Calcul de matrice de masse ajoutée sur base modale

Résumé :

Ce document présente un aspect du couplage fluide/structure : lorsqu'une structure vibrante se trouve baignée par un fluide qu'on suppose sans écoulement, incompressible et non visqueux, elle ressent des forces de pression dont la résultante est proportionnelle à l'accélération de la structure dans le fluide : le coefficient de proportionnalité est homogène à une masse : on l'appelle **masse ajoutée**. On précise ici le moyen de construire une matrice de masse ajoutée pour une (ou des) structure(s) à plusieurs degrés de liberté sur la base modale de la (des) structure(s) établie au préalable en absence de fluide. Cette matrice de masse ajoutée est obtenue dans l'hypothèse de petits mouvements tant pour la structure que pour le fluide.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Notations....3
2 Introduction....3
3 Rappels des équations du problème....4
3.1 Équations dans le fluide....4
3.2 Équations dans les structures....5
3.3 Équations du problème couplé - mise en évidence de la matrice de masse ajoutée....5
3.4 Quelques définitions....7
3.4.1 Définition 1....7
3.4.2 Définition 2....7
3.4.3 Définition 3....7
3.5 Propriétés de la matrice de masse ajoutée....7
3.5.1 Théorème 1 : la matrice de masse ajoutée est symétrique..7
3.5.2 Théorème 2 : la matrice de masse ajoutée est définie positive....8
3.5.3 Théorème 3....8
3.5.4 Autres propriétés....9
4 Mise en œuvre numérique....9
4.1 Résolution de l'équation de Laplace par éléments finis de volume....9
4.2 Calcul des coefficients de la matrice de masse ajoutée sur base modale....10
5 Mise en œuvre dans Code_Aster....11
5.1 Analogie thermique....11
5.2 Mise en œuvre pratique....12
6 Bibliographie....12
7 Description des versions du document....12

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notations

p	la pression fluctuante dans le fluide,
γ_l^{fs}	contour de la structure indexée par l baignée par le domaine fluide
$\ddot{x}_{s_l}$	le champ des déplacements dans la structure l,
ρ_f, ρ_s	la masse volumique du fluide, de la structure,
$\mathbf{X}_{il}$	le mode propre d'ordre i de la structure l en air
a_{il}, $\dot{a}_{il}$, $\ddot{a}_{il}$	les coordonnées, vitesses, accélérations généralisées relatives au mode i de la structure l en air
$\mathbf{\sigma}$	le tenseur des contraintes dans la structure
$\mathbf{\Phi}$	le vecteur de flux fluide
$\mathbf{H}$	la matrice de rigidité du fluide
$\mathbf{v}$	le champ des vitesses fluctuantes fluides
$\mathbf{n}$	la normale intérieure du domaine fluide.

2 Introduction

De nombreux composants industriels ou ouvrages se trouvent au contact de milieux fluides, qui de plus peuvent être en écoulement. Ces milieux fluides environnants perturbent les caractéristiques vibratoires des structures, notamment leurs caractéristiques modales. Cette action du fluide sur la structure se traduit par des effets de couplage fluide/structure.

On suppose ici le milieu fluide environnant incompressible, parfait et au repos (sans écoulement). On va montrer qu'alors, une structure qui vibre avec une petite amplitude en partageant une frontière avec ce domaine fluide modifie le champ de pression dans le fluide au repos, et ressent donc une force de pression fluctuante, proportionnelle à son accélération. Le coefficient de proportionnalité est une masse. Elle décrit l'effet inertiel du fluide sur la structure : c'est pourquoi on nomme cette masse **masse ajoutée** du fluide sur la structure.

Le domaine fluide peut aussi posséder des frontières fixes ou des surfaces libres, mais dans ce qui suit, on ne considérera pas l'action de la pesanteur sur la surface libre, donc pas les modes de ballottement.

