Eléments de frontière absorbante

Résumé

Ce document décrit l'implantation dans *Code_Aster* des éléments de frontière absorbante. Ces éléments de type paraxiaux, dont on décrit ici la théorie, sont affectés à des frontières de domaines élastiques ou fluides pour traiter des problèmes 2D ou 3D d'interaction sol-structure ou sol-fluide-structure. Ils permettent de satisfaire la condition de Sommerfeld vérifiant l'hypothèse d'anéchoïcité : l'élimination des ondes planes élastiques ou acoustiques diffractées et non physiques venant de l'infini.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1Introduction....3
1.1Problématique d'un milieu semi-infini pour l'ISS....3
1.2Etat de l'art des approches numériques....3
2Théorie des éléments paraxiaux....5
2.1Impédance spectrale de la frontière....5
2.2Approximation paraxiale de l'impédance....6
2.3Prise en compte du champ sismique incident....8
3Éléments fluides anéchoïques en transitoire....9
3.1Formulation standard....9
3.1.1Formulation éléments finis....9
3.1.2Approximation paraxiale....9
3.2Impédance des éléments vibro-acoustiques dans Code_Aster....10
3.2.1Limites de la formulation en p....10
3.2.2Formulation symétrique en p et phi....12
3.2.3Imposition d'une impédance avec la formulation en p et phi....12
3.2.4Formulation détaillée....13
3.2.5Intégration temporelle directe....14
3.3Utilisation dans Code_Aster....14
4Éléments absorbants élastiques dans Code_Aster....16
4.1Adaptation du chargement sismique aux éléments paraxiaux....16
4.2Implémentation des éléments en transitoire et en harmonique....18
4.2.1Implémentation en transitoire....18
4.2.2Implémentation en harmonique....18
4.3Mode de chargement sismique par onde plane....19
4.3.1Caractérisation d'une onde plane en transitoire....19
4.3.2Données utilisateur pour le chargement par onde plane....19
4.4Utilisation dans Code_Aster....20
5Bibliographie....22

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

1.1 Problématique d'un milieu semi-infini pour l'ISS

Les problèmes standard de réponse sismique et d'interaction sol-structure ou sol-fluide-structure amènent à considérer des domaines infinis ou supposés tels. Par exemple, dans le cas de barrages soumis au séisme, on a souvent affaire à des retenues de grande taille qui nous permettent de faire l'hypothèse d'anéchoïcité : les ondes qui partent vers le fond de la retenue ne "reviennent" pas. Ceci a pour but de réduire la taille de la structure à mailler et de permettre de passer des calculs complexes avec les moyens informatiques actuels. On propose sur la [Figure 1.1-a] ci-dessous un schéma qui décrit le type de situations envisagées.

Domaines modélisés aux éléments finis :

Ω_F domaine fluide (par exemple retenue de barrage)
Ω_B domaine structure (par exemple voûte de barrage)
Ω_S domaine sol non-linéaire
Ω'_S domaine sol linéaire

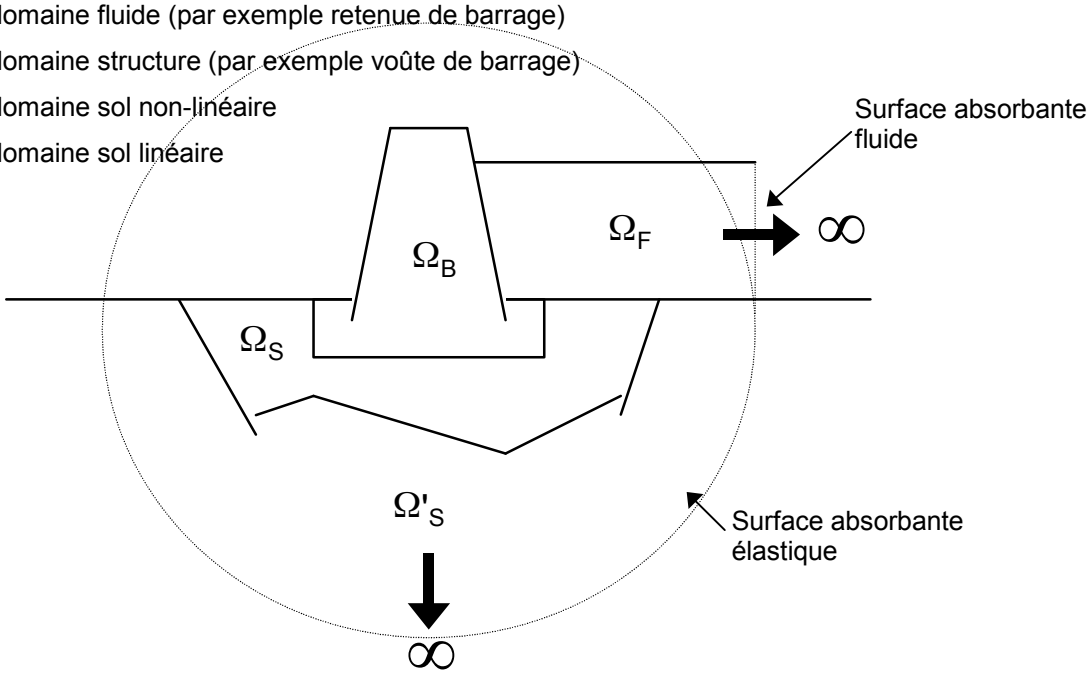


Figure 1.1-a : Domaine pour l'interaction sol-fluide-structure

Dans tout le document, on considère que la frontière du maillage éléments finis du sol se trouve dans un domaine au comportement élastique.

La théorie des systèmes elliptiques assure simplement l'existence et l'unicité de la solution des problèmes acoustiques ou élastoplastiques dans les domaines bornés, sous l'hypothèse de conditions aux limites assurant la fermeture du problème. Il en va différemment pour les domaines infinis. On doit avoir recours à une condition particulière, dite de Sommerfeld, formulée dans les directions infinies du problème. Cette condition assure notamment, dans le cas de la diffraction d'une onde plane (élastique ou acoustique) par une structure, l'élimination des ondes diffractées non physiques venant de l'infini que les conditions classiques sur les bords du domaine à distance finie ne suffisent pas à assurer.

1.2 Etat de l'art des approches numériques

La méthode privilégiée pour traiter des domaines infinis est celle des éléments finis de frontière (ou équations intégrales). La solution fondamentale utilisée vérifie automatiquement la condition de Sommerfeld. Seulement, l'utilisation de cette méthode est conditionnée par la connaissance de cette solution fondamentale, ce qui est impossible dans le cas d'un sol à géométrie complexe, par exemple,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

ou lorsque le sol ou la structure sont non linéaires. Il faut donc alors avoir recours aux éléments finis. Dès lors, des conditions particulières à la frontière du maillage éléments finis sont nécessaires pour interdire la réflexion des ondes diffractées sortantes et reproduire ainsi artificiellement la condition de Sommerfeld.

Plusieurs méthodes permettent d'identifier des conditions aux limites répondant à nos exigences. Certaines conduisent à une résolution exacte du problème : on les appelle "frontières consistantes". Elles sont fondées sur une prise en compte précise de la propagation des ondes dans le domaine infini. Par exemple, si ce domaine peut être supposé élastique et avec une stratigraphie simple loin de la structure, on peut envisager un couplage éléments finis - équations intégrales. Un des problèmes de cette solution est qu'elle n'est pas locale en espace : il faut faire un bilan sur toute la frontière séparant le domaine fini du domaine infini, ce qui nous conduit obligatoirement à un problème de sous-structuration. Cette non-localité en espace est caractéristique des frontières consistantes.

