Pré et Post-traitement pour les coques minces en matériaux composites

Résumé :

On étend les résultats de la théorie des éléments de plaques exposés dans la documentation [R3.07.03] au cas des matériaux orthotropes multi-couches. La documentation proposée regroupe les aspects thermiques et thermo-élasto-mécaniques. L'utilisation de ces matériaux n'est théoriquement valide que dans le cas d'une symétrie géométrique par rapport au feuillet moyen de la plaque. Il est donc nécessaire que le couplage membrane-flexion soit nul.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Caractéristiques homogénéisées d'une coque mince en thermo-élasticité et en thermique 4
2.1 Notations - Hypothèses....4
2.2 Thermique....5
2.3 Thermo-mécanique....6
3 Repères dans le plan tangent à la coque. Notation matricielle....8
3.1 Repères....8
3.2 Notation matricielle....9
3.2.1 Thermique....9
3.2.2 Thermomécanique....10
4 Coques constituées de couches homogènes....12
4.1 Description des couches....12
4.2 Thermique....13
4.3 Thermomécanique....14
4.3.1 Relation de comportement....14
4.3.2 Cisaillement transverse....15
4.3.3 Efforts généralisés....16
4.3.4 Localisation des contraintes (post-traitement)....17
4.3.5 Calcul des critères de rupture dans les couches (post-traitement)....18
5 Bibliographie....19
6 Description des versions du document....19

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

La modélisation du comportement thermo-mécanique par une théorie de coques des structures constituées de matériaux composites stratifiés présente par rapport au cas homogène isotrope un certain nombre de particularités :

- les coefficients intervenant dans les relations de comportement linéaire reliant les grandeurs mécaniques et thermiques définies sur la surface moyenne de la coque doivent être calculés à partir de la répartition spatiale dans l'épaisseur des différents matériaux,
- les matériaux constitutifs de la coque sont en général orthotropes :
  - il faut définir, en chaque point de la surface moyenne de la coque, une direction matérielle fixant le repère dans lequel sont décrites les relations de comportement,
  - la forme de l'anisotropie produite sur le comportement global de la coque peut être quelconque,
- enfin des couplages entre grandeurs caractérisant des phénomènes symétriques et antisymétriques par rapport à la surface moyenne peuvent apparaître (couplage flexion-membrane, couplage température moyenne-gradient moyen dans l'épaisseur). En thermo_mécanique les résultats présentés ne sont cependant théoriquement valides que lorsque le couplage membrane-flexion est nul,
- l'analyse de la rupture ou de l'endommagement de ces structures nécessite de revenir à un niveau de description plus fin que celui fourni par les modèles de coques : les critères sont formulés, couche par couche dans l'épaisseur, en fonction des contraintes « tridimensionnelles ».

Le pré-traitement permet à l'utilisateur de "construire" les grandeurs intervenant dans les théories de coques à partir d'une description spatiale simple de la répartition des différents matériaux (position, épaisseur, orientation).

Le post-traitement intervient une fois le calcul de structure achevé pour fournir, couche par couche, une évaluation de quelques critères de rupture ou d'endommagement.

Le parti pris ici est de spécifier pré et post-traitements de façon à ce qu'ils soient indépendants, dans le cadre des modèles de coque retenus, du type d'élément choisi par l'utilisateur pour faire le calcul de structure. En effet, les difficultés numériques du calcul des coques et de la représentation de leur géométrie conduit à proposer selon les situations, plusieurs types d'éléments finis de coque ou de plaque.

La note est divisée en trois parties. La première rappelle brièvement les hypothèses de la théorie de coque utilisée pour les calculs thermo-mécaniques et les expressions des coefficients homogénéisés à introduire. La seconde précise les choix retenus pour la description de l'orientation des matériaux par rapport aux éléments ainsi que quelques notations. La dernière partie détaille l'application de ces choix au cas des coques constituées de strates homogènes.

