Identification d'efforts sur un modèle modal

Résumé :

La macro-commande CALC_ESSAI rassemble les fonctionnalités de Code_Aster pour la corrélation calcul-essais. On décrit dans le cadre de cette documentation la fonctionnalité « identification d'efforts », qui doit permettre d'identifier les efforts appliquer à une structure sous la forme d'un inter-spectre, à partir de la donnée de l'inter-spectre de mesures en fonctionnement, d'un modèle modal, identifié ou calculé, et du choix de la localisation des points d'application des efforts.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction, hypothèses de calcul....3
1.1 Position du problème....3
1.2 Hypothèse de comportement modal....3
2 Modélisation et calcul des forces....3
2.1 Modélisation sur base modale, observabilité et commandabilité....3
2.1.1 Résolution du problème inverse....4
3 Références....5
4 Historique des versions du document....5

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction, hypothèses de calcul

Cette documentation décrit les méthodes utilisées dans la macro CALC_ESSAI.

1.1 Position du problème

On considère une structure, qui constitue un système dynamique que l'on suppose **linéaire (hypothèse H1).**

On suppose que cette structure est soumise à une excitation supposée aléatoire (exemple type : efforts fluides turbulents), mais qu'on peut parfaitement décrire à l'aide de sa DSP (densité spectrale de puissance, voir le document « Modélisation des excitations turbulentes » R4.07.02, section 2.1). Cette vibration est mesurée en un certain nombre de points d'abscisses $x_k(1 \leq k \leq nmes)$. Les efforts appliqués sur la structure ne sont, quant à eux, pas mesurables. On souhaite donc retrouver les efforts à partir de la mesure. Il s'agit d'un problème inverse, pour la résolution duquel il est nécessaire de prendre beaucoup de précautions afin d'obtenir un résultat qui, s'il n'est pas exact, est néanmoins pertinent.

1.2 Hypothèse de comportement modal

La structure est supposée linéaire (H1), on peut donc décrire son comportement mécanique sur base modale. Chaque mode i de la structure, est défini par les paramètres suivants :

- ω_i : pulsation propre, f_i fréquence propres associée,
- ξ_i : amortissement réduit,
- m_i : masse modale,
- $\varphi_i(\underline{x})$: déformée modale.

L'écoulement exerce sur la structure une force $f(\underline{x},t)$. On suppose que ces efforts sont appliqués dans une direction. On traitera les deux directions de mesure séparément, en supposant que celles-ci ne sont pas couplées.

Déplacement sur base modale : on suppose que le mouvement de la structure est assez bien décrit par ses N premiers modes :

$$u(\underline{x},t) \approx \sum_{i=1}^{N} q_i(t).\varphi_i(\underline{x})$$

Les coordonnées généralisées vérifient alors les équations découplées :

$$m_i\left(\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_{i^2}q_i\right) = \int_0^L \varphi_i(\underline{x}) f(\underline{x},t)\,dx = Q_i(t) \Leftrightarrow m_i\left(-\omega^2 q_i + 2\xi_i\omega_i\omega q_i + \omega_i^2 q_i\right) = Q_i(\omega),\ 1 \leq i \leq N$$

2 Modélisation et calcul des forces

2.1 Modélisation sur base modale, observabilité et commandabilité

La linéarité supposée du comportement de la structure permet la décomposition du modèle sur base modale :

$$\underline{y} = \underline{\underline{C\Phi}}.\underline{\underline{Z^{-1}}}.\underline{\underline{\Phi^T B}}.\underline{f}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En utilisant la notion d'inter-spectre, privilégiée dans la macro[1] :

$$\underline{\underline{S_{yy}}} = \underline{\underline{C\Phi}} \cdot \underline{\underline{Z^{-1}}} \cdot \underline{\underline{\Phi^T B}} \cdot \underline{\underline{S_{ff}}} \cdot \underline{\underline{\Phi^T B}}^H \cdot \underline{\underline{Z^{-1}}} \cdot \underline{\underline{C\Phi}}^H \quad (1)$$

$\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont les matrices d'observabilité et de commande. $\underline{\underline{C}}$ permet de projeter un champ défini sur un modèle, sur un champ plus restreint de capteurs. $\underline{\underline{B}}$ projette ce même champ sur les points d'application des efforts. Les matrices $\underline{\underline{C\Phi}}$ et $\underline{\underline{\Phi^T B}}$ sont les matrices de déformées modales définies sur un maillage capteur et sur un maillage de commande. Elles peuvent être obtenues avec l'opérateur **PROJ_CHAMP** ou avec l'opérateur **OBSERVATION**, qui permet, en plus du précédent, de définir pour chaque noeud ou groupe de noeud des directions non mesurées, ou de définir des repères locaux.

$\underline{\underline{Z}}$ est la matrice d'impédance $diag\left(-\omega^2 + 2j\,\xi_i\,\omega_i\,\omega + \omega_i^2\right)_{1\le i\le N}$ associée à la base des déformées modales $\underline{\underline{\Phi}}$. Cette base est en général définie sur un modèle de bonne qualité. Une base de bonne qualité doit en effet posséder des paramètres modaux proches de la réalité. Les déformées doivent également être proches de la réalité, et de plus être suffisamment régulières. Ainsi, une base de déformées expérimentale est définie sur un nombre réduit de capteurs, et est donc peu régulière (on risque d'avoir une résolution du problème inverse problématique). On lui préférera la base de déformées d'un modèle numérique recalé, ou, mieux encore, une base expérimentale étendue sur modèle numérique. On précise ce point ci-dessous.

