\tilde{\boldsymbol{\tau}}^- + 2\mu\,\theta\Delta\tilde{\varepsilon}\right]_{eq}}\right)\left(\frac{2\mu\,\theta+(1-\theta)2\mu^-}{2\mu^-}\tilde{\boldsymbol{\tau}}^- + 2\mu\,\theta\Delta\tilde{\varepsilon}\right) \quad \text{éq 4.2-9}$$

$$\tau_{eq}^\theta = \left[\frac{2\mu\,\theta+(1-\theta)2\mu^-}{2\mu^-}\tilde{\boldsymbol{\tau}}^- + 2\mu\,\theta\Delta\tilde{\varepsilon}\right]_{eq} - 3\mu\,\theta\Delta p \quad \text{éq 4.2-10}$$

L'équation scalaire pour Δf est l'équation [éq 4.2-6] $\Phi_{vp}^\theta = 0$.

Remarque 1 :

Comme Δf est très faible dans la plus grande partie de la structure, il serait préférable d'utiliser Δp comme inconnue principale. Mais dans ce cas il n'est pas possible de se ramener à une équation scalaire, ce qui rend plus difficile l'emploi d'une méthode de type Newton. C'est aussi une des raisons pour lesquelles les équations [éq 1-1], [éq 3.2-6] et [éq 4.2-5] *n'ont pas été modifiées par l'introduction de la nucléation des cavités.*

Remarque 2 :

L'équation [éq 3.2-6] *peut être intégrée exactement :*

$$\mathrm{tr}\,\varepsilon^p = \frac{1}{A_1}\ln\left(\frac{1-f_0}{1-f}\right)$$

d'où :

$$\mathrm{tr}\,\Delta\varepsilon^p = \frac{1}{A_1\theta}\ln\left(\frac{1-f^-}{1-f^\theta}\right)$$

Comme le paramètre numérique A_1 peut être modifié de façon discontinue, la forme dérivée [éq 4.2-5] *a été conservée, y compris dans le calcul de la matrice tangente cohérente. Si l'utilisation du paramètre A_1 devait être abandonnée dans une version ultérieure, il faudrait envisager l'utilisation de la forme intégrée.*

Remarque 3 :

La forme intégrée $\Phi_{vp}^\theta = 0$ est utilisée, y compris en plasticité au lieu de la relation de consistance $\dot{F} = 0$ qui donne $\dot{p}$. La matrice tangente cohérente est calculée avec cette forme intégrée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Résolution de l'équation scalaire non linéaire

La résolution de l'équation $\Phi_{vp}^{\theta}(\Delta f)=0$ s'effectue par un algorithme de Newton à bornes contrôlées dans la routine LCROUS. $\Phi_{vp}^{\theta}(\Delta f)$ et sa dérivée par rapport à Δf sont calculées dans la routine RSLPHI appelée par LCROUS. Les valeurs initiales des bornes sont :

- borne inférieure : $\Delta f_1=0$ puisque $\Phi_{vp}^{\theta}(0)<0$ (on a vérifié au préalable que la branche élastique (seuil négatif) n'est pas solution),
- borne supérieure : Δf_2 tel que $\Phi_{vp}^{\theta}(0)>0$ cherchée par dichotomie entre 0 et $1-f^-$ (première valeur pour cette recherche : $\frac{1-f^-}{2}$).

L'algorithme de Newton débute avec la valeur $\Delta f=0$. Quelle que soit le valeur trouvée pour Δf on note donc pour la suite que la fonction $\Phi_{vp}^{\theta}(\Delta f)$ et sa dérivée par rapport à Δf sont au moins calculées pour $\Delta f=0$ et $\frac{1-f^-}{2}$.

Les développements effectués pour améliorer la convergence et la robustesse de l'algorithme sont décrits dans [bib5].

4.4 Expression de la matrice tangente du comportement

On donne ici l'expression de la matrice tangente (option FULL_MECA au cours des itérations de Newton, option RIGI_MECA_TANG pour la première itération).
Pour l'option RIGI_MECA_TANG, l'opérateur tangent est le même que celui qui relie $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ à $\boldsymbol{\sigma}$ dans [éq 3.2-2].
Pour l'option FULL_MECA, la matrice tangente est obtenue en linéarisant le système d'équations qui régit la loi de comportement : [éq 4.2-1] à [éq 4.2-6]. Il s'agit donc d'une matrice tangente *cohérente*.
Pour simplifier les expressions, on note dans ce paragraphe [§4.5] : Q pour Q^{θ} , les quantités étant toutes exprimées à l'instant $t^{\theta}=t^-+\theta\Delta t$. La matrice tangente cohérente est :

$$\frac{\delta\boldsymbol{\sigma}}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}=\rho\left[a_3\mathbf{II}+\mathbf{Id}\otimes\left(\frac{a_1-a_3}{3}\mathbf{Id}+a_2\tilde{\boldsymbol{\tau}}\right)+\tilde{\boldsymbol{\tau}}\otimes\left(a_4\tilde{\boldsymbol{\tau}}+\frac{a_5}{3}\mathbf{Id}\right)+\boldsymbol{\tau}\otimes\left(y_4\left(\frac{a_1}{3\mathrm{K}}-1\right)\mathbf{Id}+\frac{y_5}{\mathrm{K}}\tilde{\boldsymbol{\tau}}\right)\right] \quad \text{éq 4.4-1}$$