Pour permettre l'utilisation des options de calculs disponibles dans *Code_Aster*, il est donc nécessaire de définir des commandes de pré et post-traitement pour les matériaux composites stratifiés compatibles avec les commandes existantes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Caractéristiques homogénéisées d'une coque mince en thermo-élasticité et en thermique

2.1 Notations - Hypothèses

La coque est constituée de différentes couches de matériaux orthotropes disposées parallèlement à la surface moyenne Σ (cf. [Figure 2.1-a]).

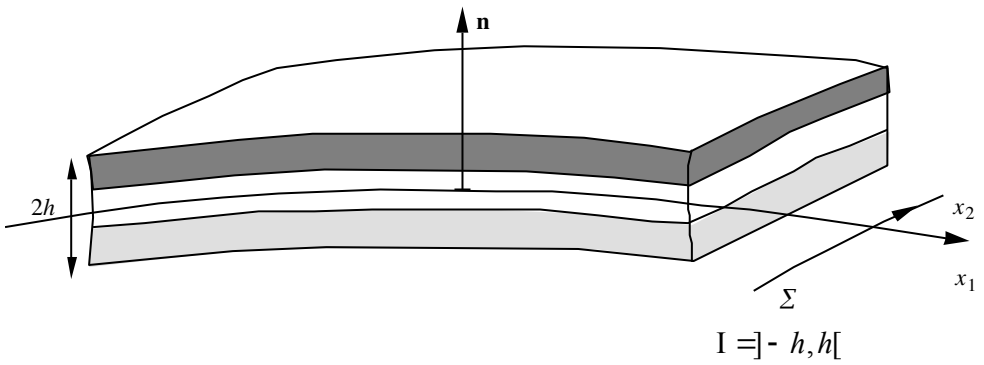


Figure 2.1-a

En notant (x_γ) les coordonnées (x_1, x_2) sur Σ et x_3 la coordonnée normale à la surface $x_3 \in]-h, h[$. on peut définir les diverses caractéristiques des matériaux intervenant en thermique et en thermo-élasticité. On supposera de plus que l'**un des axes d'orthotropie coïncide avec la normale n au point (x_γ) à la coque Σ** .

- Conductivité : $k_{\alpha\beta}(x_\gamma, x_3)$ et $k_{33}(x_\gamma, x_3)$
- Chaleur volumique : $\rho c(x_\gamma, x_3)$
- Coefficients de dilatation : $d_{\alpha\beta}(x_\gamma, x_3)$
- Rigidité élastique (contrainte plane) : $\Lambda_{\alpha\beta\lambda\mu}(x_\gamma, x_3)$
- Rigidité de cisaillement : $\Lambda_{\alpha 3\lambda 3}(x_\gamma, x_3)$
- Masse volumique : $\rho(x_\gamma, x_3)$

Les indices grecs parcourent $\{1,2\}$. Le système (x_γ) ne correspond pas nécessairement aux axes d'orthotropie des matériaux dans le plan tangent.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Thermique

On se place dans le cadre du modèle de coque thermique décrit en [R3.11.01] et [bib1]. Un champ de température « coque » est représenté par les trois champs $\left(T^m, T^s, T^i\right)$ définis sur Σ de la façon suivante dans l'épaisseur :

$$T\left(x_\gamma, x_3\right)=\sum_{j=1}^{3} T^j\left(x_\gamma\right) P_j\left(x_3\right)=T^m\left(x_\gamma\right) P_1\left(x_3\right)+T^s\left(x_\gamma\right) P_2\left(x_3\right)+T^i\left(x_\gamma\right) P_3\left(x_3\right) \quad (1)$$

Où les P_j sont les polynômes de Lagrange :

$$\begin{aligned} I=]-h, h[: \qquad & P_1\left(x_3\right)=1-\left(x_3/h\right)^2 \\ & P_2\left(x_3\right)=\frac{x_3}{2\mathrm{h}}\left(1+x_3/h\right) \\ & P_3\left(x_3\right)=-\frac{x_3}{2\mathrm{h}}\left(1-x_3/h\right) \end{aligned} \quad (2)$$

