# Élasticité anisotrope

**Résumé**

Ce document traite de la thermoélasticité anisotrope, utilisée pour les modélisations de milieux continus 3D et 2D (C_PLAN, D_PLAN, AXIS), ou les couches des coques composites.

Le milieu thermoélastique peut être anisotrope suivant les 3 directions (on parle d'élasticité orthotrope), ou bien dans isotrope dans deux directions (on parle d'élasticité isotrope transverse), ou bien il peut présenter une symétrie cubique.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des matières

## Table des Matières

1 Introduction....3
2 Typologie des matrices de Hooke....3
2.1 L'orthotropie....3
2.2 Isotropie transverse....4
2.3 Isotropie....4
3 Matrice de Hooke et matrice de souplesse....4
3.1 Notations....4
3.2 Cas 3D....6
3.2.1 Orthotropie....6
3.2.1.1 Matrice de souplesse....6
3.2.1.2 Matrice de Hooke....6
7
3.2.2 Isotropie transverse....7
3.2.2.1 Matrice de souplesse....7
3.2.2.2 Matrice de Hooke....8
3.2.3 Élasticité à symétrie cubique....8
3.2.4 Isotropie....9
3.2.4.1 Matrice de souplesse en fonction de et....9
3.2.4.2 Matrice de Hooke en fonction de et....10
3.2.4.3 Matrice de souplesse en fonction des coefficients de Lamé et....10
3.2.4.4 Matrice de Hooke en fonction des coefficients de Lamé et....11
3.3 Cas 2D orthotrope en déformations planes et axisymétrique....11
3.3.1 Matrice de souplesse....11
3.3.2 Matrice de Hooke....11
3.4 Cas 2D orthotrope en contraintes planes....12
3.4.1 Matrice de souplesse....12
3.4.2 Matrice de Hooke....12
4 Utilisation dans Code_Aster....13
5 Bibliographie....13
6 Description des versions du document....14



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Introduction

L'objectif de ce document est de donner l'expression des matrices de souplesse et de Hooke pour des matériaux thermoélastiques orthotrope, isotrope transverse et à symétrie cubique dans les cas 3D, 2D-contraintes planes, 2D-déformations planes et axisymétrie.

En toute rigueur, pour les matériaux thermoélastiques linéaires, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations et du différentiel de température. On écrit :

$$\sigma_{ij} = H_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}\left(T - T_{réf}\right)\right)$$

Nous parlons de « matrices » de Hooke car, par souci de simplification, nous n'avons pas adopté la notation d'un tenseur d'ordre 4 pour $\mathbf{H}$, au profit de la notation de W.VOIGT, où les tenseurs d'ordre 2 sont représentés par des vecteurs à 6 composantes et les tenseurs d'ordre 4 par des matrices $6\times 6$.

La nature symétrique de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ et l'adoption pour ces tenseurs d'ordre 2 d'une forme vectorielle permet d'écrire :

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \left[\mathbf{H}\right]\left(|\boldsymbol{\varepsilon}| - |\boldsymbol{\alpha}|\left(T - T_{réf}\right)\right)$$

où $|\boldsymbol{\sigma}|$ et $|\boldsymbol{\varepsilon}|$ sont la représentation vectorielle des tenseurs d'ordre 2 $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$, et où $\left[\mathbf{H}\right]$, la matrices de Hooke, est une matrice $6\times 6$, nécessairement symétrique, soit a priori 21 coefficients indépendants, dans le cas tridimensionnel :

$$\left[\mathbf{H}\right] = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ & & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ SYM & & & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ & & & & H_{55} & H_{56} \\ & & & & & H_{66} \end{pmatrix}$$

L e v ecteur $|\boldsymbol{\alpha}|$ d ésigne la représentation vectorielle d u tenseur d'ordre 2 de dilatation thermique, nécessairement symétrique, soit a priori 6 coefficients indépendants, dans le cas t ridimensionnel .

# 2 Typologie des matrices de Hooke

## 2.1 L'orthotropie

Il s'agit d'une situation où le matériau élastique exhibe deux symétries par rapport à deux plans perpendiculaires (symétrie *orthorhombique*). Le tenseur d'élasticité possède a priori 9 coefficients indépendants, conséquence des relations obtenues avec ces deux symétries entre les 21 coefficients.