Pour aboutir à des termes de frontière locaux en espace, on peut utiliser la théorie des éléments infinis [bib1]. Ce sont des éléments de dimension infinie dont les fonctions de base reproduisent au mieux la propagation des ondes élastiques ou acoustiques à l'infini. Ces fonctions doivent être proches de la solution car les théorèmes mathématiques classiques n'assurent plus la convergence du résultat de calcul vers la solution avec de tels éléments. En fait, on peut trouver une analogie entre la recherche de fonctions de base satisfaisantes et celle d'une solution fondamentale pour les équations intégrales. Les contraintes géométriques sont assez voisines mais surtout, cette recherche présente un inconvénient de taille : elle dépend de la fréquence. Par conséquent, de telles frontières, locales ou non en espace, ne peuvent être utilisée que dans le domaine de Fourier, ce qui interdit une certaine catégorie de problèmes, avec des non-linéarités de comportement ou des grands déplacements par exemple.
On en arrive donc à devoir trouver des frontières absorbantes performantes qui soient locales en espace et en temps pour traiter aux éléments finis des problèmes transitoires posés sur des domaines infinis.

Nous allons présenter dans la suite la théorie des éléments paraxiaux qui réalisent l'absorption cherchée avec une efficacité inversement proportionnelle à leur simplicité d'implémentation ainsi que la description des contraintes d'implémentation dans *Code_Aster*. On présente les développements pour traiter des problèmes 3D. Ceux pour les cas 2D ont été réalisés et leur théorie se déduit simplement de la modélisation 3D.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Théorie des éléments paraxiaux

On présente dans cette partie le principe de l'approximation paraxiale dans le cas de l'élastodynamique linéaire. Deux approches théoriques permettent de cerner l'esprit et la mise en pratique des éléments paraxiaux élastiques : on doit la première à Cohen et Jennings [bib2] et la seconde à Modaressi [bib3]. L'application de la théorie des éléments paraxiaux au cas fluide sera faite dans la partie suivante.
Dans toute la suite, comme présenté sur la [Figure 1.1-a], on suppose que la frontière du maillage du sol est située dans un domaine au comportement élastique.
L'approche de Modaressi implantée dans *Code_Aster* permet à la fois de construire des frontières absorbantes et d'introduire la champ sismique incident.

2.1 Impédance spectrale de la frontière

Pour obtenir l'équation paraxiale, il nous faut d'abord déterminer la forme du champ de déplacement diffracté au voisinage de la frontière. Pour cela, on part des équations de l'élastodynamique 3D :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{E_{11}} c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x'^2} - \mathbf{E_{12}} c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x' \partial x_3} - \mathbf{E_{22}} c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_3^2} = 0$$

Avec : $\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u' \\ u_3 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{E_{11}} = \frac{1}{c^2}\begin{bmatrix} c_P^2 & 0 \\ 0 & c_S^2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{E_{12}} = \frac{1}{c^2}\left(c_P^2 - c_S^2\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{E_{22}} = \frac{1}{c^2}\begin{bmatrix} c_S^2 & 0 \\ 0 & c_P^2 \end{bmatrix}$

La constante c, homogène à une vitesse, est introduite pour rendre certaines quantités adimensionnelles. Les équations et leurs solutions sont bien entendu indépendantes de cette constante.
On appelle x' et u' les directions et les composantes du déplacement dans le plan tangent et x_3 et u_3 selon $\mathbf{e_3}$, la direction normale à la frontière.
On procède à deux transformées de Fourier, l'une par rapport au temps, l'autre par rapport aux variables d'espace dans le plan à la frontière. On se limite au cas d'une frontière plane et sans coin :
Les équations s'écrivent alors :

$$\left(c_P^2 - c_S^2\right)\left[-\boldsymbol{\xi}'.\hat{\mathbf{u}}' + i\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_3}{\partial x_3}\right]\boldsymbol{\xi}' + c_S^2\left[-|\boldsymbol{\xi}'|^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right]\hat{\mathbf{u}}' + \omega^2 \hat{\mathbf{u}}' = 0$$

$$\left(c_P^2 - c_S^2\right)\left[-i\boldsymbol{\xi}'.\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}'}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}_3}{\partial x_3^2}\right] + c_S^2\left[-|\boldsymbol{\xi}'|^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right]\hat{\mathbf{u}}_3 + \omega^2 \hat{\mathbf{u}}_3 ¿ = 0$$

où $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{u}}_3$ désignent les transformées de Fourier et $\boldsymbol{\xi}'$ le vecteur d'onde associé à x'.

Il s'agit d'un système différentiel en x_3 que l'on sait résoudre en le diagonalisant. On en déduit :

$$\frac{\left(\hat{\mathbf{u}}' \wedge \boldsymbol{\xi}'\right).\mathbf{e_3}}{|\boldsymbol{\xi}'|} = A\exp\left(-i\xi_S x_3\right)$$

$$\hat{\mathbf{u}}'.\boldsymbol{\xi}' = |\boldsymbol{\xi}'|\left[A_P \exp\left(-i\xi_P x_3\right) + A_S \exp\left(-i\xi_S x_3\right)\right]$$

$$|\boldsymbol{\xi}'|\hat{\mathbf{u}}_3 = -A_P \xi_P \exp\left(-i\xi_P x_3\right) - A_S \xi_S \exp\left(-i\xi_S x_3\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Avec : $\xi_P=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_P^2}-|\boldsymbol{\xi}'|^2}$ et $\xi_S=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_S^2}-|\boldsymbol{\xi}'|^2}$

Pour déterminer les constantes $A, A_S \text{et} A_P$, on suppose connu $\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}',0)$ sur la frontière du domaine éléments finis. On les exprime en fonction de $\hat{\mathbf{u}}'(\boldsymbol{\xi}',0)=\hat{\mathbf{u}}_0' \text{et} \hat{\mathbf{u}}_3(\boldsymbol{\xi}',0)=\hat{\mathbf{u}}_{30}$.

On va maintenant évaluer le vecteur contrainte sur une facette de normale $\mathbf{e_3}$ en $x_3=0$, ce qui nous donnera l'impédance de la frontière. On fait subir à $t(x',x_3)$ la même transformée de Fourier en espace que pour les équations de l'élastodynamique, si bien que :

$$\hat{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\xi}',x_3)=\left[i\lambda\hat{\mathbf{u}}'.\boldsymbol{\xi}'+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}_3}{\partial x_3}\right]\mathbf{e_3}+\mu\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}'}{\partial x_3}+i\hat{\mathbf{u}}_3\mathbf{x}'\right)$$

On souhaite s'affranchir en $x_3=0$ des termes contenant des dérivées en x_3. Le système obtenu précédemment nous le permet en fonction de $\hat{u}_0' \text{et} \hat{u}_{30}$:

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}_0'}{\partial x_3}.\boldsymbol{\xi}'=i|\boldsymbol{\xi}'|^2\hat{\mathbf{u}}_{30}$$

$$\left(\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}_0'}{\partial x_3}\wedge\boldsymbol{\xi}'\right).\mathbf{e_3}=-i\xi_S\left(\hat{\mathbf{u}}_0'\wedge\boldsymbol{\xi}'\right).\mathbf{e_3}$$

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}_{30}}{\partial x_3}=i\left[-\xi_P\xi_S\frac{\hat{\mathbf{u}}_0'.\boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi}'|^2}+(\xi_P+\xi_S)\hat{\mathbf{u}}_{30}\right]$$

On obtient ainsi l'impédance spectrale de la frontière :

$$\hat{\mathbf{t}}_0=a^0\mathbf{e_3}+b^0\boldsymbol{\xi}'+c^0\boldsymbol{\xi}'\wedge\mathbf{e_3}$$

où $a^0, b^0 \text{et} c^0$ sont des fonctions de $|\boldsymbol{\xi}'|$ et de ω qui dépendent linéairement de $\hat{\mathbf{u}}_0' \text{et} \hat{\mathbf{u}}_{30}$

On peut alors écrire : $\hat{\mathbf{t}}_0=A(|\boldsymbol{\xi}'|,\omega)\hat{\mathbf{u}}_0(\boldsymbol{\xi}',\omega)$
où A désigne l'opérateur impédance spectrale globale. On revient à l'espace physique par deux transformées de Fourier inverses.