Lorsque plusieurs structures sont en contact d'un même domaine fluide, lorsqu'une des structures se met à vibrer, non seulement elle ressent l'inertie du fluide, mais elle modifie le champ de pression fluctuante autour des interfaces avec le fluide de toutes les autres structures. Les efforts que chacune ressent sont proportionnels à l'accélération de la structure vibrante : là encore les coefficients de proportionnalité sont des masses appelées **masses ajoutées de couplage**.

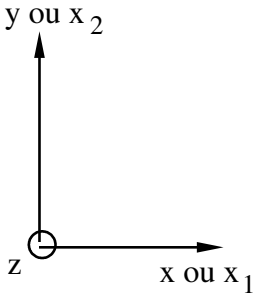
Les masses ajoutées sont établies dans la base des modes propres des structures considérées en absence de fluide. On peut ensuite ré-effectuer l'analyse modale des structures en tenant compte de ces masses ajoutées, puis éventuellement revenir dans la base des éléments finis (base « physique »).

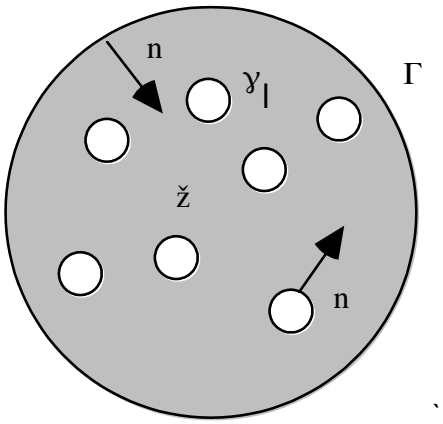
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Rappels des équations du problème

3.1 Équations dans le fluide

On suppose que K structures vibrantes sont baignées dans un domaine fluide parfait (non visqueux), incompressible et au repos (sans écoulement). On néglige l'effet de la pesanteur. On peut donc écrire les équations d'Euler associées aux fluctuations dans le fluide sans écoulement :





- conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + div(\rho_f \mathbf{v}) = 0 \qquad \text{éq 3.1-1}$$

- conservation de la quantité de mouvement (en hypothèse linéarisée) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v} + \frac{1}{\rho_f}\mathbf{grad}\ p = \mathbf{0} \qquad \text{éq 3.1-2}$$

Du fait de l'incompressibilité du fluide, l'équation [éq 3.1-1] devient :

$$div\ \mathbf{v} = 0 \qquad \text{éq 3.1-3}$$

Dans le volume Ω_f du fluide, on néglige la convection induite par le mouvement supposé de faible amplitude de la structure. L'équation [éq 3.1-2] devient donc :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f}\mathbf{grad}\ p = \mathbf{0} \qquad \text{éq 3.1-4}$$

En dérivant [éq 3.1-3] par rapport au temps et en reportant l'expression de $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ en fonction de la pression dans cette équation, on obtient :

$$\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\ p = 0$$

soit :

$$\Delta p = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_f$$

qui est l'équation de Laplace dans un fluide sans écoulement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

À l'interface fluide/structure, supposé étanche, on peut écrire que l'accélération normale de la paroi de la structure est égale à l'accélération normale du fluide (continuité des accélérations normales - condition d'imperméabilité de la structure). On utilise ici la convention suivante pour la normale : il s'agit de la normale **extérieure** à la structure, **orientée de la structure vers le fluide.**

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.\mathbf{n}=\ddot{\mathbf{x}}_{S_l}.\mathbf{n}$$

Avec l'équation [éq 3.1-4], on obtient :

$$\mathbf{grad}\ p.\mathbf{n}=-\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.\mathbf{n}=-\rho_f \ddot{\mathbf{x}}_{S_l}.\mathbf{n}$$

Soit :

$\left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\gamma_l^{fs}}=-\rho_f \ddot{\mathbf{x}}_{S_l}.\mathbf{n}$ sur γ_l^{fs}, interface fluide/structure de la structure indexée par l.

