Paramètres modaux et norme des vecteurs propres

Résumé :

Dans ce document, on décrit :
- les différentes possibilités dans *Code_Aster* pour normer les modes propres,
- les paramètres modaux importants associés aux modes propres.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Définition du problème aux valeurs propres....3
1.1 Généralités....3
1.2 Problème généralisé....3
1.3 Problème quadratique....4
2 Norme des modes propres du problème généralisé....5
2.1 Composantes d'un mode propre....5
2.2 Norme euclidienne....5
2.3 Norme "plus grande composante à 1"....6
2.4 Norme masse ou rigidité généralisée unitaire....6
3 Norme des modes propres du problème quadratique....7
3.1 Normes euclidienne et "plus grande composante à 1"....7
3.2 Norme masse ou rigidité généralisée unitaire....7
4 Paramètres modaux associés pour le problème généralisé....8
4.1 Grandeurs généralisées....8
4.1.1 Définition....8
4.1.2 Utilisation....9
4.2 Masses modales effectives et masses modales effectives unitaires....9
4.2.1 Masses modales effectives....9
4.2.2 Propriété....10
4.2.3 Masses modales effectives unitaires....10
4.2.4 Utilisation....10
4.2.5 Directions privilégiées dans Code_Aster....12
4.3 Facteurs de participation....12
4.3.1 Définition....12
4.3.2 Propriété....12
4.3.3 Utilisation....12
4.4 Vecteur déplacement unitaire....12
4.5 Cas particulier des facteurs de participations sur des modes eux-mêmes exprimés en coordonnées généralisées....13
4.5.1 Énergie cinétique....13
4.5.2 Cas du mouvement décrit sur une base de modes généralisés....14
5 Paramètres modaux associés pour le problème quadratique....14
6 Bibliographie....15
7 Description des versions du document....15

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Définition du problème aux valeurs propres

1.1 Généralités

Soit le problème aux valeurs propres suivant :

Trouver

$$(\lambda, \mathbf{\Phi}) \in \mathbb{C}\, x\, \mathbb{C}^n / \qquad \left(\lambda^2 \mathbf{B} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{A}\right)\mathbf{\Phi} = 0 \qquad \text{éq 1.1-1}$$

où $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B}$ sont des matrices réelles symétriques positives d'ordre n .

On distingue deux cas :

- problème quadratique : $\mathbf{C} \neq 0$,
- problème généralisé : $\mathbf{C} = 0$.

λ est appelé valeur propre et $\mathbf{\Phi}$ vecteur propre. Dans la suite, on parlera de mode propre pour $\mathbf{\Phi}$ et on introduira la notion de fréquence propre.

Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes sont disponibles dans *Code_Aster* et on renvoie le lecteur aux documents [R5.01.01] et [R5.01.02].

1.2 Problème généralisé

Le problème généralisé peut s'écrire sous la forme :

Trouver

$$(\lambda, \mathbf{\Phi}) \in \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}^n / \qquad \left(-\lambda^2 \mathbf{B} + \mathbf{A}\right)\mathbf{\Phi} = 0 \qquad \text{éq 1.2-1}$$

On introduit deux autres grandeurs qui permettent de caractériser le mode propre :

$$\lambda = \omega = (2\pi f) \qquad \text{éq 1.2-2}$$

où

ω : pulsation propre associée au mode propre $\mathbf{\Phi}$,
f : fréquence propre associée au mode propre $\mathbf{\Phi}$.

On montre également que les modes propres sont $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}^{iT}\, \mathbf{A}\, \mathbf{\Phi}^{j} = \delta_{ij}\, \mathbf{\Phi}^{iT}\, \mathbf{A}\, \mathbf{\Phi}^{i} \\ \mathbf{\Phi}^{iT}\, \mathbf{B}\, \mathbf{\Phi}^{j} = \delta_{ij}\, \mathbf{\Phi}^{iT}\, \mathbf{B}\, \mathbf{\Phi}^{i} \end{cases} \qquad \text{éq 1.2-3}$$

où $\left(\mathbf{\Phi}^{i}, \mathbf{\Phi}^{j}\right)$ sont deux modes propres.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Problème quadratique

Le problème quadratique [éq 1.1-1] peut se mettre sous une autre forme de taille double (on parle de réduction linéaire [R5.01.02]) :

Trouver

$$(\lambda, F) \in \mathbb{C}\, x\, \mathbb{C}^n / \qquad \left(\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} \lambda \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{éq 1.3-1}$$

On pose dans la suite : $\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$.