2.2 Approximation paraxiale de l'impédance

L'impédance spectrale calculée précédemment n'est locale ni en espace ni en temps puisqu'elle fait intervenir $\hat{\mathbf{u}}_0(\boldsymbol{\xi}',\omega)$, transformée de Fourier de $\mathbf{u_0}(x',t)$ pour tout x' et tout t.

L'idée est alors de développer ξ_P et ξ_S selon les puissances de $\frac{|\boldsymbol{\xi}'|}{\omega}$. Cette approximation sera bonne soit à haute fréquence, soit pour $|\boldsymbol{\xi}'|$ petit.
Examinons la dépendance en x_3, par exemple de $\hat{\mathbf{u}}_3$: on aura, pour $\mathbf{u_3}(x',x_3,t)$ des termes de la forme : $\exp\left[i\left(\xi' x'+\omega t-\xi_P x_3\right)\right]$

Avec le développement de ξ_P : $\xi_P=\frac{\omega}{c_P}\left[1-\left(\frac{c_P|\boldsymbol{\xi}'|}{\omega}\right)^2+\ldots\right]$

On montre que pour $|\boldsymbol{\xi}'|$ petit, on aura des ondes se propageant selon des directions voisines de la normale $\mathbf{e_3}$ à la frontière, car l'exponentielle s'écrit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\exp\left\{ i\,\omega\left[\left(t-\frac{x_3}{c_P}\right)+i\,o\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}'|}{\omega}\right)\right]\right\}$$

Dès lors, avec un développement asymptotique de ξ_P et ξ_S, en multipliant par une puissance convenable de w pour supprimer cette quantité au dénominateur, on obtient :

$$A_0\left(\boldsymbol{\xi}',\omega\right)\hat{\mathbf{t}}_0=A_1\left(\boldsymbol{\xi}',\omega\right)\hat{\mathbf{u}}_0$$

où A_0 et A_1 sont des fonctions polynomiales en $\boldsymbol{\xi}'$ et ω.

Soit, après les deux transformées de Fourier inverses :

$$A_0\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{t_0}=A_1\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{u_0}$$

On obtient ainsi la forme finale de l'impédance locale transitoire approchée en fonction du dernier terme en $\frac{|\boldsymbol{\xi}'|}{\omega}$ retenu. On peut trouver le calcul détaillé des A_i dans [bib5].
Par exemple, pour l'ordre 0 :

$$\mathbf{t_0}=coeam\left(\rho\,c_P\frac{\partial u_3}{\partial t}\mathbf{e_3}+\rho\,c_S\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}\right)$$

Ceci correspond à des amortisseurs visqueux distribués le long de la frontière du domaine éléments finis, avec le coefficient correctif $coeam$ renseigné derrière le mot clé COEF_AMOR affecté par DEFI_MATERIAU au matériau des éléments de frontière absorbante.
Par analogie, pour l'ordre 0, on peut ajouter un terme en déplacement correspondant à des rigidités distribuées le long de la frontière du domaine éléments finis :

$$\mathbf{t_1}=\frac{\lambda+2\mu}{L}u_3\,\mathbf{e_3}+\frac{\mu}{L}\mathbf{u}'$$

Cette formulation supplémentaire comprend les coefficients de Lamé λ et μ, ainsi qu'une dimension caractéristique L.

A l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \mathbf{t_0}}{\partial t}=\rho\,c_P\frac{\partial^2\mathbf{u_3}}{\partial t^2}\mathbf{e_3}+\rho\,c_S\frac{\partial^2\mathbf{u}'}{\partial t^2}+\rho\,c_S\left[\left(2c_S-c_P\right)\frac{\partial^2\mathbf{u_3}}{\partial x'\,\partial t}\mathbf{e_3}+\left(c_P-2c_S\right)\frac{\partial^2\mathbf{u}'}{\partial x'\,\partial t}\right]$$
$$+\rho\,c_P^2\left(c_S-\frac{c_P}{2}\right)\frac{\partial^2\mathbf{u_3}.\mathbf{e_3}}{\partial x'^2}+\rho\,c_S^2\left(c_P-\frac{c_S}{2}\right)\frac{\partial^2\mathbf{u}'}{\partial x'^2}$$

On voit apparaître la dérivée par rapport au temps du vecteur contrainte. Dans le traitement numérique, il faudra avoir recours à une intégration de ce terme sur les éléments de la frontière.
Pour conclure, on retiendra que l'approximation paraxiale conduit à une impédance locale transitoire ne faisant intervenir essentiellement que des dérivées en temps et dans le plan tangent à la frontière, ainsi qu'éventuellement un terme supplémentaire sans dérivée en temps.

De façon symbolique, on écrit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{t_0} = A_0\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) + A_1(\mathbf{u}) \qquad \text{l'ordre 0}$$
$$\frac{\partial \mathbf{t_0}}{\partial t} = A_1\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{u}\right) \quad \grave{a}\ \text{l'ordre 1}$$

2.3 Prise en compte du champ sismique incident

On rappelle que le comportement du sol est supposé élastique au moins au voisinage de la frontière. A l'infini, le champ total u doit être égal au champ incident $\mathbf{u_i}$ (une des conséquences de la condition de radiation de Sommerfeld). On introduit donc le champ diffracté $\mathbf{u_r}$ tel que :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u_i} + \mathbf{u_r}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{u_r} = 0$$

A la frontière du maillage éléments finis, on écrit la condition d'absorption pour le champ diffracté :

$$\mathbf{t_0}(\mathbf{u_r}) = A_0\left(\frac{\partial \mathbf{u_r}}{\partial t}\right) \text{ à l'ordre 0}$$
$$\frac{\partial \mathbf{t_0}}{\partial t}(\mathbf{u_r}) = A_1\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u_r}}{\partial t^2}, \frac{\partial \mathbf{u_r}}{\partial t}, \mathbf{u_r}\right) \text{ à l'ordre 1}$$

On en déduit le vecteur contrainte total sur la frontière du maillage éléments finis :

$$\mathbf{t_0}(\mathbf{u}) = \mathbf{t_0}(\mathbf{u_i}) + \mathbf{t_0}(\mathbf{u_r}) = \mathbf{t_0}(\mathbf{u_i}) + A_0\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) - A_0\left(\frac{\partial \mathbf{u_i}}{\partial t}\right) \text{ à l'ordre 0}$$

On obtient ainsi la formulation variationnelle du problème au voisinage de la frontière pour l'ordre 0 :

$$\rho \int_\Omega \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}\mathbf{v} + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \int_S A_0\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\mathbf{v} = \int_S \left[\mathbf{t}(\mathbf{u_i}) - A_0\left(\frac{\partial \mathbf{u_i}}{\partial t}\right)\right]\mathbf{v}$$

Pour tout champ $\mathbf{v}$ cinématiquement admissible

Pour l'ordre 1, on conserve la formulation classique :

$$\rho \int_\Omega \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} v + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(u) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) - \int_S t(\mathbf{u})\, v = 0$$

où $\mathbf{t}(\mathbf{u})$ suit la loi d'évolution suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{u})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{u_i})}{\partial t} + A_1\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{u}\right) - A_1\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u_i}}{\partial t^2}, \frac{\partial \mathbf{u_i}}{\partial t}, \mathbf{u_i}\right)$$

La sollicitation due au champ incident apparaît explicitement dans le cas de l'ordre 0, mais elle est contenue dans la loi d'évolution de $\mathbf{t}(\mathbf{u})$ pour l'ordre 1.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

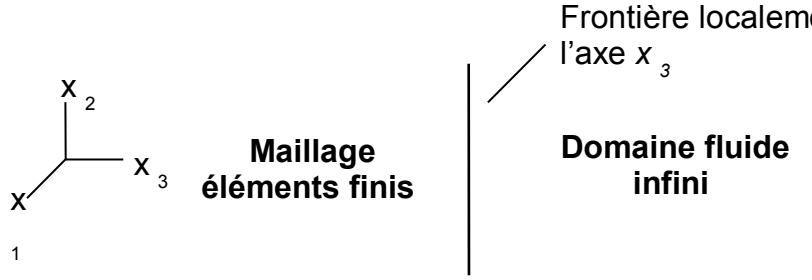
3 Éléments fluides anéchoïques en transitoire

Cette partie présente l'essentiel des contraintes générales d'implémentation d'éléments fluides anéchoïques de frontière absorbants avec l'approximation paraxiale d'ordre 0 dans *Code_Aster*. Pour des raisons de simplicité liées à la manipulation de grandeurs scalaires telles que la pression ou le potentiel de déplacement, en opposition aux grandeurs vectorielles comme le déplacement, on s'intéresse d'abord aux éléments fluides.