L'interprétation des champs T^j est alors la suivante. Tout d'abord $T^m\left(x_\gamma\right)$ qui représente la température sur la surface moyenne de la coque) :

$$T^m\left(x_\gamma\right)=T\left(x_\gamma, 0\right) \quad (3)$$

Ensuite la température sur la surface supérieure de la coque :

$$T^s\left(x_\gamma\right)=T\left(x_\gamma, +h\right) \quad (4)$$

Et la température sur la surface inférieure de la coque :

$$T^i\left(x_\gamma\right)=T\left(x_\gamma, -h\right) \quad (5)$$

Grâce à la représentation (1), on calcule la forme bilinéaire K_S^T de $\left(T^m, T^s, T^i\right) \equiv T$ à partir de la forme du problème 3D (les indices ij prennent les valeurs m, s, i) :

$$K_\Sigma^T(T, \tau)=\int_\Sigma\left(A_{\alpha\beta}^{ji} . T_{,\alpha}^i . \tau_{,\beta}^j+B^{ji} . T^i . \tau^j\right) d\Sigma \quad (6)$$

Avec la convention habituelle de sommation sur les indices répétés). Où τ est un champ virtuel de température et où :

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta}^{ij}=A_{\alpha\beta}^{ji}=A_{\beta\alpha}^{ij}, & B^{ij}=B^{ji} \\ A_{\alpha\beta}^{ij}\left(x_\gamma\right)=\int_I k_{\alpha\beta}\left(x_\gamma, x_3\right) P_i\left(x_3\right) P_j\left(x_3\right) dx_3 & \\ B^{ij}\left(x_\gamma\right)=\int_I k_{33}\left(x_\gamma, x_3\right) \dfrac{\partial P_i}{\partial x_3}\left(x_3\right) \dfrac{\partial P_j}{\partial x_3}\left(x_3\right) dx_3 & \end{cases} \quad (7)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La forme bilinéaire liée à la chaleur volumique dans le problème d'évolution s'écrit :

$$\begin{aligned} M(T,\tau) &= \int_S C^{ij}.T^i.t^j \\ C^{ij}(x_g) &= \int_I \rho c(x_g,x_3) P_i(x_3) P_i(x_3) dx_3 \end{aligned} \quad (8)$$

2.3 Thermo-mécanique

On se place dans le cadre de la modélisation de coque de Love-Kirchhoff (coque mince) ou Reissner-Mindlin (coque épaisse). Dans les deux cas, les sections sont supposées rester planes. Les déformations du plan tangent à Σ s'expriment donc, dans l'épaisseur, à l'aide des tenseurs de déformations $E_{\alpha\beta}(x_\gamma)$, de variation de courbure $K_{\alpha\beta}(x_\gamma)$ et de distorsion $\gamma_\alpha(x_\gamma)$ de la surface [bib2] :

$$e_{\alpha\beta}(x_\gamma,x_3) = E_{\alpha\beta}(x_\gamma) + x_3 K_{\alpha\beta}(x_\gamma) \text{ et } e_{\alpha 3}(x_\gamma,x_3) = \frac{\gamma_\alpha(x_\gamma)}{2} \quad (9)$$

Le matériau subissant une déformation locale d'origine thermique donnée par ($T^{réf}$ est la température de référence) :

$$e^{th}_{\alpha\beta}(x_\gamma,x_3) = \left(T(x_\gamma,x_3) - T^{réf}\right) d_{\alpha\beta}(x_\gamma,x_3) \quad (10)$$

Le champ de contraintes local est donné par la loi thermoélastique en contraintes planes :

$$s_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\lambda\mu}\left(e_{\lambda\mu} - e^{th}_{\lambda\mu}\right) \quad (11)$$

Soit avec le modèle précédent pour T :

$$s_{\alpha\beta}(x_\gamma,x_3) = L_{\alpha\beta\lambda\mu}(x_\gamma,x_3)\left[E_{\lambda\mu}(x_\gamma) + x_3 K_{\lambda\mu}(x_\gamma) - e^{th}_{\lambda\mu}(x_\gamma,x_3)\right] \quad (12)$$