Comme les matrices $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B}$ sont réelles, les valeurs et modes propres sont imaginaires conjugués deux à deux.

On introduit trois autres grandeurs qui permettent de caractériser le mode propre :

$$\lambda = a + ib = -\frac{\xi \omega}{\sqrt{1-\xi^2}} + i\,\omega = -\frac{\xi(2\pi f)}{\sqrt{1-\xi^2}} + i(2\pi f) \qquad \text{éq 1.3-2}$$

où ω : pulsation propre associée au mode propre Φ,
f : fréquence propre associée au mode propre Φ,
ξ : amortissement réduit.

On montre également que les modes propres sont $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$ orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -\lambda_i \lambda_j \mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{B}\, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{j}} + \mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{A}\, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{j}} = \delta_{ij}(-\lambda_i^2 \mathbf{\Phi}^{iT} B\, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}} + \mathbf{\Phi}^{iT} A\, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}}) \\ (\lambda_i + \lambda_j)\mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{B}\, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{j}} + \mathbf{\Phi}^{iT} \mathbf{C}\, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{j}} = \delta_{ij}(2\lambda_i \mathbf{\Phi}^{iT} B\, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}} + \mathbf{\Phi}^{iT} C\, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}}) \end{cases} \qquad \text{éq 1.3-3}$$

où (λ_i, λ_j) sont les valeurs propres associées respectivement aux modes propres $(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}}, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{j}})$.

Remarque :

les modes propres ne sont donc pas $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ou $\mathbf{C}$ *orthogonaux.*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Norme des modes propres du problème généralisé

On suppose avoir calculé un couple $(\lambda, \mathbf{\Phi})$ solution du problème [éq 1.2-1] : λ est la valeur propre associée au mode propre $\mathbf{\Phi}$. On considère pour l'instant seulement le cas du problème généralisé.

Dans *Code_Aster*, la commande NORM_MODE [U4.52.11] permet d'imposer un type de normalisation pour l'ensemble des modes.

2.1 Composantes d'un mode propre

Soit un mode propre $\mathbf{\Phi}$ de composantes $\left(\mathbf{\Phi_j}\right)_{j=1,n}$.

Parmi ces composantes, on distingue :
- les composantes ou degrés de liberté appelés "physiques" (ce sont par exemple les degrés de liberté de déplacement (DX, DY, DZ), les degrés de liberté de rotation (DRX, DRY, DRZ), le potentiel caractérisant un fluide irrotationnel (PHI), ...),
- les composantes de Lagrange (les paramètres de Lagrange sont des inconnues supplémentaires qui sont rajoutées au problème "physique" initial afin que les conditions aux limites soient vérifiées [R3.03.01]).

Dans *Code_Aster*, on dispose de trois familles de normes :
- norme euclidienne,
- norme : "plus grande composante à 1" parmi un groupe de degrés de liberté défini,
- norme masse ou rigidité généralisée unitaire.

On les décrit successivement.

Auparavant, on définit L une famille d'indices qui contient m termes :

$$L=\left(l_k, k=1,m \text{ avec } 1\le l_k\le n\right) \text{ et } 1\le m\le n.$$

2.2 Norme euclidienne

On définit la norme suivante : $\|\mathbf{\Phi}\|_2=\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\mathbf{\Phi_{l_k}}\right)^2\right)^{1/2}$

On obtient alors le vecteur normé $\hat{\mathbf{\Phi}}$: $\hat{\mathbf{\Phi}}=\frac{1}{\|\mathbf{\Phi}\|_2}\mathbf{\Phi}$ $\qquad (\hat{\mathbf{\Phi}}_j=\frac{1}{\|\mathbf{\Phi}\|_2}\mathbf{\Phi}_j \qquad j=1,n)$.