Cet opérateur est calculé dans la routine RSLJPL. Les coefficients sont calculés comme suit :

$$a_1=3\mathrm{K}+y_1K\tau_{eq}(z_7+z_2\theta\Delta p) \quad \text{éq 4.4-2}$$

$$a_2=\mu(y_1+y_3)\sigma_1 \quad \text{éq 4.4-3}$$

$$a_3=\frac{2\mu\tau_{eq}}{z_5} \quad \text{éq 4.4-4}$$

$$a_4=3\mu y_2x_2 \quad \text{éq 4.4-5}$$

$$a_5=3\mu y_1\sigma_1 \quad \text{éq 4.4-6}$$

$$a_6=3\mu K\theta\Delta p-a_2\tau_{eq}\sigma_1 \quad \text{éq 4.4-7}$$

$$y_1=-\frac{3Kz_6z_1(f+A_np)}{x_1\tau_{eq}} \quad \text{éq 4.4-8}$$

$$y_2=-\frac{3\mu}{x_1z_5\tau_{eq}^2} \quad \text{éq 4.4-9}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$y_3=-\frac{3Kz_6z_1A_n\theta\Delta p}{x_1\tau_{eq}} \quad \text{éq 4.4-10}$$

$$y_4=\frac{A_1z_8}{z_1}+\frac{z_9\sigma_1}{z_7+z_2\theta\Delta p} \quad \text{éq 4.4-11}$$

$$y_5=\frac{A_1a_2z_8}{z_1}-\frac{z_9a_6}{\tau_{eq}(z_7+z_2\theta\Delta p)} \quad \text{éq 4.4-12}$$

$$z_1=1+A_1\theta\Delta pD_1(f+A_np)\exp\left(\frac{\tau_m}{\sigma_1}\right) \quad \text{éq 4.4-13}$$

$$z_2=3\mu+R_{vp} \quad \text{éq 4.4-14}$$

$$z_3=K(f+A_np)z_1-A_1\sigma_1(1-f) \quad \text{éq 4.4-15}$$

$$z_4=R_{vp}\theta\Delta p-\tau_{eq} \quad \text{éq 4.4-16}$$

$$z_5=\tau_{eq}+3\mu\ \theta\Delta p \quad \text{éq 4.4-17}$$

$$z_6=D_1\exp\left(\frac{\tau_m}{\sigma_1}\right) \quad \text{éq 4.4-18}$$

$$z_7=z_6\sigma_1(f+A_np) \quad \text{éq 4.4-19}$$

$$z_8=\frac{1-f}{1-f-A_np} \quad \text{éq 4.4-20}$$

$$z_9=\frac{A_n}{1-f-A_np} \quad \text{éq 4.4-21}$$

$$x_1=z_3z_6(z_7+z_2\theta\Delta p)+z_1z_2\sigma_1-x_3 \quad \text{éq 4.4-22}$$

$$x_2=-z_3z_6\theta\Delta p(z_4+z_7)-z_1z_4\sigma_1+x_3\theta\Delta p \quad \text{éq 4.4-23}$$

$$x_3=A_nz_1z_6\sigma_1^2 \quad \text{éq 4.4-24}$$

$$R_{vp}=\frac{dR(p)}{dp}+\frac{1}{\theta\Delta t}\frac{dS(\Delta p/\Delta t)}{d\dot{p}} \quad \text{éq 4.4-25}$$

Pour le modèle plastique avec nucléation de cavités ‘ROUSSELIER_PR‘ et pour le modèle viscoplastique sans nucléation ‘ROUSSELIER_VISC‘, les équations simplifiées correspondantes sont obtenues à partir des équations ci-dessus en posant respectivement $R_{vp}=dR(p)/dp$ et $A_n=0$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Bibliographie

1) ROUSSELIER G. : “Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage”, in Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture, Ed. Nemat-Nasser, North Holland publishing company, pp. 331-355, 1981.

2) ROUSSELIER G. : “The Rousselier model for porous metal plasticity and ductile fracture”, in Handbook of Materials Behavior Models, Ed. J. Lemaitre, Academic Press, pp. 436-445, 2001.

3) ROUSSELIER G. : “Dissipation in porous metal plasticity and ductile fracture”, J. Mech. Phys. Solids, vol. 49, pp. 1727-1746, 2001.

4) BARBIER G. : “Modèle de Rousselier dans le *Code_Aster* : nouvelle implémentation”, note EDF R&D HT-2C/98/007/A, 1998.

5) MASSON R., ROUSSELIER G., BONNAMY M. : “Amélioration de la convergence et évolution de l’implémentation du modèle de Rousselier dans *Code_Aster*”, note EDF R&D HT-26/01/037/A, 2002.

6) MIALON P. : “Eléments d’analyse et de résolution numérique des relations de l’élasto-plasticité”, EDF, bulletin de la DER, série C mathématiques informatique, 3, pp. 57-89, 1986.

6 Fonctionnalités et vérification

Les lois de comportement décrites ici sont vérifiées par les tests suivants :

Pour ROUSS_VISC :

CENTE01	CENTENAIRE. Validation de POST_ELEM option WEIBULL	[V1.02.001]
SSNP117	Modèle de Rousselier en 2D - DP	[V6.03.117]

Pour ROUSS_PR :

CENTE01	CENTENAIRE. Validation de POST_ELEM option WEIBULL	[V1.02.001]
SSNP117	Modèle de Rousselier en 2D - DP	[V6.03.117]
SSNV103	Essai de traction cisaillement modèle de Rousselier	[V6.04.103]

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6	*G. ROUSSELIER, R. MASSON, G. BARBIER (EDF-R&D/MMC)*	Texte initial
10	R.BARGELLINI (EDF-R&D/AMA)	Modification au niveau de l'algo discrétisé pour prise en compte des changements de température

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)