En résumé, le problème fluide consiste à résoudre une équation de Laplace dans le domaine fluide avec des conditions aux limites de type von Neumann sur les parois mobiles Γ_{fs} et fixes Γ_{fix} et des conditions de Dirichlet sur la surface libre Γ_{lib} :

$$\begin{cases} \Delta p=0 \ \text{ dans } \ \Omega_f \\ \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\Gamma_{fs}}=-\rho_f \ddot{\mathbf{x}}_s.\mathbf{n} \ \text{ sur } \ \Gamma_{fs},\ \Gamma_{fs}=\underset{l=1,K}{\cup}\gamma_l \\ \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\Gamma_{imp}}=0 \ \text{ sur } \ \Gamma_2,\ \Gamma_2=\partial\Omega_f-\Gamma_{fs} \end{cases} \qquad \text{éq 3.1-5}$$

3.2 Équations dans les structures

Considérons K structures élastiques baignées par un milieu fluide. L'équation de leur mouvement en présence de fluide s'écrit, ayant noté $\mathbf{U}$ leurs degrés de liberté :

$$\begin{cases} \forall l \ \text{ indice de structure}, l\in\{0,\dots,K\},\ \mathbf{M}_l.\ddot{\mathbf{U}}_l+\mathbf{K}_l.\mathbf{U}_l=\mathbf{F}_l \ \text{ dans } \ \Omega_{S_l}, \text{volume de la structure } l \\ \forall l, \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}=-p.\mathbf{n} \ \text{ sur } \gamma_l^{fs}, \text{contour de la structure } l \end{cases}$$

$\mathbf{M}_l$ est la matrice de masse de la structure, $\mathbf{K}_l$ sa matrice de rigidité. La condition aux limites sur le contour des structures traduit la continuité de la contrainte normale à l'interface fluide/structure (le tenseur des contraintes fluides étant réduit à sa partie non déviatorique, le fluide étant parfait). En intégrant sur le contour de chaque structure cette contrainte normale, on obtient une force $\mathbf{F}_l$ résultante des forces de pression du fluide à l'interface fluide/structure. Cette force est l'intégrale du champ de pression sur le contour γ_l^{fs} de chaque structure :

$$\forall l \ \text{ indice de structure}, l\in\{0,\dots,K\},\ \mathbf{F}_l=-\int_{\gamma_l^{fs}} p\,\mathbf{n}\,dS$$

Le champ de pression vérifie le problème [éq 3.1-5].

3.3 Équations du problème couplé - mise en évidence de la matrice de masse ajoutée

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En définitive, le problème couplé fluide/structure s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta p = 0 \text{ dans } \Omega_f \\ \forall l \in \{0,...,K\}, \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\gamma_l^{fs}} = -\rho_f \ddot{\mathbf{x}}_{S_l}.\mathbf{n} \text{ sur } \gamma_l^{fs} \\ \forall l \in \{0,...,K\}, \ \mathbf{M}_l.\ddot{\mathbf{U}}_l + \mathbf{K}_l.\mathbf{U}_l = \mathbf{F}_l \text{ dans } \Omega_{S_l} \\ \forall l \in \{0,...,K\}, \ \mathbf{F}_l = -\int_{\gamma_l} p.\mathbf{n}\, dS \text{ sur } \gamma_l^{fs} \end{cases}$$

éq 3.3-1

On va montrer désormais que l'effort que ressentent les structures immergées est proportionnel à leur accélération. Un bon moyen de démontrer cela est de se placer dans la base modale des structures dans le vide. On peut ainsi décomposer l'accélération sur cette base (qui est en fait la réunion des bases modales de chacune des structures). Ainsi :

$$\mathbf{x}_{S_l}(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{il}(t)\mathbf{X}_{il}(\mathbf{r})$$