Dans le *Code_Aster* , deux normes de cette famille sont disponibles :

- NORME='EUCL' : L correspond à l'ensemble des indices qui caractérisent un degré de liberté physique,
- NORME='EUCL_TRAN' : L correspond à l'ensemble des indices qui caractérisent un degré de liberté physique de déplacement en translation (DX, DY, DZ).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3 Norme "plus grande composante à 1"

On définit la norme suivante : $\|\Phi\|_\infty = \max_{k=1,m} |\Phi_{I_k}|$

On obtient alors le vecteur normé $\hat{\Phi}$: $\hat{\Phi} = \frac{1}{\|\Phi\|_\infty}\Phi \qquad (\hat{\Phi}_j = \frac{1}{\|\Phi\|_\infty}\Phi_j \qquad j=1,n).$

Dans *Code_Aster* , cinq normes de cette famille sont disponibles :

- NORME='SANS_CMP=LAGR' : L correspond à l'ensemble des indices qui caractérisent un degré de liberté physique,
- NORME='TRAN' : L correspond à l'ensemble des indices qui caractérisent un degré de liberté physique de déplacement en translation (DX, DY, DZ) ,
- NORME='TRAN_ROTA' : L correspond à l'ensemble des indices qui caractérisent un degré de liberté physique de déplacement en translation et en rotation $(DX, DY, DZ, DRX, DRY, DRZ)$,
- NORME='AVEC_CMP' ou 'SANS_CMP' : L est construit soit en prenant tous les indices qui correspondent à des types de composantes stipulés par l'utilisateur (par exemple le type déplacement suivant l'axe x : 'DX') (NORME='AVEC_CMP'), soit en prenant le complémentaire de tous les indices qui correspondent à des types de composantes stipulés par l'utilisateur (NORME='SANS_CMP'),
- NORME='NOEUD_CMP': L correspond à un seul indice qui caractérise une composante d'un nœud du maillage. Le nom du nœud et de la composante sont spécifiés par l'utilisateur (mots-clé NOM_CMP et NOEUD de la commande NORM_MODE [U4.52.11]).

Par défaut les modes sont normés avec la norme 'SANS_CMP=LAGR'.

2.4 Norme masse ou rigidité généralisée unitaire

Soit une matrice définie positive d'ordre n . On définit la norme suivante : $\|\Phi\|_E = \left(\Phi^T \mathbf{E} \Phi\right)^{1/2}$

On obtient alors le vecteur normé $\hat{\Phi}$: $\hat{\Phi} = \frac{1}{\|\Phi\|_\mathbf{E}}\Phi \qquad (\hat{\Phi}_j = \frac{1}{\|\Phi\|_\mathbf{E}}\Phi_j \qquad j=1,n).$.

Dans le *Code_Aster* , deux normes de cette famille sont disponibles :

- NORME='MASSE_GENE': $\mathbf{E}=\mathbf{B}$. Dans un problème classique de vibration, B est la matrice de masse.
- NORME='RIGI_GENE' : $\mathbf{E}=\mathbf{A}$. Dans un problème classique de vibration, A est la matrice de rigidité.

Remarque :

Pour un mode Φ de corps rigide, on a : $\|\Phi\|_E = \|\Phi\|_A = 0$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Norme des modes propres du problème quadratique

3.1 Normes euclidienne et "plus grande composante à 1"

Pour le problème quadratique, on dispose des mêmes normes que pour le problème généralisé. Les modes propres étant complexes, on travaille avec le produit hermitien. Les différentes normes "classiques" deviennent :

- norme hermitienne : $\|\mathbf{\Phi}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} |\mathbf{\Phi}_{\mathbf{l_k}}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\bar{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{l_k}} \mathbf{\Phi}_{\mathbf{l_k}} \right) \right)^{1/2}$ où $\bar{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{l_k}}$ est le conjugué de $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{l_k}}$ (la valeur absolue dans le domaine réel devient le module dans le domaine complexe),
- norme "plus grande composante à 1" : $\|\mathbf{\Phi}\|_\infty = \max_{k=1,m} |\mathbf{\Phi}_{\mathbf{l_k}}| = \max_{k=1,m} \left(\left(\bar{\mathbf{\Phi}}_{l_k} \mathbf{\Phi}_{\mathbf{l_k}} \right)^{1/2} \right)$.