Le tenseur de dilatation thermique possède a priori 3 coefficients indépendants, conséquence des relations obtenues avec ces deux symétries.

Dans les axes d'orthotropie :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$[\mathbf{H}]=\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & H_{22} & H_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & H_{33} & 0 & 0 & 0 \\ SYM & & & H_{44} & 0 & 0 \\ & & & & H_{55} & 0 \\ & & & & & H_{66} \end{pmatrix} \quad [\boldsymbol{\alpha}]=\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Isotropie transverse

L'isotropie transverse (ou de révolution) est une restriction de l'orthotropie dans où l'on a l'isotropie dans l'un des deux plans orthogonaux de symétrie élastique, suite à une invariance par rotation de $2\pi/3$ autour de l'axe orthogonal au plan d'isotropie transverse par exemple $x_3=0$. Le tenseur d'élasticité possède a priori 5 coefficients indépendants.

La matrice $[\mathbf{H}]$ aura la même forme que pour l'orthotropie mais avec quatre relations supplémentaires entre les composantes. Ainsi on aura ainsi pour l'isotropie transverse dans le plan $x_3=0$ :

$$H_{11}=H_{22} \quad ; \quad H_{13}=H_{23} \quad ; \quad H_{44}=H_{55} \quad \text{et} \quad 2H_{44}=H_{11}-H_{12} \qquad \text{[éq 2.2-1 ]}$$

Le tenseur de dilatation thermique possède a priori 2 coefficients indépendants :

$$\alpha_{11}=\alpha_{22} \qquad \text{éq 2.2-2 ]}$$

## 2.3 Isotropie

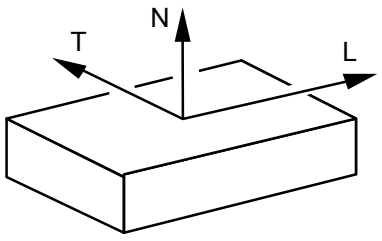
Le matériau est isotrope si $[\mathbf{H}]$ reste invariant dans tout changement de repère. Le tenseur d'élasticité possède a priori 2 coefficients indépendants. Il n'y a qu'un coefficient de dilatation thermique

# 3 Matrice de Hooke et matrice de souplesse

## 3.1 Notations

Au lieu d'utiliser les indices 1, 2 et 3 pour repérer les axes du repère cartésien, on va utiliser les indices correspondants $L$, $T$ et $N$ :

1. $L$ pour longitudinal
2. $T$ pour transversal
3. $N$ pour normal






Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les coefficients qui interviennent sont les suivants :

| Mot clé | Notation | signification |
|---|---|---|
| E_L | $E_L$ | Module de Young longitudinal |
| E_T | $E_T$ | Module de Young transversal |
| E_N | $E_N$ | Module de Young normal |
| G_LT | $G_{LT}$ | Module de cisaillement dans le plan $(L,T)$ |
| G_TN | $G_{TN}$ | Module de cisaillement dans le plan $(T,N)$ |
| G_LN | $G_{LN}$ | Module de cisaillement dans le plan $(L,N)$ |
| NU_LT | $\nu_{LT}$ | Coefficient de Poisson dans le plan $(L,T)$ |
| NU_TN | $\nu_{TN}$ | Coefficient de Poisson dans le plan $(T,N)$ |
| NU_LN | $\nu_{LN}$ | Coefficient de Poisson dans le plan $(L,N)$ |
| ALPHA_L | $\alpha_L$ | Coefficient de dilatation thermique moyen longitudinal |
| ALPHA_T | $\alpha_T$ | Coefficient de dilatation thermique moyen transversal |
| ALPHA_N | $\alpha_N$ | Coefficient de dilatation thermique moyen normal |

**Remarque très importante :**

$\nu_{LT}$ *est différent de* $\nu_{TL}$ *:*

*Si l'on applique une traction suivant l'axe* $L$ *:*

$\varepsilon_{LL}=\frac{\sigma_{LL}}{E_L}$ *(loi de Hooke suivant une direction).*

Cette traction est accompagnée, proportionnellement, d'une contraction $-\nu_{LT}\cdot\frac{\sigma_{LL}}{E_L}$ suivant l'axe $T$, et d'une contraction $-\nu_{LN}\cdot\frac{\sigma_{LL}}{E_L}$ suivant l'axe $N$.