En reportant cette expression dans la deuxième équation du système [éq 3.3-1], on est amené à rechercher le champ de pression sous la forme :

$$p = \sum_{l=1,...,K} \sum_{i=1,...,\infty} \ddot{a}_{il}(t)\, p_{il}(\mathbf{r})$$

En reportant dans le problème [éq 3.3-1] ces expressions, on a à résoudre dans le fluide autant de problèmes de Laplace qu'on a choisi de modes pour chacune des structures. Ceci se traduit par :

$$\forall l \in \{1,...,K\}, \ \forall i\{1,...,\infty\}, \ \begin{cases} \Delta p_{il} = 0 \ \text{ dans } \Omega_f \\ \left(\frac{\partial p_{il}}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\gamma_l^{fs}} = -\rho_f \mathbf{x}_{il}.\mathbf{n} \text{ sur } \gamma_l^{fs} \\ [\mathbf{m}_{il}](\ddot{\mathbf{a}}_l) + [\mathbf{k}_{il}](\mathbf{a}_l) = (\mathbf{f}_{il}) \text{ dans } \Omega_l \end{cases}$$

Les « matrices » de masse et de rigidité généralisées écrites dans ces bases sont diagonales.

Chacune des composantes de l'effort de pression résultant projeté sur base modale s'écrit :

$$\forall i\{1,....,\infty\}, \forall l\{1,....,K\}, \ (f_{il}) = -\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{\infty} \ddot{a}_{jk} \int_{\gamma_l^{fs}} p_{jk} \boldsymbol{X}_{il}.\mathbf{n}.N_j\, dS$$

On peut alors écrire le vecteur de l'effort généralisé de pression sur une structure immergée sous forme matricielle :

$$(\mathbf{f}_{il}) = -[\mathbf{m}_{il\,jk}].\ddot{\boldsymbol{a}}_{jk} \ \text{ avec } \ m_{il\,jk} = \int_{\gamma_l^{fs}} p_{jk} \boldsymbol{X}_{il}.\mathbf{n}\, dS$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ici, l est fixé : la matrice constituée des composantes $\left[\mathbf{m}_{il\ jk}\right]$ s'appelle **matrice de masse ajoutée** du fluide sur la structure de contour γ_l^{fs}. Lorsqu'on considère la base modale de l'ensemble des K structures, on généralise la notation de la **matrice de masse ajoutée** de composantes $\left[\mathbf{m}_{il\ jk}\right]$ sur base modale dans le vide, l variant de 1 à K. Cette matrice est en général non diagonale.

3.4 Quelques définitions

3.4.1 Définition 1

Lorsque $l=k$ (même structure) et $i=j$ (même ordre de mode), le coefficient m_{ilil} est l'**auto-masse ajoutée** du mode i de la structure l. Il s'agit de l'inertie supplémentaire due au fluide déplacé par le mode d'ordre i de la structure, compte tenu des confinements géométriques induits dans le fluide par la présence des autres structures supposées fixes.

3.4.2 Définition 2

Lorsque $l=k$ (même structure) et $i\neq j$ (ordres de mode différents), le coefficient m_{iljl} est la **masse ajoutée de couplage** entre les modes d'ordre i et j de la structure l. En air, ces termes de masse extra-diagonaux sont nuls, car les modes sont orthogonaux entre eux. Compte tenu de l'expression générale du coefficient $m_{il\ jk}$, les modes i et j peuvent être couplés en masse, car le champ de pression p_{jl} créé par le mode j de la structure l n'est pas nécessairement orthogonal au mode d'ordre i de cette même structure. Il suffit que cette structure soit immergée dans un environnement ne comportant pas de symétrie géométrique pour que ce coefficient soit non nul. Dans un environnement symétrique, en revanche, l'orthogonalité du champ de pression avec le mode est observée.

3.4.3 Définition 3

Lorsque $l\neq k$ (structures différentes) et $i\neq j$ (ordres de mode différents), le coefficient $m_{il\ jk}$ est la **masse ajoutée de couplage** entre les modes d'ordre i et j respectivement des structures l et k. Ce coefficient traduit l'effort inertiel que fait subir la structure k vibrant sur son mode d'ordre j à la structure l vibrant sur son mode i.