3.2 Norme masse ou rigidité généralisée unitaire

En ce qui concerne la norme "masse ou rigidité généralisée", dénomination par analogie avec le problème généralisé, on utilise comme matrice associée à la norme, celle qui intervient dans l'écriture du problème quadratique mis sous la forme réduite [éq 1.3-1].

On a alors :

- norme masse généralisée :

$$\|\mathbf{\Phi}\|_{\hat{B}} = \left(\lambda \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}} \right) \hat{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = \left(\lambda \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = 2\lambda \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}} \mathbf{B} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}} \mathbf{C} \mathbf{\Phi},$$

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = \frac{1}{\|\mathbf{\Phi}\|_{\hat{\mathbf{B}}}} \mathbf{\Phi} \ ,$$

- norme rigidité généralisée :

$$\|\mathbf{\Phi}\|_{\hat{B}} = \left(\lambda \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}} \right) \hat{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = \left(\lambda \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}} \right) \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix} = -\lambda^2 \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}} \mathbf{B} \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}} \mathbf{A} \mathbf{\Phi},$$

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = \frac{1}{\|\mathbf{\Phi}\|_{\hat{\mathbf{A}}}} \mathbf{\Phi} \ .$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Paramètres modaux associés pour le problème généralisé

On se place dans le cas d'un problème généralisé classique de vibration. On a :

- $\mathbf{A}=\mathbf{K}$ est la matrice de rigidité,
- $\mathbf{B}=\mathbf{M}$ est la matrice de masse.

Soit un couple $(\lambda, \mathbf{\Phi})$ solution du problème :

$$\left(-\lambda^2 \mathbf{M}+\mathbf{K}\right)\mathbf{\Phi}=0 \qquad \text{éq 4-1}$$

Dans la suite, on définit successivement les grandeurs suivantes :

- grandeurs généralisées,
- masse modale effective et masse modale effective unitaire,
- facteur de participation.

4.1 Grandeurs généralisées

4.1.1 Définition

On définit deux grandeurs généralisées :

- Masse généralisée du mode $\mathbf{\Phi}$: $m_\Phi=\mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}$,
- Rigidité généralisée du mode $\mathbf{\Phi}$: $k_\Phi=\mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}$.

Ces quantités dépendent de la normalisation de F . Ces grandeurs sont accessibles dans le concept RESULTAT de type mode_meca sous les noms MASS_GENE, RIGI_GENE.

Remarque 1 :

On a la relation suivante entre la pulsation (ou la fréquence) du mode et la masse et rigidité généralisées du mode :

$$\lambda^2=\omega^2=(2\pi f)^2=\frac{\mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}}{\mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}}=\frac{k_\Phi}{m_\Phi} \ .$$

Remarque 2 :

Du point de vue physique, la masse généralisée (qui est une valeur positive) peut s'interpréter comme la masse en mouvement :

$m_\Phi=\mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}=\int \rho\,\mathbf{\Phi}^{\mathbf{2}}$ *où* ρ *est la densité de la structure.*

L'énergie cinétique de la structure vibrant selon le mode $\mathbf{\Phi}$ *est égale alors à :*

$$E_c=\frac{1}{2}\omega^2 m_\Phi=\frac{1}{2}\omega^2\mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi} \ .$$

L'énergie potentielle de déformation associée au mode $\mathbf{\Phi}$ *est égale à :*

$$E_p=\frac{1}{2}k_\Phi=\frac{1}{2}\mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi} \ .$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.1.2 Utilisation