Avec :

$$e^{th}_{\lambda\mu}(x_\gamma,x_3) = \left(\sum_{j=1}^{3} T^j(x_\gamma).P_j(x_3) - T^{réf}\right) d_{\lambda\mu}(x_\gamma,x_3) \quad (13)$$

Les efforts généralisés (flexion $M^{\alpha\beta}$ et membrane $N^{\alpha\beta}$) sont liés à σ par :

$$\begin{cases} M^{\alpha\beta}(x_\gamma) = \int_I s^{\alpha\beta}(x_\gamma,x_3) x_3 dx_3 \\ N^{\alpha\beta}(x_\gamma) = \int_I s^{\alpha\beta}(x_\gamma,x_3) dx_3 \end{cases} \quad (14)$$

Si bien que la loi de comportement de la coque s'écrit au point x_γ :

$$\begin{cases} M^{\alpha\beta} = & P^{\alpha\beta\lambda\mu} K_{\lambda\mu} + Q^{\alpha\beta\lambda\mu} E_{\lambda\mu} + M^{\alpha\beta}_{th} \\ N^{\alpha\beta} = & R^{\alpha\beta\lambda\mu} E_{\lambda\mu} + Q^{\alpha\beta\lambda\mu} K_{\lambda\mu} + N^{\alpha\beta}_{th} \end{cases} \quad (15)$$

Où :

$$\begin{cases} P^{\alpha\beta\lambda\mu} = & +\int_I L^{\alpha\beta\lambda\mu}(x_3) x_3^2 dx_3 \\ Q^{\alpha\beta\lambda\mu} = & +\int_I L^{\alpha\beta\lambda\mu}(x_3) x_3 dx_3 \\ R^{\alpha\beta\lambda\mu} = & +\int_I L^{\alpha\beta\lambda\mu}(x_3) dx_3 \\ N^{\alpha\beta}_{th} = & -\int_I L^{\alpha\beta\lambda\mu} e^{th}_{\lambda\mu} dx_3 \\ M^{\alpha\beta}_{th} = & -\int_I L^{\alpha\beta\lambda\mu} e^{th}_{\lambda\mu} x_3 dx_3 \end{cases} \quad (16)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

éq 2.3-5

Lorsque la température est calculée par le modèle de thermique, on peut exprimer directement les efforts thermiques en fonction des trois composantes $\left(T^m, T^s, T^i\right)$:

$$\begin{cases} M_{th}^{\alpha\beta} = -\left[\int_I L_{\alpha\beta\lambda\mu} d_{\lambda\mu}\left(x_3\right) P_j\left(x_3\right) x_3 \, dx_3\right]\left(T^j - T^{réf}\right) = DM_j^{\alpha\beta}\left(T^j - T^{réf}\right) \\ N_{th}^{\alpha\beta} = -\left[\int_I L_{\alpha\beta\lambda\mu} d_{\lambda\mu}\left(x_3\right) P_j\left(x_3\right) dx_3\right]\left(T^j - T^{réf}\right) = DN_j^{\alpha\beta}\left(T^j - T^{réf}\right) \end{cases} \quad (17)$$

Les quantités DN et DM ne dépendent que des matériaux constitutifs de la coque et de leur répartition.

Remarque :

Lorsque la disposition des matériaux est symétrique par rapport à Σ , certaines intégrales, étant somme de termes impairs, s'annulent : $Q^{\alpha\beta\lambda\mu} = 0$, $DM_1^{\alpha\beta} = DM_3^{\alpha\beta} = 0$ et $DN_2^{\alpha\beta} = 0$.