3.1 Formulation standard

On reprend ici le raisonnement de Modaressi en l'adaptant à un domaine fluide acoustique. Dans un premier temps, on s'intéresse à la seule donnée de la grandeur pression dans ce fluide. On reviendra ensuite sur cette modélisation pour s'adapter aux contraintes de *Code_Aster*, en soulignant les ajustements à faire.

Soit donc la configuration suivante, en reprenant les conventions de la partie précédente au voisinage de la frontière :



La définition d'un repère local au niveau de l'élément permet de nous ramener systématiquement dans une telle situation.

3.1.1 Formulation éléments finis

La pression p vérifie l'équation d'Helmholtz dans tout le domaine Ω modélisé aux éléments finis, ce qui donne, pour tout champ de pression virtuel q :

$$-\int_{\Omega} \nabla p.\nabla q-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{\Omega} pq+\int_{\Sigma}\frac{\partial p}{\partial n}q=0$$

Σ représente la frontière du domaine Ω.

La grandeur à estimer sur Σ grâce à l'approximation paraxiale est ici $\frac{\partial p}{\partial n}$.

3.1.2 Approximation paraxiale

Dans la configuration proposée, le terme $\frac{\partial p}{\partial n}$ correspond à $\frac{\partial p}{\partial x_3}$.

Considérons dès lors une onde plane harmonique se propageant dans le fluide :

$$p=A\exp\left[i\left(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3-\omega t\right)\right]$$

En remplaçant dans l'équation d'Helmholtz, on obtient :

$$k_3=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{c^2}{\omega^2}\left(k_1^2+k_2^2\right)}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On obtient alors le développement suivant, pour des hautes fréquences (ω grand) ou au voisinage de la frontière (k_1 et k_2 petits) :

$$k_3 = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{c^2}{2\omega^2}\left(k_1^2 + k_2^2\right)\right)$$

Soit, en multipliant par ω pour faire disparaître cette quantité au dénominateur et après une transformée de Fourier inverse en espace et en temps :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_3 \partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{1}{2}c\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\right)$$

Comme l'avait présenté Modaressi, cette équation fait intervenir la dérivée par rapport au temps du terme surfacique. Dans le cadre de cette partie, on ne s'intéresse qu'au terme d'ordre 0, soit, après une intégration en temps, ce qui fait disparaître la dérivée gênante :

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} \text{ ou plus généralement : } \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}$$

C'est cette relation d'impédance que nous allons discrétiser sur la frontière du domaine éléments finis.

Remarque :

Compte tenu de la disparition du terme d'ordre 1 dans le développement de la racine carrée, l'ordre minimal d'approximation pour les paraxiaux fluides est en fait 1 et non 0. Nous conserverons l'appellation d'éléments d'ordre 0 pour la cohérence avec le solide. Toutefois, on parle d'éléments fluides d'ordre 2 au moment de considérer des éléments d'ordre strictement positif.

3.2 Impédance des éléments vibro-acoustiques dans *Code_Aster*

Code_Aster dispose d'éléments vibro-acoustiques. On rappelle dans ce paragraphe les choix de formulation faits au moment de leur implémentation. On s'inspire pour présenter l'existant de la documentation de référence de *Code_Aster* [bib6].

3.2.1 Limites de la formulation en p

Dans le cadre de l'interaction fluide-structure en harmonique, la formulation en pression uniquement du fluide acoustique conduit à des matrices non symétriques. En effet, le système global s'exprime, sous forme variationnelle, de la façon suivante :

$$\int_{\Omega_s} \mathbf{C}_{ijkl} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \mathbf{v}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{u}_\mathbf{i} \mathbf{v}_\mathbf{i} - \int_\Sigma p \mathbf{v}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_\mathbf{i} = 0 \quad \text{pour la structure}$$

$$\frac{1}{\rho_f \omega^2}\int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \nabla q - k^2 \int_{\Omega_f} pq - \int_\Sigma \mathbf{u}_\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_\mathbf{i} q = 0 \quad \text{pour le fluide}$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$, nombre d'onde pour le fluide, v et q deux champs virtuels dans la structure et dans le fluide respectivement.

Après discrétisation par éléments finis, on obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ \rho_f \mathbf{C}^\mathbf{T} & \frac{\mathbf{Q}}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = 0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où : $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ sont les matrices de rigidité et de masse de la structure

$\mathbf{H}$ et $\mathbf{Q}$ sont les matrices fluides obtenues respectivement à partir des formes bilinéaires : $\int_{\Omega_f} \nabla p . \nabla q$ et $\int_{\Omega_f} pq$

$\mathbf{C}$ est la matrice de couplage obtenue à partir de la forme bilinéaire : $\int_{\Sigma} p\,\mathbf{u_i} . \mathbf{n_i}$

Le caractère non symétrique de ce système ne permet pas d'utiliser les algorithme de résolution classiques de *Code_Aster*. Ceci motive l'introduction d'une variable supplémentaire dans la description du fluide.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2.2 Formulation symétrique en p et phi

La nouvelle grandeur introduite est le potentiel des déplacements ϕ, tel que $x=\nabla\phi$. D'après [bib6], on obtient la nouvelle forme variationnelle du système couplé fluide-structure :

$$\int_{\Omega_s}\mathbf{C}_{ijkl}.\mathbf{u}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}\mathbf{v}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}-\omega^2\int_{\Omega_s}\rho_s\mathbf{u}_\mathbf{i}\mathbf{v}_\mathbf{i}-\rho_f\omega^2\int_\Sigma\phi\, p\,\mathbf{v}_\mathbf{i}.\mathbf{n}_\mathbf{i}=0 \quad \text{pour la structure}$$

$$\frac{1}{\rho_f c^2}\int_{\Omega_f} pq-\rho_f\omega^2\left[\frac{1}{\rho_f c^2}\int_{\Omega_f}(\phi q+p\psi)-\int_{\Omega_f}\nabla\phi.\nabla\psi+\int_S\psi\,\mathbf{u}_\mathbf{i}\mathbf{n}_\mathbf{i}\right]=0 \quad \text{pour le fluide}$$

Avec : $p=\rho_f\omega^2 f$ dans le fluide et ψ un champ de potentiel de déplacement virtuel

Ceci nous conduit au système matriciel symétrique :

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}&0&0\\0&\dfrac{\mathbf{M_f}}{\rho_f c^2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\p\\\phi\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}\mathbf{M}&0&\rho_f\mathbf{M_\Sigma}\\0&0&\dfrac{\mathbf{M}_{fl}}{c^2}\\\rho_f\mathbf{M}_\mathbf{\Sigma}^\mathbf{T}&\dfrac{\mathbf{M}_{fl}^\mathbf{T}}{c^2}&\rho_f H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\p\\\phi\end{bmatrix}=0$$

où : $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ sont les matrices de rigidité et de masse de la structure