Le premier indice indique l'axe où s'exerce l'effet du chargement et le second indice indique la direction du chargement.

Ensuite on exerce une traction suivant l'axe $T$, puis une traction suivant $N$, on obtient :

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{LL}&=\frac{\sigma_{LL}}{E_L}-\nu_{TL}\frac{\sigma_{TT}}{E_T}-\nu_{NL}\frac{\sigma_{NN}}{E_N}\\ \varepsilon_{TT}&=-\nu_{LT}\frac{\sigma_{LL}}{E_L}+\frac{\sigma_{TT}}{E_T}-\nu_{NT}\frac{\sigma_{NN}}{E_N}\\ \varepsilon_{NN}&=-\nu_{LN}\frac{\sigma_{LL}}{E_L}-\nu_{TN}\frac{\sigma_{TT}}{E_T}+\frac{\sigma_{NN}}{E_N}\end{aligned}\right\} \quad \text{[éq 3.1-1 ]}$$

La matrice de souplesse $\left[\mathbf{H}\right]^{-1}$ étant symétrique ; on en déduit :

$$\frac{\nu_{LT}}{E_L}=\frac{\nu_{TL}}{E_T}\quad;\quad\frac{\nu_{LN}}{E_L}=\frac{\nu_{NL}}{E_N}\quad;\quad\frac{\nu_{TN}}{E_T}=\frac{\nu_{NT}}{E_N}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 3.2 Cas 3D

### 3.2.1 Orthotropie

#### 3.2.1.1 Matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{TL}}{E_T} & \frac{-\nu_{NL}}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & \frac{-\nu_{NT}}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LN}}{E_L} & \frac{-\nu_{TN}}{E_T} & \frac{1}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{LT}} & 0 & 0 \\ & SYM & & & \frac{1}{G_{LN}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{TN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]^{-1}$ – Orthotropie

#### 3.2.1.2 Matrice de Hooke

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{LL} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_{TN}\nu_{NT})}{\Delta \cdot E_T E_N} & \frac{(\nu_{TL}+\nu_{NL}\nu_{TN})}{\Delta \cdot E_T . E_N} & \frac{(\nu_{NL}+\nu_{TL}\nu_{NT})}{\Delta \cdot E_T . E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\nu_{LT}+\nu_{LN}\nu_{NT})}{\Delta \cdot E_L E_N} & \frac{(1-\nu_{NL}\nu_{LN})}{\Delta \cdot E_L . E_N} & \frac{(\nu_{NT}+\nu_{NL}.\nu_{LT})}{\Delta \cdot E_L . E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\nu_{LN}+\nu_{LT}.\nu_{TN})}{\Delta \cdot E_L . E_T} & \frac{(\nu_{TN}+\nu_{TL}.\nu_{LN})}{\Delta \cdot E_L . E_T} & \frac{(1-\nu_{LT}.\nu_{TL})}{\Delta \cdot E_L . E_T} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{LT} & 0 & 0 \\ & SYM & & & G_{LN} & 0 \\ & & & & & G_{TN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]$ – Orthotropie

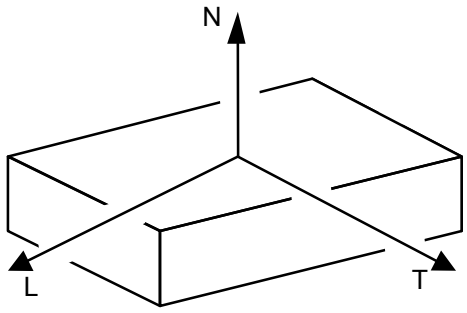
avec : $\frac{\nu_{TL}}{E_T} = \frac{\nu_{LT}}{E_L}$ ; $\frac{\nu_{NL}}{E_N} = \frac{\nu_{LN}}{E_L}$ ; $\frac{\nu_{NT}}{E_N} = \frac{\nu_{TN}}{E_T}$

avec : $\frac{1}{\Delta} = \frac{E_L E_T E_N}{1-\nu_{TN}\nu_{NT}-\nu_{NL}\nu_{LN}-\nu_{LT}\nu_{TL}-2\nu_{TN}\nu_{NL}\nu_{LT}}$


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

### 3.2.2 Isotropie transverse

L'isotropie transverse est définie ici dans le plan $(L,T)$, et la direction d'orthotropie est donc $N$. On peut attirer l'attention du lecteur sur le fait que cette convention diffère d'une convention usuelle qui désigne par « direction longitudinale » la direction d'orthotropie des matériaux transverses isotropes.