Lors d'un calcul par recombinaison modale [R5.06.01], on cherche une solution de l'équation de la dynamique :

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{C}\,\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{K}\,\mathbf{x}=f(t)\ ,$$

sous la forme $x=\sum_{i=1,m}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{i}}(t)\,\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{i}}$ où $\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{i}}$ est le mode propre réel associé à la valeur propre λ_i, solution du problème généralisé (en général on a $m\leq n$ (n est le nombre de degré de liberté) car on ne prend en compte qu'une partie de la base modale) :

$$\left(-\mathbf{M}\lambda_i^2+\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{i}}=0$$

Le vecteur généralisé $\boldsymbol{\alpha}=\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{i}}\right)_{i=1,m}$ est solution de :

$\tilde{\mathbf{M}}\,\ddot{\boldsymbol{\alpha}}+\tilde{\mathbf{C}}\,\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\tilde{\mathbf{K}}\,\boldsymbol{\alpha}=\tilde{f}$ (problème d'ordre m) avec :

$$\tilde{\mathbf{M}}=\left(\tilde{\mathbf{M}}_{ij}\right)=\left(\boldsymbol{\Phi}^{iT}\,\mathbf{M}\,\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{j}}\right)\quad \tilde{\mathbf{C}}=\left(\tilde{\mathbf{C}}_{ij}\right)=\left(\boldsymbol{\Phi}^{iT}\,\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{j}}\right)$$
$$\tilde{\mathbf{K}}=\left(\tilde{\mathbf{K}}_{ij}\right)=\left(\boldsymbol{\Phi}^{iT}\,\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{j}}\right)\quad \tilde{f}=\left(\tilde{f}_{i}\right)=\left(\boldsymbol{\Phi}^{iT}\,f\right)\ .$$

Les modes de vibration du problème généralisé sont $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ orthogonaux [R5.01.01]. Les matrices $\tilde{\mathbf{M}}$ et $\tilde{\mathbf{K}}$ sont alors diagonales et sont constituées des rigidités et masses généralisées de chaque mode. La matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ est habituellement pleine si on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires sur $\mathbf{C}$ [R5.05.04].

4.2 Masses modales effectives et masses modales effectives unitaires

4.2.1 Masses modales effectives

Soit $\mathbf{U_d}$ un vecteur unitaire dans la direction d . En chaque nœud du vecteur $\mathbf{U_d}$ ayant les composantes de déplacement $(DX\,,DY\,,DZ)$ on a :

$\left(\mathrm{DX}=x_d\,,\mathrm{DY}=y_d\,,\mathrm{DZ}=z_d\right)$ où $\left(x_d\,,y_d\,,z_d\right)$ sont les cosinus directeurs de la direction d (on a donc : $x_d^2+y_d^2+z_d^2=1$).

Par exemple, si d est la direction x , le vecteur $\mathbf{U_d}$ a toutes ses composantes DX égales à 1 et ses autres composantes égales à 0.

On définit les masses modales effectives dans la direction d par :

$$m_{\Phi,d}=\frac{\left(\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{M}\,\mathbf{U_d}\right)^2}{\left(\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{M}\,\boldsymbol{\Phi}\right)}\ .$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.2.2 Propriété

Énoncé :

La somme des masses modales effectives dans une direction d est égale à la masse de la structure suivant cette direction. Cela s'écrit :

$\sum_{i=1,n} \frac{\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{iT}}\mathbf{M}\,\mathbf{U}_{\mathbf{d}}\right)^2}{\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{iT}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}}\right)} = \sum_{i=1,n} m_{\Phi^i,d} = \mathbf{U}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\,\mathbf{U}_{\mathbf{d}} = m_{totale,d}$ où n est le nombre total de modes associés au problème [éq 4-1]

Remarque :

Dans la majorité des cas, la masse est isotrope. La relation précédente se met alors sous la forme suivante :