Les efforts tranchants et contraintes de cisaillement transverse sont obtenus par écriture des équations d'équilibre locales sans force volumique :

$$\sigma_{,j}^{ij} = 0 \quad \text{où} \quad \left\{i, j\right\} \in \left\{1,2,3\right\} \quad (18)$$

Ce qui permet d'écrire l'effort tranchant :

$$V^{\alpha}\left(x_\gamma\right) = M_{,\beta}^{\alpha\beta}\left(x_\gamma\right) \quad (19)$$

Et la contrainte de cisaillement :

$$\sigma^{\alpha 3}\left(x_\gamma, x_3\right) = -\int_{-h}^{x_3} \sigma_{,\beta}^{\alpha\beta}\left(x_\gamma, z\right) dz \quad (20)$$

En utilisant le fait que $\sigma^{\alpha 3}\left(x_{\gamma,+h}\right) = \sigma^{\alpha 3}\left(x_{\gamma,-h}\right) = 0$. Le rôle du pré-traitement est de calculer les différentes grandeurs A , B , C , P , Q , R , DM et DN , à partir de la description du matériau (nombre, orientation et épaisseur des différentes couches, caractéristiques locales ρc , k , ρ , L et d).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Repères dans le plan tangent à la coque. Notation matricielle

3.1 Repères

On considère le repère global de la structure (X, Y, Z). Dans le cas des composites stratifiés l'orientation du monocouche est définie par rapport à une direction de référence $\boldsymbol{e}_{réf}$ dans le plan tangent (T).

Ce vecteur $\boldsymbol{e}_{réf}$ est déterminé par la projection d'un vecteur $\boldsymbol{X}_1$, donné par l'utilisateur sous le mot-clé ANGL_REP de AFFE_CARA_ELEM, sur le plan tangent (T) en un point quelconque de la coque.

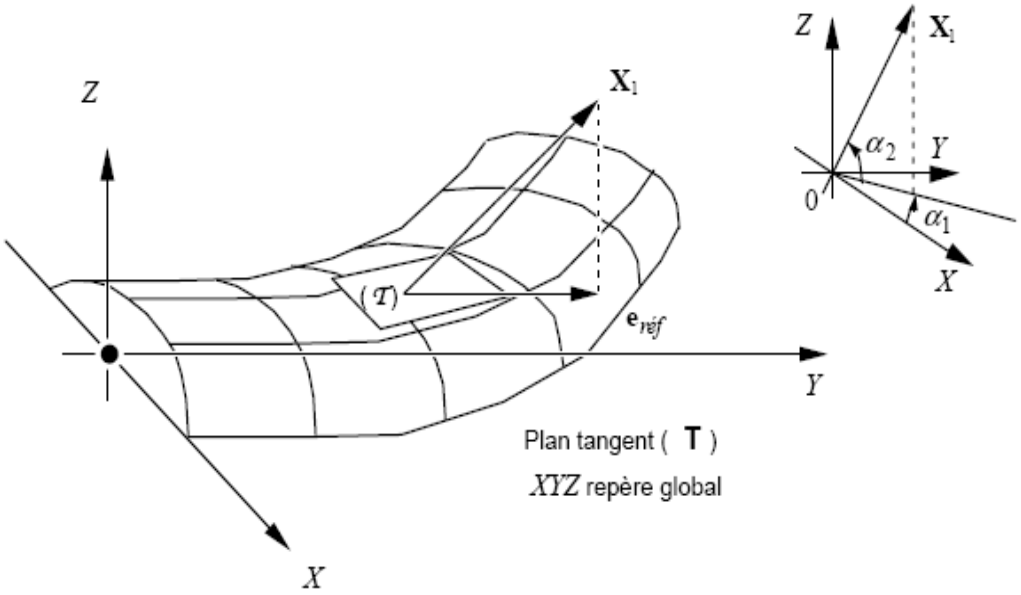


Figure 3.1-1: Définition du repère local

Le vecteur $\boldsymbol{X}_1$ est défini par l'utilisateur par deux angles orientés :

α_1 : entre OX et $\boldsymbol{X}_{1\,\mathrm{proj}(X,\,Y)}$
α_2 : entre $\boldsymbol{X}_{1\,\mathrm{proj}(X,\,Y)}$ et X_1

α_1 : fait passer de la direction $0X$ à la projection dans le plan XOY du vecteur $\boldsymbol{X}_1$.
α_2 : fait passer de cette projection à X_1 lui-même : voir figure 3.1-1.