On note que les coefficients de dilatation vérifient : $\alpha_T=\alpha_L$.

#### 3.2.2.1 Matrice de souplesse

La matrice $\left[\mathbf{H}\right]^{-1}$ peut être déduite directement de la matrice $\left[\mathbf{H}\right]^{-1}$ - Orthotropie en utilisant les propriétés de l'isotropie transverse.

Dans le plan $(L,T)$, cf. [éq 2.2-1] :

$$E_L=E_T$$
$$\nu_{TL}=\nu_{LT}$$
$$G_{LT}=\frac{E_L}{2\left(1+\nu_{LT}\right)}$$

Dans les plans $(L,N)$ et $(T,N)$ :

$$\nu_{NT}=\nu_{NL}$$
$$\nu_{LN}=\nu_{TN}$$
$$G_{TN}=G_{LN}$$
$$\frac{\nu_{NT}}{E_N}=\frac{\nu_{LN}}{E_L}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & \frac{-\nu_{NL}}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{TL}}{E_L} & \frac{1}{E_L} & \frac{-\nu_{NT}}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{LN}}{E_L} & \frac{-\nu_{TN}}{E_L} & \frac{1}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu_{LT})}{E_L} & 0 & 0 \\ & SYM & & & \frac{1}{G_{LN}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{TN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]^{-1}$ - Isotropie transverse

#### 3.2.2.2 Matrice de Hooke

La matrice $[\mathbf{H}]$ possède les mêmes symétries que $[\mathbf{H}]^{-1}$ .

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{NL}.\nu_{LN}}{\Delta'.E_L.E_N} & \frac{\nu_{LT}+\nu_{NL}\nu_{LN}}{\Delta'.E_L.E_N} & \frac{\nu_{NL}+\nu_{LT}\nu_{NL}}{\Delta'.E_L.E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{TL}+\nu_{NL}\nu_{LN}}{\Delta'.E_L.E_N} & \frac{1-\nu_{NL}.\nu_{LN}}{\Delta'.E_L.E_N} & \frac{\nu_{LN}+\nu_{LT}\nu_{LN}}{\Delta'.E_L.E_N} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{LN}+\nu_{LT}.\nu_{LN}}{\Delta'.E_L^2} & \frac{\nu_{TN}+\nu_{LT}.\nu_{TN}}{\Delta'.E_L^2} & \frac{1-\nu_{LT}^2}{\Delta'.E_L^2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{E_L}{2(1+\nu_{LT})} & & \\ & & & & G_{LN} & \\ & & & & & G_{LN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]$ – Isotropie transverse

avec : $$\frac{1}{\Delta'} = \frac{E_L^2.E_N}{1-2\nu_{NL}.\nu_{LN}-\nu_{LT}^2-2\nu_{NL}.\nu_{LN}.\nu_{LT}}$$

### 3.2.3 Élasticité à symétrie cubique

L'élasticité à symétrie cubique advient lorsque outre les trois plans cartésiens de symétrie, les six plans tournés à 45° sont également de symétrie . On a alors 3 coefficients élasti ques indépendants. Cela correspond à une matrice d'élasticité de la forme :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{bmatrix} H_{1111} & H_{1122} & H_{1122} & & & & \\ H_{1122} & H_{1111} & H_{1122} & & & & \\ H_{1122} & H_{1122} & H_{1111} & & & & \\ & & & H_{1212} & & & \\ & & & & H_{1212} & & \\ & & & & & H_{1212} & \end{bmatrix}$$

Étant donné la symétrie cubique, il reste à déterminer 3 coefficients :

$$E_L=E_N=E_T=E,\quad G_{LT}=G_{LN}=G_{TN}=G,\quad \nu_{LN}=\nu_{LT}=\nu_{LN}=\nu$$

On note que les coefficients de dilatation vérifient : $\alpha_T=\alpha_L=\alpha_N$ .