$\sum_{i=1,n} \frac{\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{iT}}\mathbf{M}\,\mathbf{U}_{\mathbf{d}}\right)^2}{\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{iT}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}}\right)} = \sum_{i=1,n} m_{\Phi^i,d} = m_{totale,d} = m_{totale}$ *où* m_{totale} *est la masse de la structure*

4.2.3 Masses modales effectives unitaires

En utilisant la propriété précédente, on définit les masses modales effectives unitaires dans la direction d :

$$\tilde{m}_{\Phi^i,d} = \frac{m_{\Phi^i,d}}{m_{totale,d}},$$

et on a : $\sum_{i=1,n} \tilde{m}_{\Phi^i,d} = 1$.

Les masses modales $\tilde{m}_{\Phi^i,d}$ et $m_{\Phi^i,d}$ sont indépendantes de la normalisation du mode Φ^i de vibration.

4.2.4 Utilisation

Relation "empirique" :

Lors d'une étude "sollicitation sismique d'une structure dans une direction d " par une méthode de recombinaison modale, on doit conserver les modes de vibration qui ont une masse effective unitaire importante et il est d'usage en France de considérer qu'on a une bonne représentation modale si pour l'ensemble des modes conservés on a :

$$\sum_{i=1,n} \tilde{m}_{\Phi^i,d} \geq 0{,}9$$

Cette relation empirique est par exemple énoncée dans le RCC-G (Règles de conception et de construction applicables au Génie Civil).

Remarque :

La somme des masses modales effectives vaut en fait la masse totale qui travaille sur la base modale choisie. Autrement dit, cette masse totale travaillante vaut la masse totale moins les contributions en masse qui sont portées par des degrés de liberté encastrés (qui ne travaillent donc pas sur la base modale). Ainsi, par exemple, sur un système à 1 degré de liberté masse-ressort avec une masse $M1$ au sommet et une autre masse $M2$ au niveau

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

du radier, alors la masse travaillante vaudra $M1$ et la masse totale $M1+M2$. Par suite, la masse modale effective unitaire pour le seul mode du système vaudra $M1/(M1+M2)$. Le cumul total aura donc la même valeur et, suivant le ratio en $M1$ et $M2$, on ne pourra donc pas forcément atteindre 90 % de la masse totale $(M1+M2)$, même en considérant tous les modes (on n'a qu'un seule mode sur cet exemple). En pratique, plus le modèle aux éléments finis sera fin et réaliste, plus l'écart entre la masse travaillante et la masse totale sera faible.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.2.5 Directions privilégiées dans *Code_Aster*

Dans *Code_Aster*, on dispose de trois directions qui sont celles du repère de définition du maillage :

- d = direction X,
- d = direction Y,
- d = direction Z.

Les masses modales effectives et les masses modales effectives unitaires sont accessibles dans le concept RESULTAT de type mode_meca sous les noms MASS_EFFE_DX, MASS_EFFE_DY, MASS_EFFE_DZ, MASS_EFFE_UN_DX, MASS_EFFE_UN_DY, MASS_EFFE_UN_DZ.

4.3 Facteurs de participation

4.3.1 Définition

On définit d'autres paramètres appelés facteur de participation :

$$p_{F,d}^{i}=\frac{\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{iT}}\mathbf{M}\mathbf{U}_{\mathbf{d}}\right)}{\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{iT}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}}\right)}\ .$$

Ce paramètre dépend de la normalisation du mode de vibration $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}}$.

Comme pour les masses effectives, on dispose de trois directions d qui sont celles du repère de définition du maillage.

Les facteurs de participation sont accessibles dans le concept RESULTAT de type mode_meca sous les noms FACT_PARTICI_DX, FACT_PARTICI_DY, FACT_PARTICI_DZ.