Remarque sur l'expansion modale
On possède une base modale $\left(f_i, \xi_i, m_i, \underline{\varphi}_{\exp i}\right)$ expérimentale. Les paramètres modaux sont supposés identifiés avec une bonne approximation, mais les déformées, de bonne qualité, ne sont définies que sur un nombre restreint de capteurs. On tente donc d'étendre cette base de déformées sur un modèle numérique qui soit assez représentatif de la structure (mais pas forcément recalé). La base d'expansion peut être la base des modes du modèle numérique (obtenue avec CALC_MODES). Réaliser une expansion modale signifie donc trouver le vecteur de paramètres généralisés η minimisant :

$$\left\| \underline{\varphi}_{\exp i} - \underline{\underline{\Phi}}_{num} \cdot \underline{\eta} \right\|^2$$

L'onglet « corrélation » de **CALC_ESSAI**, permet de réaliser cette expansion, grâce à l'utilisation de **PROJ_MESU_MODAL**. Pour plus de détails sur le principe de l'expansion, on se reportera à la documentation de **PROJ_MESU_MODAL** (U4.73.01).

2.1.1 Résolution du problème inverse

L'équation (1) du problème direct, peut, sous certaines conditions, être inversée :

$$\underline{\underline{S_{ff}}} = \underline{\underline{\Phi^T B}}^{\oplus} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{C\Phi}}^{\oplus} \cdot \underline{\underline{S_{yy}}} \cdot \underline{\underline{C\Phi}}^{H^{\oplus}} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{\Phi^T B}}^{H^{\oplus}}$$

Les matrices $\underline{\underline{C\Phi}}$ et $\underline{\underline{\Phi^T B}}$ étant rectangulaires, le signe $\oplus$ désigne leur pseudo-inverse de Moore Penrose. Ce pseudo inverse peut être obtenu par l'utilisation d'un algorithme de SVD (Singular Value Decomposition, cf doc R6.03.01). Dans **CALC_ESSAI**, deux possibilités de régularisation sont disponibles :

1La notion d'inter-spectre, ou de DSP, permet de décrire des phénomènes aléatoires. Pour un phénomène déterministe, $\underline{\underline{S_{yy}}} = \underline{y} \cdot \underline{y}^H$, où H désigne l'opérateur hermitien. Pour un signal aléatoire, $\underline{\underline{S_{yy}}}$ contient, sur sa diagonale, les puissances spectrales (auto-spectres) et sur ses termes extra-diagonaux, les corrélations entre les signaux. Par exemple, dans le cas d'un effort fluide appliqué sur une structure filaire, on imagine aisément que les tourbillons créés à la base ont tendance à se propager le long de la structure. Les termes extra-diagonaux décrivent donc cette propagation avec la phase (voir R4.07.02 pour plus de détails).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1) troncature des petites valeurs singulières : on note σ_{max} , la plus grande valeur singulière. La SVD consiste à fixer pour toutes les valeurs singulières inférieures à $\varepsilon \sigma_{max}$, pour ε donné, la valeur 0. Elles ne sont donc pas prises en compte dans le calcul inverse. La troncature élimine des informations sur les matrices à inverser, mais améliore le conditionnement ;
2) régularisation de Tikhonov : l'inverse de la matrice des valeurs singulières ne vaut pas $diag\left(\frac{1}{s_i}\right)_{1\le i\le N}$ mais $diag\left(\frac{s_i}{s_{i^2}+\alpha}\right)_{1\le i\le N}$. Le paramètre α est appelé paramètre de Tikhonov, et permet de limiter la divergence de la solution inverse.

Dans **CALC_ESSAI**, on calcule successivement les inter-spectres :

- des déplacements généralisés (inversion de $\underline{\underline{C\Phi}}$),
- des déplacements physiques reconstitués (pour vérification de la qualité de l'inversion),
- des efforts généralisés (multiplication par la matrice d'impédance),
- des efforts physiques (inversion de $\underline{\underline{\Phi^T B}}$),
- des efforts généralisés reconstitués (pour vérification)
- des déplacements physiques par synthèse sur base modale.

Un bon critère de la qualité des résultats de l'inversion peut être la comparaison entre les déplacements mesurés, et ceux reconstitués sur la même base modale qui a servi à l'inversion (matrice d'impédence, et matrices de déformées modales).

3 Références

[1] L. Perotin, R. Nhili, *Logiciel MEIDEE version 2.1 : note de principe* . Note EDF/R&D HT-32/92/014/B.

[2] S. Granger, *Logiciel MEIDEE Version 2.1 : Documentation informatique* . Note EDF/R&D HT-32/92-15/A.

[3] C. Raynaud, *Identification des spectres d'excitation fluides turbulentes sur la maquette BECASSINE à* partir des essais modes crayon pour les configurations AFAG2G – 4 grilles et ENUSA Westinghouse V5H – 4grilles. Note EDF/R&D HI-86/03/030/A.

[4] C. Bodel, *Identification d'efforts fluides appliqués à un tube de grappe de commande, modèle EPR. Méthodologie et résultats* . Note EDF/R&D H-T61-2007-02808-FR.

[5] A. Adobes, *Modélisation des excitations turbulentes*. Documentation Code_Aster R4.07.02.

4 Historique des versions du document

Indice doc	Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
A	9.4	C.BODEL EDF/R&D/MMN	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)