3.5 Propriétés de la matrice de masse ajoutée

3.5.1 Théorème 1 : la matrice de masse ajoutée est symétrique

Pour simplifier la démonstration, nous allons considérer une unique structure immergée dans un fluide parfait, incompressible et non visqueux. Nous décomposons le mouvement de la structure sur sa base modale (tronquée à n modes), mais le résultat peut être tout aussi bien démontré en base "physique" (*i.e.* la base des fonctions d'interpolation nodales). Enfin, le résultat se généralise au cas de K structures immergées dans un même fluide.

On doit démontrer que : $m_{ij}=\int_\Gamma p_i\mathbf{X}_j.\mathbf{n}\,dS=m_{ji}=\int_\Gamma p_j\mathbf{X}_i.\mathbf{n}\,dS$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- p_i (respectivement p_j) représente le champ de pression créé dans le fluide et à l'interface avec la structure par le mode d'ordre i (respectivement d'ordre j) de la structure,
- $\mathbf{X}_j$ (respectivement $\mathbf{X}_i$) représente la déformée modale du mode d'ordre j (respectivement d'ordre i).

Or :

$$\begin{cases} \Delta p_i = 0 \text{ dans } \Omega_f \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial \mathbf{n}} = -\rho_f \mathbf{X}_i.\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \Delta p_j = 0 \text{ dans } \Omega_f \\ \dfrac{\partial p_j}{\partial \mathbf{n}} = -\rho_f \mathbf{X_j}.\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

D'où, en utilisant la formule de Green avec une normale orientée de la structure vers le fluide et l'harmonicité de p_i et de p_j :

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_\Gamma p_i \mathbf{X}_j.\mathbf{n}\, d\Gamma = -\frac{1}{\rho_f}\int_\Gamma p_i \frac{\partial p_j}{\partial \mathbf{n}}.\mathbf{n}\, dS \\ &= -\frac{1}{\rho_f}\Big(\underbrace{\int_\Omega p_i \Delta p_j d\Omega}_{0} - \int_\Omega \mathbf{grad}\, p_i.\mathbf{grad}\, p_j d\Omega\Big) \\ &= -\frac{1}{\rho_f}\Big(\underbrace{\int_\Omega p_j \Delta p_i d\Omega}_{0} - \int_\Omega \mathbf{grad}\, p_j.\mathbf{grad}\, p_i d\Omega\Big) \\ &= -\frac{1}{\rho_f}\int_\Gamma p_j \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{n}}.\mathbf{n}\, dS = \int_\Gamma p_j \mathbf{X}_i.\mathbf{n}\, dS \\ &= m_{ji} \end{aligned}$$

3.5.2 Théorème 2 : la matrice de masse ajoutée est définie positive

On renvoie à la référence [bib1] pour la démonstration complète.

3.5.3 Théorème 3

Supposons qu'on ait K structures ayant des propriétés d'élasticité linéaire identiques et qui soient immergées dans un même fluide. En outre, ces structures admettent deux degrés de liberté de déplacement dans le plan Oxy (cf. schéma au § 3.1). Chacune de ces structures admet le même spectre $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ de fréquences propres dans le vide.

Pour toute fréquence propre f_n, il existe $2K$ fréquences propres $\{\omega_1, \ldots, \omega_{2K}\}$ du système couplé fluide/structure vérifiant $\forall i \in \{1, \ldots, 2K\},\ \omega_i \leq f_n$

On renvoie à la référence [bib1] pour la démonstration complète.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.5.4 Autres propriétés

Les coefficients d'auto-masse ajoutée sont toujours positifs.

On suppose toujours qu'on a une seule structure immergée dans un fluide parfait, incompressible et sans écoulement. La démonstration se généralise sans difficulté à K structures immergées.