4.3.2 Propriété

Énoncé :

Les facteurs de participation associés à une direction d vérifient la relation suivante :

$$m_{totale}=\sum_{i=1,n}\frac{\left(\mathbf{\Phi}^{iT}\mathbf{M}\mathbf{U}_{\mathbf{d}}\right)^{2}}{\left(\mathbf{\Phi}^{iT}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}}\right)}=\sum_{i=1,n}\left(\frac{\mathbf{\Phi}^{iT}\mathbf{M}\mathbf{U}_{\mathbf{d}}}{\mathbf{\Phi}^{iT}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}}}\right)^{2}\left(\mathbf{\Phi}^{iT}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}^{\mathbf{i}}\right)=\sum_{i=1,n}\left(p_{\Phi^{i},d}\right)^{2}m_{\Phi^{i}}$$ où n est le nombre total de modes associés au problème [éq 4-1].

Ce résultat s'obtient facilement en exprimant le facteur de participation en fonction de la masse modale effective et en utilisant le résultat énoncé au [§ 4.2.3].

4.3.3 Utilisation

Ces paramètres sont utilisés en particulier pour calculer la réponse d'une structure soumise à un séisme par méthode spectrale. On renvoie le lecteur au document [R4.05.03].

4.4 Vecteur déplacement unitaire

Dans ce qui précède, on a considéré un vecteur de déplacement unitaire $\mathbf{U}_{\mathbf{d}}$ qui ne concerne que les degrés de liberté de translation $(DX\ ,DY\ ,DZ)$. Cette notion peut être étendue aux rotations en considérant la définition suivante. On définit une matrice $\mathbf{U}$ de dimension $(n\times 6)$. Si tous les nœuds du maillage supportent 3 degrés de liberté de translation et 3 autres de rotation, la matrice $\mathbf{U}$ est formée de l'empilement des matrices $\mathbf{u}_{trd}^{\mathbf{k}}(6\times 6)$ suivantes (l'indice k correspond au nœud de numéro k) :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{u}_{tr}^{k}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \left(z_k-z_c\right) & -\left(y_k-y_c\right) \\ 0 & 1 & 0 & -\left(z_k-z_c\right) & 0 & \left(x_k-x_c\right) \\ 0 & 0 & 1 & \left(y_k-y_c\right) & -\left(x_k-x_c\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $\left(x_k, y_k, z_k\right)$ sont les coordonnées du nœud et $\left(x_c, y_c, z_c\right)$ sont les coordonnées du centre instantané de rotation.

On peut donc définir des masses modales effectives, des facteurs de participation associés à des degrés de liberté de rotation.

Pour l'instant, le calcul de ces paramètres n'est pas disponible dans Code_Aster.

4.5 Cas particulier des facteurs de participations sur des modes eux-mêmes exprimés en coordonnées généralisées

Il existe des cas où les modes sont exprimés en fonction d'une première base modale. Un exemple est la calcul des masses ajoutées fluides sur une base modale en air, technique classique dans Code_Aster. Si on veut alors calculer les paramètres tels que les facteurs de participation modale ou les masses modales effectives, utiles en particulier pour les calculs sismiques, on n'a alors pas accès aux vecteurs de déplacement unitaire. Les facteurs de participation modale de la base modale initiale jouent alors le rôle des vecteurs de déplacement unitaire. Cette démarche est expliquée dans le présent paragraphe.

4.5.1 Énergie cinétique

$T=\frac{1}{2}V^t M V$ où V vitesse des points de la structure et M matrice de masse de la structure.

Description du mouvement décomposé sur la base des modes de la structure :

$$V=\sum_i \dot{q}_i \varphi_i$$

Calcul en mouvement relatif par rapport au sol :

$V=\sum_i \dot{q}_i \varphi_i+\dot{s}\, D$ où s est la position du sol et D la direction du séisme.

D'où l'énergie cinétique de la structure exprimée dans le repère du sol :

$$T=\frac{1}{2}V^t M V=\frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j+\dot{s}\sum_i \dot{q}_i \varphi_i^t M D$$ (en utilisant la symétrie de M)

Contribution de l'énergie cinétique aux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)=m_i\ddot{q}_i+\ddot{s}\,\varphi^t M D$$

On en déduit l'expression du facteur de participation modale :

$$d_i=\frac{\varphi^t M D}{m_i}$$

Et par définition la masse modale est donnée par :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$me_i = m_i d_i^2$$

4.5.2 Cas du mouvement décrit sur une base de modes généralisés

On peut écrire la vitesse de la structure sur la nouvelle base :
$V = \sum_i \dot{Q}_i \Phi_i$

avec des modes généralisés Φ_i définis sur la première base modale $\Phi_i = \sum_k \psi_{ik} \varphi_k$

N.B. : ces modes peuvent décrire une déformée modale différentes des modes initiaux.