$\mathbf{M_\Sigma}$ est la matrice de couplage obtenue à partir de la forme bilinéaire $\int_\Sigma\phi\,\mathbf{u}_\mathbf{i}\mathbf{n}_\mathbf{i}$

$\mathbf{M_f}, \mathbf{M}_{fl}$ et $\mathbf{H}$ sont les matrices fluides obtenues à partir des formes bilinéaires : $\int_{\Omega_f} pq$, $\int_{\Omega_f} pq$ (ou $\int_{\Omega_f}\phi q$) et $\int_{\Omega_f}\nabla\phi.\nabla\psi$

3.2.3 Imposition d'une impédance avec la formulation en p et phi

D'une manière générale, une relation d'impédance à la frontière du fluide s'exprime ainsi :

$$p=Z\,\mathbf{v}.\mathbf{n}$$

où : Z est l'impédance imposée

$\mathbf{v}.\mathbf{n}$ est la vitesse normale sortante des particules fluides

On en déduit, d'après la loi de comportement du fluide, qui relie la pression au déplacement des particules fluides pour un fluide acoustique $\nabla p-\rho_f\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$:

$$\frac{\rho_f}{Z}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial n}$$

La discrétisation d'un telle équation conduit à un terme non symétrique dans une formulation en p et ϕ. On préfère formuler la condition par rapport au potentiel de déplacement, soit :

$$\nabla\phi+\frac{\rho_f}{Z}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

On obtient alors comme expression pour le terme de bord associé à la relation d'impédance :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_\Sigma \Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int_\Sigma \frac{\rho_f^2}{Z} \Phi \psi$$

On constate alors l'apparition (quelque peu artificielle) d'un terme en dérivée troisième par rapport au temps. En harmonique, qui est le domaine d'application privilégié des éléments vibro-acoustiques dans *Code_Aster*, cela ne pose pas de problème. On traite un terme en ω^3 sans difficulté. Pour le calcul transitoire, plutôt que d'introduire une approximation d'une dérivée troisième dans le schéma de Newmark implémenté dans les opérateurs d'intégration directe en dynamique dans *Code_Aster* DYNA_LINE_TRAN [U4.53.02] et DYNA_NON_LINE [U4.53.01], on préfère opérer une simple correction du second membre, ce qui revient en fait à considérer l'impédance de façon explicite. Les conditions de stabilité du schéma de Newmark ne sont plus rigoureusement les mêmes, mais l'expérience nous a montré qu'il est simple de parvenir à la convergence à partir des anciennes conditions.

Ce choix d'une correction explicite du second membre sera également justifié au moment de l'implémentation d'éléments paraxiaux d'ordre 1, qu'il rend nettement plus aisée.

3.2.4 Formulation détaillée

On propose ici la formulation précise pour un fluide acoustique modélisé sur un domaine Ω avec une condition anéchoïque sur une partie Σ_a de la frontière Σ du domaine. En dehors de cela, on décompose la frontière en une surface libre et une partie en contact avec un solide rigide. L'introduction de sollicitations extérieures ou la présence d'une structure élastique se modélise aisément par les méthodes courantes. Les éléments de volume et de surface sont formulés en p et Φ.
Les équations dans le fluide sont :

$\rho_f \Delta \Phi + \frac{1}{c^2} p = 0$ dans le volume Ω éq 3.2.4-1

$p = \rho_f \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ dans le volume Ω éq 3.2.4-2

$p = 0$ sur la surface libre éq 3.2.4-3

$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ sur la paroi rigide éq 3.2.4-4

$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t}$ sur la partie de la frontière avec condition anéchoïque éq 3.2.4-5

On multiplie l'équation [éq 3.2.4-1] par un champ de potentiel virtuel y et on intègre dans Ω :

$$\int_{\Omega_f} \left[\frac{1}{c^2} p \psi + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \Phi . \nabla \psi) \right] + \int_\Sigma \psi \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) = 0$$ d'après la formule de Green

Soit, avec les conditions aux limites sur Σ et l'équation [éq 3.2.4-2] :

$$\int_{\Omega_f} \left[\frac{1}{c^2} p \psi + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \Phi . \nabla \psi) \right] + \int_\Sigma \psi \rho_f \frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

On peut dès lors appliquer la condition d'impédance formulée en pression :

$$\int_{\Sigma_a} \psi \rho_f \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{c} \int_{\Sigma_a} \psi \rho_f \frac{\partial p}{\partial t}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

De plus, pour parvenir à une formulation symétrique des termes de volume, on multiplie l'équation [éq 3.2.4-2] par un champ de pression virtuel q et on intègre dans Ω :

$$\int_{\Omega_f} \frac{pq}{\rho_f c^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Omega_f} \frac{\Phi q}{c^2} = 0$$

En sommant les deux équations variationnelles, on obtient :

$$\frac{1}{\rho_f c^2} \int_{\Omega_f} pq + \rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{\rho_f c^2} \int_{\Omega_f} (\Phi q + p\psi) - \int_{\Omega_f} \nabla \Phi . \nabla \psi \right] - \frac{1}{c} \int_{\Sigma_a} \psi \rho_f \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Matriciellement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \varphi \end{bmatrix} - \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\mathbf{M}_{fl}}{c^2} \\ \frac{\mathbf{M}_{fl}^{\mathbf{T}}}{c^2} & \rho_f \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = 0$$

où les sous-matrices $\mathbf{M_f}, \mathbf{M}_{fl}$ et $\mathbf{H}$ discrétisent les mêmes formes bilinéaires que précédemment.

La sous-matrice $\mathbf{A}$ discrétise le terme $\int_{\Sigma_a} \psi \rho_f \frac{\partial p}{\partial t}$. La matrice d'amortissement obtenue n'est pas symétrique, comme on l'avait prédit plus haut. C'est pourquoi on rejette ce terme au second membre.

3.2.5 Intégration temporelle directe

Dans notre cas, en raison de la non symétrie de la matrice d'impédance, on choisit de considérer le terme anéchoïque de façon explicite comme nous l'avons évoqué auparavant. Cela revient à le calculer à l'instant t et à le placer parmi les sollicitations lors de l'expression de l'équilibre dynamique à l'instant $t+\Delta t$.
On résout :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{t+\Delta t} \\ \varphi_{t+\Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\mathbf{M}_{fl}}{c^2} \\ \frac{\mathbf{M}_{fl}^{\mathbf{T}}}{c^2} & \rho_f \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_{t+\Delta t} \\ \ddot{\varphi}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_t \\ \dot{\varphi}_t \end{bmatrix} \quad \text{éq 3.2.5-1}$$

Au lieu de :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{t+\Delta t} \\ \varphi_{t+\Delta t} \end{bmatrix} - \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{t+\Delta t} \\ \dot{\varphi}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\mathbf{M}_{fl}}{c^2} \\ \frac{\mathbf{M}_{fl}^{\mathbf{T}}}{c^2} & \rho_f \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_{t+\Delta t} \\ \ddot{\varphi}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = 0$$

Ainsi, on n'a pas de matrice non symétrique à traiter dans le système donnant $\mathbf{X}$ à l'instant $t+\Delta t$.

Remarque :

Dans un calcul non linéaire, on réactualise le second membre à chacune des itérations internes. Le calcul peut donc s'avérer plus exact et plus stable dans ce cas.

3.3 Utilisation dans *Code_Aster*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La prise en compte d'éléments fluides anéchoïques et le calcul de leur impédance nécessite une modélisation spécifique sur les frontières absorbantes :

- en 2D avec la modélisation '2D_FLUI_ABSO' sur les éléments finis de type MEFASEn ($n=2,3$) sur les arêtes absorbantes à n nœuds.
- en 3D avec la modélisation '3D_FLUI_ABSO' sur les éléments finis de type MEFA_FACEn ($n=3,4,6,8,9$) sur les faces absorbantes à n nœuds.