On doit démontrer que :

$$\forall i \text{ indice de mode } \in \left[1, \ldots, n\right], \quad m_{ii} = \int_{\Gamma} p_i \mathbf{X}_i . \mathbf{n} \, dS \geq 0$$

Or :

$$m_{ii} = \int_{\Gamma} p_i \mathbf{X}_i . \mathbf{n} \, dS = -\frac{1}{\rho_f} \int_{\Gamma} p_i \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{n}} dS$$

$$= -\frac{1}{\rho_f} \left(\underbrace{\int_{\Omega_f} p_i \Delta p_i \, d\Omega}_{0} - \int_{\Omega} \mathbf{grad}\, p_i . \mathbf{grad}\, p_i \, d\Omega \right)$$

$$= \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} (\mathbf{grad}\, p_i)^2 \, d\Omega$$

$$\geq 0$$

Supposons qu'on ait K structures immergées dans un même fluide. On suppose qu'elles ont un seul degré de liberté de translation suivant Ox. Alors la somme de tous les coefficients de masse ajoutée de cette matrice donne l'auto-masse ajoutée sur l'ensemble des K structures se déplaçant toutes d'un même mouvement rectiligne sinusoïdal.

On renvoie à la référence [bib2] pour la démonstration complète.

4 Mise en œuvre numérique

4.1 Résolution de l'équation de Laplace par éléments finis de volume

Reprenons le problème fluide de Laplace avec conditions aux limites de type von Neumann :

$$\begin{cases} \Delta p = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\Gamma_1} = -\rho_f \ddot{\mathbf{x}}_s . \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad \Gamma_1 = \underset{l=1,K}{\cup} \gamma_l^{fs} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\Gamma_2} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad \Gamma_2 = \partial\Omega - \Gamma_1 \end{cases}$$

Écrivons une formulation variationnelle de ce problème :

$$\int_{\Omega_f} v . \Delta p \, d\Omega = 0 \quad \forall v$$

En utilisant la formule de Green avec une normale qu'on suppose orientée de la structure vers le fluide (donc intérieure au volume fluide) et en posant $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\int_{\Omega_f} \mathbf{grad}\, v \,.\, \mathbf{grad}\, p \, d\Omega + \int_{\Gamma} v \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \,.\, \mathbf{n} \, dS = 0$$

Soit :

$$\int_{\Omega_f} \mathbf{grad}\, v \,.\, \mathbf{grad}\, p \, d\Omega = \rho_f \int_{\Gamma} v \ddot{x}_n dS \qquad \text{éq 4.1-1}$$

On considère une partition du volume fluide Ω_f en un nombre fini d'éléments. Sur cette discrétisation du domaine, on peut écrire une forme approchée du champ de pression hydrodynamique :

$$p = \sum_{i=1}^{N} N_i(\mathbf{r})\, p_i$$

N_i représente les fonctions d'interpolation nodales définies sur les éléments : elles valent 1 au nœud numéro i, et 0 sur tous les autres pour des éléments finis P1.

Ensuite, en prenant comme fonctions-tests v successivement les fonctions d'interpolation nodales, on obtient un système de N équations en reportant dans [éq 4.1-1] :

$$j = 1, \ldots, N ; \quad \int_{\Omega_f} \sum_{i=1}^{N} p_i \mathbf{grad}\, N_i(\mathbf{r}) \,.\, \mathbf{\Delta} N_j(\mathbf{r})\, d\Omega = \rho_f \int_{\gamma_i^{fs}} N_j \ddot{x}_n dS$$

ce qui peut s'écrire sous la forme du système linéaire, dont les solutions sont les degrés de liberté de pression $\mathbf{P}$:

$\mathbf{H} \,.\, \mathbf{P} = \mathbf{\Phi}$ avec $\mathbf{\Phi}$ vecteur de composantes $\Phi_j = \rho_f \int_{\Gamma} N_j \ddot{x}_n dS$

avec $\mathbf{H}$ matrice de composantes $H_{ij} = \int_{\Omega_f} \mathbf{grad}\, N_i \,.\, \mathbf{grad}\, N_j \, d\Omega$ éq 4.1-2

En toute rigueur, ce système est singulier. Il admet une infinité de solutions différant d'une constante. Il faut donc imposer une pression (condition aux limites de type Dirichlet) en un point du fluide pour lever l'indétermination sur la solution.