Pour reproduire l'élasticité à symétrie cubique avec ELAS_ORTH, il suffit de calculer les coefficients de l'orthotropie tels que la matrice d'élasticité obtenue soit de la forme ci-dessus :

$$H_{1111}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$H_{1122}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$H_{1212}=G_{LT}=G_{LN}=G_{TN}$$

donc, tant que $(1+\nu)(1-2\nu)\neq 0$ (c'est à dire $\nu$ différent de $0.5$ ).

$\frac{H_{1122}}{H_{1111}}=\frac{\nu}{1-\nu}$ ce qui fournit $\nu=\frac{1}{1+\frac{H_{1111}}{H_{1122}}}$ puis $E=H_{1111}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}$

## 3.2.4 Isotropie

La loi de Hooke prend la forme suivante avec les coefficients de Lamé $\lambda$ et $\mu=G$ :

$$\sigma_{ij}=\lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}+2\,\mu\,\varepsilon_{ij}$$

### 3.2.4.1 Matrice de souplesse en fonction de $E$ et $\nu$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & SYM & & & \frac{1}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]^{-1}$ – Isotropie complète

#### 3.2.4.2 Matrice de Hooke en fonction de $E$ et $\nu$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & SYM & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]$ – Isotropie complète

#### 3.2.4.3 Matrice de souplesse en fonction des coefficients de Lamé $\lambda$ et $\mu$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\varepsilon_{LT} \\ 2\varepsilon_{LN} \\ 2\varepsilon_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} & \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} & \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} & \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ & SYM & & & \frac{1}{\mu} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \\ \sigma_{LN} \\ \sigma_{TN} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]^{-1}$ – Isotropie complète



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

#### 3.2.4.4 Matrice de Hooke en fonction des coefficients de Lamé $\lambda$ et $\mu$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{LL}\\ \sigma_{TT}\\ \sigma_{NN}\\ \sigma_{LN}\\ \sigma_{LT}\\ \sigma_{TN}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ & SYM & & \mu & 0 & 0\\ & & & & \mu & 0\\ & & & & & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{LL}\\ \varepsilon_{TT}\\ \varepsilon_{NN}\\ 2\varepsilon_{LN}\\ 2\varepsilon_{LT}\\ 2\varepsilon_{TN}\end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]$ – Isotropie complète avec les coefficients de Lamé

## 3.3 Cas 2D orthotrope en déformations planes et axisymétrique

### 3.3.1 Matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{LL}\\ \varepsilon_{TT}\\ 0\\ 2\varepsilon_{LT}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & -\frac{\nu_{NL}}{E_N} & 0\\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{NL}}{E_N} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{LL}\\ \sigma_{TT}\\ \sigma_{NN}\\ \sigma_{LT}\end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]^{-1}$ – Orthotropie plane en déformations planes et axisymétrie

### 3.3.2 Matrice de Hooke

$$\begin{bmatrix}\sigma_{LL}\\ \sigma_{TT}\\ \sigma_{NN}\\ \sigma_{LT}\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\frac{(1-\nu_{TN}\nu_{NT})}{E_T E_N} & \frac{(\nu_{TL}+\nu_{NL}\nu_{TN})}{E_T.E_N} & \frac{(\nu_{NL}+\nu_{TL}\nu_{NT})}{E_T.E_N} & 0\\ \frac{(\nu_{LT}+\nu_{LN}\nu_{NT})}{E_L E_N} & \frac{(1-\nu_{NL}\nu_{LN})}{E_L.E_N} & \frac{(\nu_{NT}+\nu_{NL}.\nu_{LT})}{E_L.E_N} & 0\\ \frac{(\nu_{LN}+\nu_{LT}.\nu_{TN})}{E_L.E_T} & \frac{(\nu_{TN}+\nu_{TL}.\nu_{LN})}{E_L.E_T} & \frac{(1-\nu_{LT}.\nu_{TL})}{E_L.E_T} & 0\\ 0 & 0 & 0 & G_{LT}\cdot\Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{LL}\\ \varepsilon_{TT}\\ 0\\ 2\varepsilon_{LT}\end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]$ – Orthotropie plane en déformations planes et axisymétrie

avec : $\frac{1}{\Delta}=\frac{E_L E_T E_N}{1-\nu_{TN}\nu_{NT}-\nu_{NL}\nu_{LN}-\nu_{LT}\nu_{TL}-2\nu_{TN}\nu_{NL}\nu_{LT}}$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 3.4 Cas 2D orthotrope en contraintes planes