En analyse harmonique avec l'opérateur DYNA_LINE_HARM [U4.53.11], on calcule au préalable une impédance mécanique par l'option IMPE_MECA de l'opérateur CALC_MATR_ELEM [U4.61.01] et on la renseigne dans DYNA_LINE_HARM (mot clé MATR_IMPE_PHI).

Le calcul de l'option IMPE_MECA nécessite une charge spécifique définie par le mot clé IMPE_FACE de l'opérateur AFFE_CHAR_MECA ; on y renseigne le groupe de mailles d'absorbants fluides ainsi que la valeur d'impédance qu'on y affecte derrière l'opérande IMPE : cette valeur vaut $\rho_f c$. A noter que si on veut représenter un taux de réflexion r , par exemple dans le cas de la présence d'alluvions en fond de retenue, il faut alors corriger la valeur de la célérité c par une nouvelle valeur c' telle que $c'=c\frac{1+r}{1-r}$.

En analyse transitoire, la prise en compte de la force correctrice due aux termes d'impédance est automatique avec les modélisations d'éléments absorbants dans les opérateurs DYNA_LINE_TRAN [U4.53.02] et DYNA_NON_LINE [U4.53.01]. En vue de sa formulation explicite, l'utilisation de ce type d'élément absorbant peut conditionner la stabilité numérique de la solution du problème global, même dans les cas où un schéma d'intégration en temps de la famille de Newmark est utilisé. Dans ce cas, le choix d'un pas de temps suffisamment fin, voire proche de la condition de Courant, est par conséquent conseillé pour la résolution transitoire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Éléments absorbants élastiques dans *Code_Aster*

Cette partie présente l'essentiel des contraintes générales d'implémentation d'éléments élastiques de frontière absorbants avec l'approximation paraxiale d'ordre 0 dans *Code_Aster*. On rappelle la relation d'impédance paraxiale d'ordre 0 telle qu'elle a été établie par Modaressi pour un domaine élastique linéaire :

$$\mathbf{t}(\mathbf{u})=\rho\left(c_p\frac{\partial \mathbf{u}_{\perp}}{\partial t}+c_s\frac{\partial \mathbf{u}_{//}}{\partial t}\right)$$

$\mathbf{u}_T$ devient $\mathbf{u}_3$ et $\mathbf{u}_{//}$ devient $\mathbf{u}'$

4.1 Adaptation du chargement sismique aux éléments paraxiaux

On a présenté dans la première partie le principe de prise en compte du champ incident grâce aux éléments paraxiaux. Il convient ici de présenter les méthodes de modélisation du chargement sismique dans *Code_Aster* pour pouvoir adapter les données aux exigences des éléments paraxiaux.

L'équation fondamentale de la dynamique associée à un modèle quelconque 2D ou 3D discrétisé en éléments finis de milieu continu ou de structure et en l'absence de chargement extérieur s'écrit dans le repère absolu :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}_a+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_a+\mathbf{K}\mathbf{X}_a=0$$

On décompose le mouvement des structures en un mouvement d'entraînement $\mathbf{X}_e$ et un mouvement relatif $\mathbf{X}_r$.

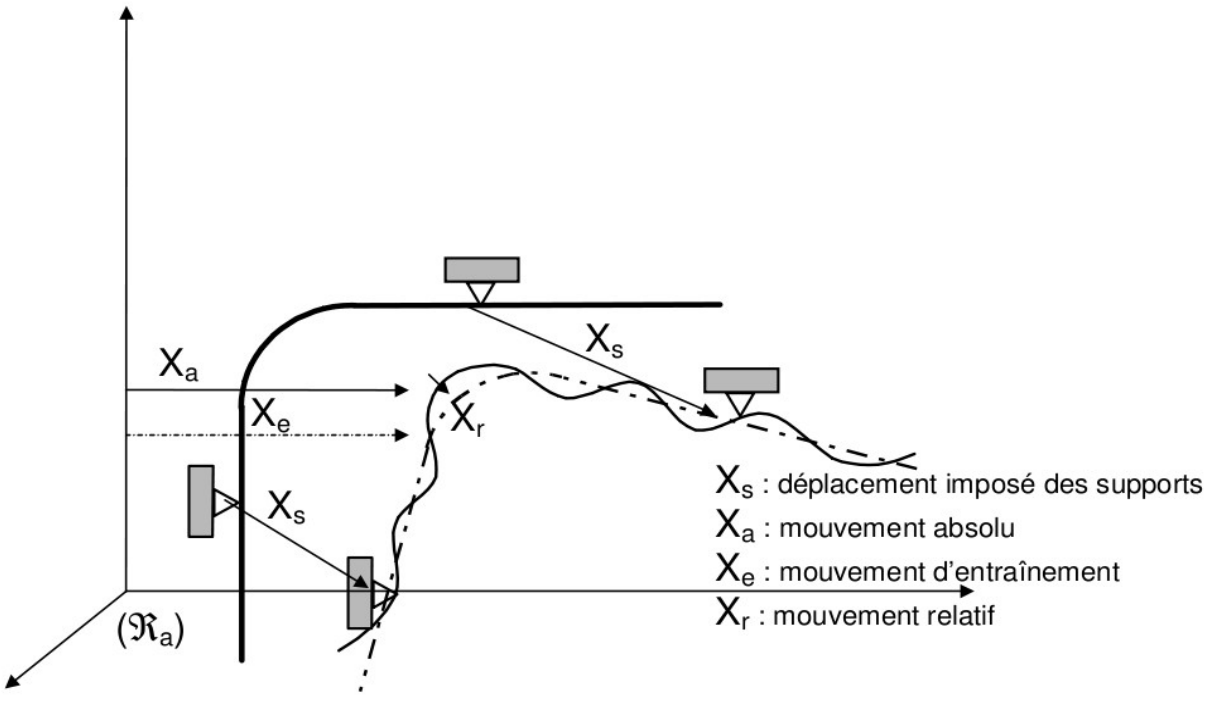


Figure 4.1-a : Décomposition du mouvement des structures

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ainsi, $\mathbf{X_a}=\mathbf{X_r}+\mathbf{X_e}$

- $\mathbf{X_a}$ est le vecteur des déplacements dans le repère absolu,
- $\mathbf{X_r}$ est le vecteur des déplacements relatifs, c'est-à-dire le vecteur des déplacements de la structure par rapport à la déformée qu'elle aurait sous l'action statique des déplacements imposés au niveau des supports $\mathbf{X_S}$. $\mathbf{X_r}$ est donc nul aux points d'ancrage,
- $\mathbf{X_e}$ est le vecteur des déplacements d'entraînement de la structure produit statiquement par le déplacement imposé des supports $\mathbf{X_S}$: $\mathbf{X_e}=\mathbf{\Psi X_s}$,
- $\mathbf{\Psi}$ est la matrice des modes statiques. Les modes statiques représentent la réponse de la structure à un déplacement unitaire imposé à chaque degré de liberté de liaison (les autres étant bloqués), en l'absence de forces extérieures. Ainsi, $\mathbf{K\Psi}=0$, c'est-à-dire, $\mathbf{KX}_e=0$. Dans le cas du mono-appui (tous les appuis subissent le même mouvement imposé), $\mathbf{\Psi}$ est un mode de corps rigide.

Hypothèse dans *Code_Aster* :

On suppose que l'amortissement dissipé par la structure est de type visqueux c'est-à-dire que la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse relative de la structure. Ainsi, $\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_e=0$.

L'équation fondamentale de la dynamique dans le repère relatif s'écrit alors :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}_\mathbf{r}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_\mathbf{r}+\mathbf{KX_r}=-\mathbf{M\Psi}\ddot{\mathbf{X}}_\mathbf{S}$$

L'opérateur CALC_CHAR_SEISME [U4.63.01] calcule le terme $-\mathbf{M\Psi}$, ou plus exactement , $-\mathbf{M\Psi d}$ où $\mathbf{d}$ est un vecteur unitaire tel que $\mathbf{X_s}=\mathbf{d}.f(t)$ avec f une fonction scalaire du temps.