Ces précautions prises, en inversant le système [éq 4.1-2], on obtient le champ de pression dans tout le volume Ω_f de fluide, y compris à l'interface fluide/structure, là où il nous intéresse évidemment.

4.2 Calcul des coefficients de la matrice de masse ajoutée sur base modale

Il faut estimer numériquement la valeur de l'intégrale :

$$m_{il\,jk} = \int_{\gamma_i^{fs}} p_{jk} \mathbf{X}_{il} \,.\, \mathbf{n}\, dS \qquad \text{éq 4.2-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

à partir d'un champ aux nœuds de pression représenté par un vecteur colonne noté $\mathbf{P}_{jk}$ et d'un champ aux nœuds de déplacement correspondant à une déformée modale de structure en air et représenté par le vecteur colonne $\mathbf{X}_{il}$.
Or, sur l'interface fluide/structure, le champ de pression approché p_{jk} dû à la discrétisation de l'interface en N éléments de bord peut s'écrire :

$$p_{jk}=\sum_{m=1}^{N} N_m(\mathbf{r})\, p_{jk_m}$$

tandis que le champ de déplacement "modal" s'écrit sur cette même discrétisation :

$$\mathbf{X}_{il}=\sum_{n=1}^{N} N_n(\mathbf{r})\, \mathbf{X}_{il_n}$$

Ainsi, en reportant ces deux expressions dans l'intégrale [éq 4.2-1], on obtient :

$$m_{il\,jk}\simeq \int_{\gamma_l^{fs}} \Big(\sum_{m=1}^{N} N_m(\mathbf{r})\, p_{jk_m}\Big)\left[\sum_{n=1}^{N} N_n(\mathbf{r})\, X_{ilx_n} \mathrm{A}\, n_x + \sum_{n=1}^{N} N_n(\mathbf{r})\, X_{ily_n} \mathrm{A}\, n_y\right] dS$$

$$m_{il\,jk}\simeq \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} p_{jk_m}\Big(\int_{\gamma_l^{fs}} N_m(\mathbf{r})\, N_n(\mathbf{r})\, n_x dS\Big) X_{ilx_n} + \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} p_{jk_m}\Big(\int_{\gamma_l^{fs}} N_m(\mathbf{r})\, N_n(\mathbf{r})\, n_y dS\Big) X_{ily_n}$$

On a supposé dans la démonstration ci-dessus que le problème est bidimensionnel.

Ceci peut se mettre sous la forme d'un produit scalaire, faisant intervenir un produit matrice vecteur :

$m_{il\,jk}=\mathbf{P}_{jk}^T \mathbf{A}_x \mathbf{X}_{ilx}+\mathbf{P}_{jk}^T \mathbf{A}_y \mathbf{X}_{ily}$ avec $\mathbf{A}_x$ matrice de coefficients $\int_{\gamma_l^{fs}} N_i N_j n_x dS$

et $\mathbf{A}_y$ matrice de coefficients $\int_{\gamma_l^{fs}} N_i N_j n_y dS$

5 Mise en œuvre dans *Code_Aster*

5.1 Analogie thermique

Pour résoudre le problème de Laplace en pression, on utilise une analogie thermique : il s'agit de résoudre l'équation de la chaleur en stationnaire avec un matériau de conductivité thermique égale à l'unité. Ainsi :

$$\begin{cases} \Delta p=0 \ \text{ dans } \ \Omega_f \\ \left(\dfrac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right)_\Gamma=-\rho_f \ddot{\mathbf{x}}_s\cdot\mathbf{n} \ \text{ sur } \ \Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} div(\lambda\, \mathbf{grad}\, T)=0 \ \text{ dans } \ \Omega_f \Leftarrow \Delta T=0 \ \text{ si } \ \lambda=1 \\ \left(\dfrac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\right)_\Gamma=\varphi_n \ \text{ sur } \ \Gamma \end{cases}$$

T représente la température dans le milieu, elle joue le rôle de la pression dans le milieu fluide.