### 3.4.1 Matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\,\varepsilon_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{v_{TL}}{E_T} & 0 & 0 \\ -\frac{v_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{NN} \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]^{-1}$ – Orthotropie plane en contraintes planes

### 3.4.2 Matrice de Hooke

En utilisant le système d'équations [éq 3.1-1], on obtient :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ 0 \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-v_{LT}.v_{TL}} \begin{bmatrix} E_L & v_{TL}E_T & 0 & 0 \\ v_{LT}E_L & E_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{NN} \\ 2\,\varepsilon_{LT} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{H}]$ – Orthotropie en contraintes planes

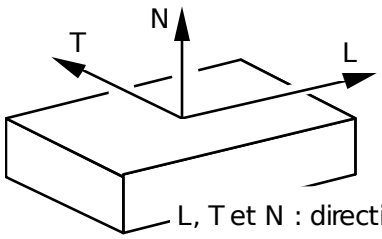


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Utilisation dans *Code_Aster*

Dans Code_*Aster*, la définition des caractéristiques élastiques orthotropes constantes ou fonctions de la température s'effectuent par la commande DEFI_MATERIAU, mots clés ELAS_ORTH, ELAS_ISTR, ELAS_ISTR_FO ou ELAS_ORTH_FO pour les éléments de coque et les éléments massifs isoparamétriques ou les couches constitutives d'un composite (voir la commande DEFI_COMPOSITE ).

Pour définir le repère d'orthotropie $(L,T,N)$ lié aux éléments, on peut se reporter aux documentations [U4.42.03] DEFI_COMPOSITE et [U4.42.01] AFFE_CARA_ELEM.



L, T et N : directions d'orthotropie
longitudinale, transversale et normale

/ ELAS_ORTH = _F (♦ E_L = ygl Module de Young longitudinal.
♦ E_T = ygt Module de Young transversal.
◊ E_N = ygn Module de Young normal.
♦ GL_T = glt Module de cisaillement dans le plan $LT$.
◊ G_TN = gtn Module de cisaillement dans le plan $TN$.
◊ G_LN = gln Module de cisaillement dans le plan $LN$.
♦ NU_LT = nult Coefficient de Poisson dans le plan $LT$.
◊ NU_TN = nutn Coefficient de Poisson dans le plan $TN$.
◊ NU_LN = nuln Coefficient de Poisson dans le plan $LN$.
◊ ALPHA_L = diln Coefficient de dilatation thermique moyen longitudinal.
◊ ALPHA_T = dit Coefficient de dilatation thermique moyen transversal.
ALPHA_ N = di n Coefficient de dilatation thermique moyen n orm
al.

**Remarque importante :**

*L'exposé de cette note de référence est basé sur la convention des livres de J.L.Batoz et D.Gay. La documentation de DEFI_MATERIAU* [U4.43.01] *décrit ces choix, et le coefficient NU_LT s'interprète de la façon suivante dans Code_Aster :*

*si l'on exerce une traction selon l'axe* $L$ *donnant lieu à une déformation selon cet axe égale à* $\varepsilon_L=\frac{\sigma_L}{\text{ygl}}$ *, on a une déformation selon l'axe* $T$ *égale à :* $\varepsilon_T=-\nu_{\text{LT}}.\frac{\sigma_L}{\text{ygl}}$ .

# 5 Bibliographie

1) J.C. MASSON : Matrice de Hooke pour les matériaux orthotropes, Rapport interne Applications en Mécanique, n°79-018, CiSi, 1979.

2) D. GAY : Matériaux composites, Edition Hermes, 1987.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3) J.L. BATOZ, G. DHATT : Modélisation des structures par éléments finis, Volume 1, Edition Hermes.

# 6 Description des versions du document

| Version Code_Aster | Auteur(s) Organisme(s) | Description des modifications |
|---|---|---|
| 6.4 | A. ASSIRE, EDF-R&D/AMA | Texte initial |
| 8.4 | A. ASSIRE, X. DESROCHES, J.M. PROIX, EDF-R&D/AMA | Corrections minimes |
| 15 | F.VOLDOIRE, EDF-R&D/ERMES | Corrections (pour une meilleure compréhension) |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)