On distingue deux types de chargements sismiques introduits dans *Code_Aster* grâce à l'opérateur CALC_CHAR_SEISME :

1) Le chargement de type MONO_APPUI, pour lequel $\mathbf{\Psi}$ est la matrice identité (les modes statiques sont des modes de corps rigide),
2) Le chargement de type MULTI_APPUI, pour lequel $\mathbf{\Psi}$ est quelconque.

D'après la méthode de prise en compte du champ incident avec les éléments paraxiaux présentée dans la première partie, il nous faut connaître sur la frontière le déplacement et les contraintes dus au champ incident. Pour le chargement de type MULTI_APPUI, seul le déplacement est directement accessible à tout instant. Il semble donc difficile de permettre l'utilisation d'un tel mode de chargement avec des éléments paraxiaux dans le sol. D'ailleurs, si un tel chargement modélise les déplacements imposés des appuis, il ne requiert pas une modélisation du sol puisque toute l'influence est prise en compte par ces déplacements.

Le cas MONO_APPUI peut être perçu différemment. Il représente une accélération d'ensemble appliquée au modèle. Dès lors, la propagation d'onde dans le sol peut avoir un rôle à jouer dans le comportement de la structure, puisque les mouvements de l'interface sol-structure ne sont pas imposés. De plus, les éléments paraxiaux sont utilisables avec ce type de chargement car il ne crée pas de contraintes à la frontière du maillage (un mode de corps rigide ne crée pas de déformations). Dès lors, on dispose de toutes les données nécessaires au calcul de l'impédance absorbante sur la frontière.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarque 1 :

Dans le cas d'une sollicitation sismique `MONO_APPUI` *, le calcul dynamique se fait dans le repère relatif. Si on revient sur le terme à discrétiser sur les éléments paraxiaux (voir première partie), on remarque que* u_i *correspond exactement au déplacement d'entraînement* $\mathbf{X_e}$ *présenté plus haut. Ainsi,* $\mathbf{u}-\mathbf{u_i}$ *correspond au déplacement relatif calculé pendant le calcul. Dès lors, la relation à prendre en compte sur les éléments paraxiaux dans une telle configuration est simplement :*

$$\mathbf{t}(\mathbf{u})=A_0\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)$$

Remarque 2 :

Dans le cas d'un calcul d'interaction sol-fluide-structure avec fluide infini, la pression à prendre en compte pour le calcul de l'impédance anéchoïque dans le fluide est bien la pression absolue, si on n'a pas de champ incident dans le fluide (ce qui est souvent le cas). La correction que l'on pouvait se dispenser de faire pour le sol doit alors être faite pour les éléments paraxiaux fluides.

4.2 Implémentation des éléments en transitoire et en harmonique

4.2.1 Implémentation en transitoire

Le mode d'implémentation des éléments paraxiaux élastiques en transitoire est très voisin de celui présenté pour les éléments fluides. La différence vient essentiellement de la nécessité de décomposer le déplacement en une composante selon la normale à l'élément, correspondant à une onde P, et une composante dans le plan de l'élément, correspondant à une onde S. On est alors à même de discrétiser la relation d'impédance introduite dans la première partie :

$$\mathbf{t}(\mathbf{u})=\rho C_p\frac{\partial \mathbf{u_3}}{\partial t}+\rho C_s\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t}$$

On ne revient pas sur le schéma d'intégration temporelle que l'on a déjà décrit dans la partie précédente, sachant qu'on considère la relation d'impédance par un opérateur d'amortissement ajouté au premier membre.
Pour la prise en compte du terme supplémentaire :

$$\mathbf{t_1}(\mathbf{u})=\frac{\lambda+2\mu}{L}u_3\mathbf{e_3}+\frac{\mu}{L}\mathbf{u}'$$

on utilise cette fois-ci un opérateur de rigidité ajoutée au premier membre.

4.2.2 Implémentation en harmonique

Les éléments acoustiques fluides de *Code_Aster* proposent déjà la possibilité de prendre en compte une impédance imposée à la frontière du maillage en harmonique. Cela correspond au traitement d'un terme en ω^3 dans les équations, comme cité plus haut. Il est tentant d'introduire la possibilité d'imposer une impédance absorbante pour un problème élastique en harmonique.

Pour un calcul de réponse harmonique d'une structure infinie, la prise en compte de l'impédance absorbante comme une correction du second membre n'est évidemment pas applicable. Cependant, la relation d'impédance à l'ordre 0 exprime les termes surfaciques en fonction de la vitesse des nœuds de l'élément. On peut donc construire une pseudo-matrice d'amortissement visqueux traduisant la présence du domaine infini.
De la même façon, on construit (cf. 4.1.1) une pseudo-matrice de rigidité complétant le rôle de la matrice d'amortissement définie précédemment.

La décomposition de la relation d'impédance selon les composantes normale ou tangentielle du déplacement sur l'élément nous contraint à construire la matrice d'impédance dans un repère local sur l'élément. On définit ce repère local dans la routine élémentaire ainsi que la matrice de passage qui permet le retour à la base globale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Mode de chargement sismique par onde plane

En complément des méthodes de prise en compte du chargement sismique déjà disponible et en raison de l'inadéquation du mode MULTI_APPUI avec les éléments paraxiaux, il semble intéressant d'introduire un principe de chargement par onde plane. Cela correspond aux chargements classiquement rencontrés lors des calculs d'interaction sol-structure par les équations intégrales.

4.3.1 Caractérisation d'une onde plane en transitoire

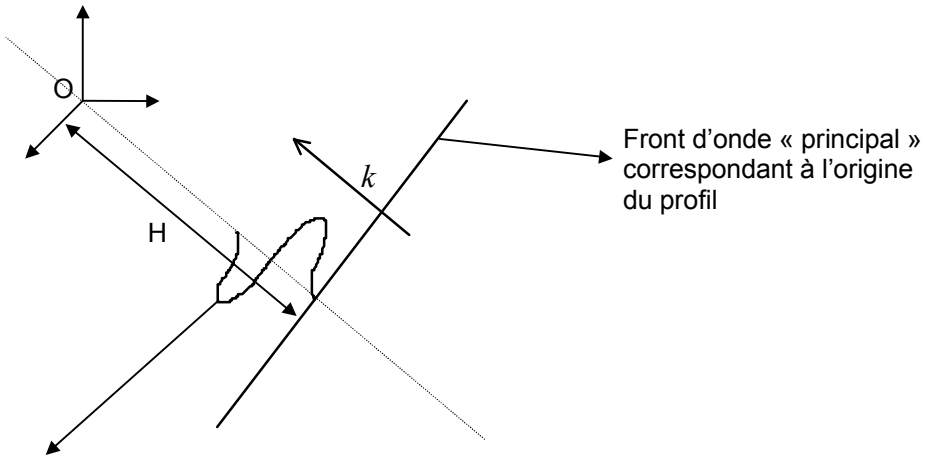
En harmonique, une onde plane élastique est caractérisée par sa direction, sa pulsation et son type (onde P pour les ondes de compression, ondes SV ou SH pour les ondes de cisaillement). En transitoire, la donnée de la pulsation, correspondant à une onde stationnaire en temps, doit être remplacée par la donnée d'un profil de déplacement dont on va prendre en compte la propagation au cours du temps dans la direction de l'onde.
Les directions des ondes P, SV et SH sont déterminées à partir du vecteur V renseigné par le paramètre DIRECTION. A savoir :

– P est colinéaire à V et normé à 1,
– SH est l'intersection du plan horizontal et du plan normal à V, et normé à 1,
– SV est le produit vectoriel de SH et de P. Il existe un cas d'indétermination avec cette règle quand le plan horizontal et le plan normal sont confondus. Dans ce cas, si $V=Z$ purement vertical, on impose $SH=Y$, et $SV=X$.