$\tilde{M}$ est la matrice de masse généralisée exprimées sur Φ_i, pas systématiquement la projection de M ; par exemple dans le cas d'un système avec masse ajoutée : $\tilde{M} = M + M_a$

Contribution du mouvement d'entraînement aux équations d'Euler-Lagrange :
$\ddot{s} \Phi_i^t \tilde{M} D = \ddot{s} \sum_k \psi_{ik} \varphi_k^t \tilde{M} D$

Or $D = \sum_j d_j \varphi_j$ où le vecteur $[d]$ est le vecteur des facteurs de participation de la base modale $[\varphi]$

Donc $\ddot{s} \Phi_i^t \tilde{M} D = \ddot{s} \sum_k \psi_{ik} \varphi_k^t \tilde{M} \sum_j d_j \varphi_j = \ddot{s} \sum_{kj} \psi_{ik} \varphi_k^t \tilde{M} \varphi_j d_j = \ddot{s} [\psi_i]^t [\varphi^t \tilde{M} \varphi][d]$

D'où, par identification, le facteur de participation du mode généralisé Φ_i :

$\tilde{d}_i = \frac{[\psi_i]^t [\varphi^t \tilde{M} \varphi][d]}{\tilde{m}_i}$ où $\tilde{m}_i$ est la masse modale du mode généralisé.

5 Paramètres modaux associés pour le problème quadratique

On écrit le problème quadratique sous la forme : $\left(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}\right) \mathbf{\Phi} = 0$.

Pour le problème quadratique, on ne calcule que trois paramètres qui correspondent aux grandeurs généralisées suivantes :

- masse généralisée (quantité réelle) : $m_\Phi = \bar{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \mathbf{\Phi}$,
- rigidité généralisée (quantité réelle) : $k_\Phi = \bar{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}} \mathbf{K} \mathbf{\Phi}$,
- amortissement généralisé (quantité réelle) : $c_\Phi = \bar{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}} \mathbf{C} \mathbf{\Phi}$.

Attention, si on norme le mode propre avec la norme "masse généralisée", on n'a pas dans le cas quadratique : $m_\Phi = 1$. On peut faire la même remarque concernant la rigidité généralisée.

En utilisant les relations d'orthogonalité et le fait que les éléments propres apparaissent par paires conjuguées, on peut écrire les relations suivantes :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\bar{\Phi}^T C \Phi}{\bar{\Phi}^T M \Phi} = \frac{c_\Phi}{m_\Phi} = 2\,\mathrm{Re}(\lambda) = -\frac{2\xi\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{2x(2\pi f)}{\sqrt{1-\xi^2}},$$
$$\frac{\bar{\Phi}^T K \Phi}{\bar{\Phi}^T M \Phi} = \frac{k_\Phi}{m_\Phi} = |\lambda|^2 = \frac{\omega^2}{1-\xi^2} = \frac{(2\pi f)^2}{1-\xi^2}.$$

6 Bibliographie

1) J.R. LEVESQUE, L. VIVAN, Fe WAECKEL : Réponse sismique par méthode spectrale [R4.05.03].

2) D. SELIGMANN, B. QUINNEZ : Algorithmes de résolution pour le problème généralisé [R5.01.01].

3) D. SELIGMANN, R. MICHEL : Algorithmes de résolution pour le problème quadratique [R5.01.02].

4) Opérateur NORM_MODE [U4.52.11].

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
01/04/00	*B. QUINNEZ J.R. LEVESQUE (EDF/IMA/MMN)*	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)