Φ_n est le flux de chaleur normal à la paroi, il joue le rôle du terme $-\rho_f \ddot{\mathbf{X}}_s.\mathbf{n}$ qui est assimilable à la variation au cours du temps du flux de masse (fluide) à la paroi de la structure. Cette quantité $-\rho_f \ddot{\mathbf{X}}_s.\mathbf{n}$ est en effet homogène à une masse divisée par une surface et un temps au carré.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.2 Mise en œuvre pratique

L'opérateur CALC_MATR_AJOU [U4.66.01] a été développé pour prendre en compte le couplage inertiel (masse ajoutée : OPTION = 'MASS_AJOU') entre des structures baignées dans un même fluide parfait, incompressible et au repos. Le fluide est décrit par des caractéristiques thermiques équivalentes (opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01]) et la partie du maillage représentant est affectée par des éléments thermiques (opérateur AFFE_MODELE [U4.41.01]). Cet opérateur CALC_MATR_AJOU permet aussi de calculer la raideur ou l'amortissement ajouté. Afin de faciliter son usage dans certains cas, il existe aussi la macro-commande MACRO_MATR_AJOU [U4.66.11].

L'opérateur utilise cinq mots-clés obligatoires :

- le mot-clé MODELE_FLUIDE : c'est sur ce modèle qu'on résout le problème de Laplace avec conditions aux limites de Von Neumann (ou son problème thermique équivalent),
- le mot-clé MODE_MECA (ou CHAM_NO, ou MODELE_GENE) : ce mot-clé permet de calculer les conditions aux limites de type flux à la paroi de la structure,
- le mot-clé MODELE_INTERFACE : c'est sur ce modèle qui comprend tous les éléments thermiques de bord de l'interface fluide/structure qu'on calcule le produit scalaire mentionné au paragraphe [§4.2],
- le mot-clé CHAM_MATER : il s'agit du matériau fluide (décrit par des caractéristiques thermiques équivalentes),
- le mot-clé CHARGE : c'est une charge thermique (température imposée en un nœud quelconque du maillage fluide) qui correspond à la condition à la limite de Dirichlet pour lever la singularité du problème de Laplace (voir [§4.1]).

On obtient ainsi une matrice de masse ajoutée généralisée. Cette matrice possédant un profil ligne de ciel mais plein (opérateur NUME_DDL_GENE [U4.65.03]) peut être sommée à la matrice de masse généralisée de la structure en utilisant l'opérateur COMB_MATR_ASSE [U4.72.01]. Ceci permet de calculer les modes couplés fluide/structure des structures immergées (modes "mouillés") (opérateur CALC_MODES [U4.52.02]).

On conseille de consulter le cas-test FDLV114 - *Réponse sismique d'un réservoir cylindrique* [V8.01.114].

6 Bibliographie

1) C. CONCA, J. PLANCHARD, B. THOMAS, M. VANNINATHAN : "Problèmes mathématiques en couplage fluide/structure" _ EYROLLES (1994).

2) F. BEAUD, G. ROUSSEAU : "Validation inter-logiciels du calcul de masse ajoutée avec le *Code_Aster* et le code CALIFE", HT-32/95/004/A.

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3	G.ROUSSEAU *(EDF/EP/AMV)*	Texte initial
15.2	F.VOLDOIRE (EDF/R&D/ERMES)	Commentaires explicatifs

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)