Plus précisément, on va considérer une onde plane sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=f(\mathbf{k}.\mathbf{x}-C_p t)\mathbf{k} \quad \text{pour une onde } P \text{ (avec } \mathbf{k} \text{ unitaire)}$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=f(\mathbf{k}.\mathbf{x}-C_S t)\wedge\mathbf{k} \quad \text{pour une onde } S \text{ (avec toujours } \mathbf{k} \text{ unitaire)}$$

f représente alors le profil de l'onde donné selon la direction $\mathbf{k}$.



Fonction f

H est la distance de l'origine au front d'onde principal.

4.3.2 Données utilisateur pour le chargement par onde plane

Conformément à la théorie exposée en première partie, il nous faut calculer la contrainte à la frontière du maillage due à l'onde incidente et le terme d'impédance correspondant au déplacement incident, soit :

$$\mathbf{t}(\mathbf{u_i}) \text{ et } A_0\left(\frac{\partial \mathbf{u_i}}{\partial t}\right)+A_1(\mathbf{u_i})$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour exprimer les contraintes, il nous faut disposer des déformations dues à l'onde incidente, la loi de comportement du matériau nous permettant de passer des unes aux autres.
Sur les éléments de frontière, on peut exprimer le tenseur des déformations linéarisées en chaque nœud par la formule classique :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,t)=\frac{1}{2}\left[\nabla \mathbf{u}(x,t)+{}^{t}\nabla \mathbf{u}(x,t)\right]$$

Finalement, pour estimer les contraintes dues au champ incident, il nous faut donc déterminer les dérivées $\frac{\partial(\mathbf{u_i})_j}{\partial x_k}$ pour j et k parcourant les trois directions de l'espace. On obtient ces quantités à partir de la définition de l'onde plane incidente :

$$\frac{\partial(\mathbf{u_i})_j}{\partial x_k}=k_k f'(\mathbf{k}.\mathbf{x}-C_m t)k_j \text{ avec } m=S \text{ ou } P$$

En ce qui concerne le terme d'impédance, il nous faut $\frac{\partial \mathbf{u_i}}{\partial t}=-C_m \dot{f}(\mathbf{k}.\mathbf{x}-C_m t)\mathbf{k}$, toujours avec $m=S$ ou P.

On voit alors que la fonction importante pour un chargement par onde plane avec des éléments paraxiaux d'ordre 0 n'est pas le profil de l'onde f, mais sa dérivée, soit f' soit $\dot{f}$. L'onde étant plane, le front d'onde est caractérisé par les plans $\mathbf{k}.\mathbf{x}-C_m t=cte$, d'où la relation : $\mathbf{k}.d\mathbf{x}=C_m dt$. Il y a donc l'équivalence suivante entre les deux dérivées de f : $f'=\frac{1}{C_m}\dot{f}$. On choisit de demander la fonction $\dot{f}$ à l'utilisateur comme donnée du calcul.
Toutefois, dans le cas optionnel où on ajoute des rigidités distribuées le long de la frontière du domaine éléments finis , l'utilisateur doit en plus fournir le profil de l'onde f.
D'autre part, pour bien calculer le déphasage en temps dû au passage de l'onde, il faut également indiquer le point d'entrée du chargement par onde plane dans la structure donné par le produit scalaire du vecteur d'onde et la position du point source d'entrée $\mathbf{k}.\mathbf{x_0}$ fournie par le paramètre DIST.
Pour la prise en compte de l'onde réfléchie, celle-ci est activée si on donne la position du point de sortie $\mathbf{k}.\mathbf{x_1}$ fournie par le paramètre DIST_REFLECHI. Dans ce cas, l'expression du profil de l'onde en tenant compte du déphasage spatial lié au passage de l'onde $\dot{f}(\mathbf{k}.(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})-C_m t)$ devient alors $\dot{f}(\mathbf{k}.(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})-C_m t)+\dot{f}(\mathbf{k}.(2\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}-\mathbf{x})-C_m t)$ avec $m=S$ ou P.
On peut dès lors récapituler les paramètres à entrer pour la définition d'un chargement par onde plane en transitoire :

Type de l'onde	: P, SV ou SH
Direction de l'onde	: k_x, k_y, k_z
Dérivée du profil de l'onde	: $\dot{f}(t)$ pour $t\in[0,+\infty[$
Profil de l'onde (optionnel)	: $f(t)$ pour $t\in[0,+\infty[$
Source spatiale du chargement	: $\mathbf{k}.\mathbf{x_0}$
Sortie spatiale du chargement	: $\mathbf{k}.\mathbf{x_1}$

4.4 Utilisation dans *Code_Aster*

La prise en compte d'éléments élastiques absorbants et le calcul de leur impédance nécessite une modélisation spécifique sur les frontières absorbantes :

- en 2D avec la modélisation 'D_PLAN_ABSO' sur les arêtes absorbantes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- en 3D avec la modélisation '3D_ABSO' sur les faces absorbantes.

La formulation de ces éléments étant assez rudimentaire pour pouvoir justement qu'ils soient assimilés à des discrets amortisseurs et donc être utilisés dans des analyses harmoniques, en conséquence, d'une part, on ne doit pas les bloquer lors d'analyses dynamiques, et d'autre part, une contrepartie est que la qualité de leur utilisation dépend de la qualité de la forme de la frontière. Un bon test de cette qualité s'inspire des cas tests SDLV120 et SDLV121 et peut être basé sur l'absorption plus ou moins totale au niveau de cette frontière d'un passage d'onde de déplacement imposé en haut de structure. Comme pour ces tests, on peut s'assurer que l'onde ne revient pas en regardant un degré de liberté de vitesse sur un nœud à proximité de la frontière.

En analyse harmonique avec l'opérateur DYNA_LINE_HARM [U4.53.11], on calcule au préalable un amortissement mécanique par l'option AMOR_MECA de l'opérateur CALC_MATR_ELEM [U4.61.01] et on le renseigne dans DYNA_LINE_HARM (mot clé MATR_AMOR).

En analyse transitoire, le calcul de l'amortissement mécanique est automatique avec les modélisations d'éléments absorbants dans l'opérateur DYNA_NON_LINE [U4.53.01]. Avec l'opérateur DYNA_LINE_TRAN [U4.53.02], on calcule au préalable cet amortissement mécanique de manière explicite par l'option AMOR_MECA de l'opérateur CALC_MATR_ELEM [U4.61.01] et on le renseigne par le mot clé MATR_AMOR.

Pour ces deux analyses, le calcul de la rigidité mécanique ajoutée est automatique avec les modélisations d'éléments absorbants quand on calcule systématiquement l'option RIGI_MECA quel que soit l'opérateur de calcul.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Bibliographie

1) J. M. CREPEL, " Modélisation tridimensionnelle de l'interaction sol-structure par des éléments finis et infinis.", Thèse docteur-ingénieur, Ecole Centrale de Paris (1983))

2) M. COHEN, P. C. JENNINGS, "Silent boundary methods for acoustic and elastic wave equations.", S. S. A. (1977.

3) H. MODARESSI, " Modélisation numérique de la propagation des ondes dans les milieux poreux élastiques.", Thèse docteur-ingénieur, Ecole Centrale de Paris (1987.

4) D. CLOUTEAU, A. S. BONNET-BEN DHIA, " Propagation d'ondes dans les solides.", Cours de l'Ecole Centrale de Paris

5) B. ENGQUIST, A. MAJDA, " Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves.", Mathematics of Computation (1977)

6) Fe. WAECKEL, " Eléments vibro-acoustiques.", Document de référence. *Code_Aster* [R4.02.02]

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)