Dans les cas où dans une zone donnée de la coque, T est orthogonal à $\boldsymbol{X}_1$, l'utilisateur devra définir un autre vecteur (en pratique pour certaines mailles).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour un élément fini de type facette plane, contenu dans le plan tangent T , on définit le repère orthonormé $\left(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2\right)$ local à l'élément à l'aide de la numérotation des sommets. Par exemple pour le triangle :

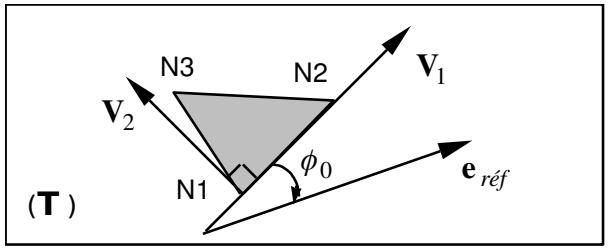


Figure 3.1-b : Repère local de l'élément $\left(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2\right)$

L'angle orienté $j_0=\left(\boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{e}_{réf}\right)$ permet de passer du repère local à l'élément au repère de référence.

3.2 Notation matricielle

En thermique comme en thermo-mécanique, la programmation des éléments nécessite d'exprimer les opérateurs d'élasticité et de conduction dans le repère local de l'élément fini $\left(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2\right)$. On a l'habitude de simplifier la représentation des grandeurs tensorielles comme suit.

3.2.1 Thermique

On représente les grandeurs tensorielles dans le repère $\left(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2\right)$:

$$A^{ij}_{\alpha\beta}\left((i,j)\in(m,s,i)^2 \text{ et } (\alpha,\beta)\in(1,2)^2\right) \tag{21}$$

Sous une forme vectorielle avec six vecteurs en tenant compte des symétries [§2.2] :

$$\boldsymbol{A}^{ij}=\begin{pmatrix}A^{ij}_{11}\\A^{ij}_{22}\\A^{ij}_{12}\end{pmatrix}=\int_{-h}^{h}P_i\left(x_3\right).P_j\left(x_3\right).\begin{pmatrix}k_{11}\\k_{22}\\k_{12}\end{pmatrix}dx_3 \tag{22}$$

Où $\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}k_{11}\\k_{22}\\k_{12}\end{pmatrix}$ désigne le vecteur conductivité thermique construit à l'aide du tenseur $\begin{pmatrix}k_{\alpha\beta} & & 0\\ & & 0\\0 & 0 & k_{33}\end{pmatrix}$ (cf. [§2.1]), et de $P_i\left(x_3\right)$, les polynômes de Lagrange dans l'épaisseur. On fait de même pour $\boldsymbol{B}^{ij}$ et $\boldsymbol{C}^{ij}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En se plaçant dans le repère de l'élément $\left(V_1, V_2\right)$, on utilise la matrice de passage $P_k^{(m)}$ du tenseur de conductivité $k=\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{pmatrix}$ de $\left(V_1, V_2\right)$ vers le repère associé à $e_{réf}$ [bib3] :

$$P_k^{(m)}=\begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -CS & CS & C^2-S^2 \end{bmatrix} \text{ où } \begin{matrix} C=\cos\left(\varphi_0\right) \\ S=\sin\left(\varphi_0\right) \end{matrix} \quad (23)$$

Il en résulte que la matrice de passage $(P_k^m)^{-1}$ du tenseur de conductivité du repère associé à $e_{réf}$ vers $\left(V_1, V_2\right)$ est donnée par :

$$P_{k^{(m)^{-1}}}=\begin{bmatrix} C^2 & S^2 & -2CS \\ S^2 & C^2 & 2CS \\ CS & -CS & C^2-S^2 \end{bmatrix} \text{ où } \begin{matrix} C=\cos\left(\varphi_0\right) \\ S=\sin\left(\varphi_0\right) \end{matrix} \quad (24)$$

3.2.2 Thermomécanique

On représente également sous une forme vectorielle dans le repère $\left(V_1, V_2\right)$:

- d'une part, les contraintes normales σ_{11}, σ_{22}, le cisaillement σ_{12} dans le plan et le cisaillement transverse σ_{13} et σ_{23} :

$$\sigma=\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \text{ et } \tau=\begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (25)$$

- d'autre part, les déformations correspondantes :

$$\varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2}\gamma=\begin{pmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix} \text{ et } \gamma_{12}=2\varepsilon_{12} \quad (26)$$

qui se décomposent avec les déformations généralisées de membrane E et de flexion K :

$$\varepsilon\left(x_3\right)=\varepsilon\left(u\right)\left(x_3\right)-\varepsilon^{th}\left(x_3\right) \text{ avec } \varepsilon\left(u\right)\left(x_3\right)=E+x_3 K \quad (27)$$

Et pour la partie thermique :

$$\varepsilon^{\text{th}}\left(x_3\right)=d\left(x_3\right)\left(T_{\left(x_3\right)}-T^{réf}\right) \quad (28)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour une ordonnée $x_3 \in]-h, h[$, et :

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{11} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{22} \\ K_{11} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{11} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Où $\boldsymbol{d}$ est le vecteur associé aux coefficients de dilatation thermique. Le vecteur contrainte σ s'obtient à l'aide de la matrice de rigidité (3 x 3) :

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{R}.\left(\varepsilon(u)-\varepsilon^{th}\right) \tag{30}$$

Avec $\boldsymbol{R}$, inverse de la matrice de souplesse (voir [§4.3]). En se plaçant dans le repère de l'élément $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$, on utilise la matrice de passage $\boldsymbol{P}^{(m)}$ du tenseur de déformations $\varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$ de $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$ vers le repère associé à $\boldsymbol{e}_{réf}$ [bib3] :

$$\boldsymbol{P}^{(m)}=\begin{bmatrix} C^2 & S^2 & CS \\ S^2 & C^2 & -CS \\ -2CS & 2CS & C^2-S^2 \end{bmatrix} \text{ où } \begin{matrix} C=\cos(\varphi_0) \\ S=\sin(\varphi_0) \end{matrix} \tag{31}$$

En se plaçant dans le repère de l'élément $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$, on utilise la matrice de passage $\boldsymbol{P}_2^{(m)}$ du tenseur de déformations $\frac{1}{2}\gamma=\begin{pmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix}$ de $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$ vers le repère associé à $\boldsymbol{e}_{réf}$:

$$P_2^{(m)}=\begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \text{ où } \begin{matrix} C=\cos(\varphi_0) \\ S=\sin(\varphi_0) \end{matrix} \tag{32}$$

De même, en se plaçant dans le repère de l'élément $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$, la matrice de passage $\boldsymbol{P}_s^{(m)}$ du tenseur de contraintes $\sigma=\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$ de $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$ vers le repère associé à $\boldsymbol{e}_{réf}$ vaut :

$$\boldsymbol{P}_s^{(m)}=\begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -CS & CS & C^2-S^2 \end{bmatrix} \text{ où } \begin{matrix} C=\cos(\varphi_0) \\ S=\sin(\varphi_0) \end{matrix} \tag{33}$$

Il en résulte que l'expression de la matrice de passage du repère associé à $\boldsymbol{e}_{réf}$ vers le repère de l'élément $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$ pour les contraintes ci-dessus est telle que :

$$\boldsymbol{P}_\sigma^{(m)^{-1}}=\boldsymbol{P}_\sigma^{(m)}(-\varphi_0)={}^t\boldsymbol{P}^{(m)} \tag{34}$$

Cette propriété sera particulièrement utile dans la suite de l'exposé.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Coques constituées de couches homogènes

4.1 Description des couches

On considère la coque constitué d'un empilement de N_{couch} couches (parallèles au plan tangent) dans l'épaisseur $]-h,h[$ constituées chacune d'un des M_{mater} matériaux homogènes orthotropes (coque stratifiée [Figure 4.1-a]).

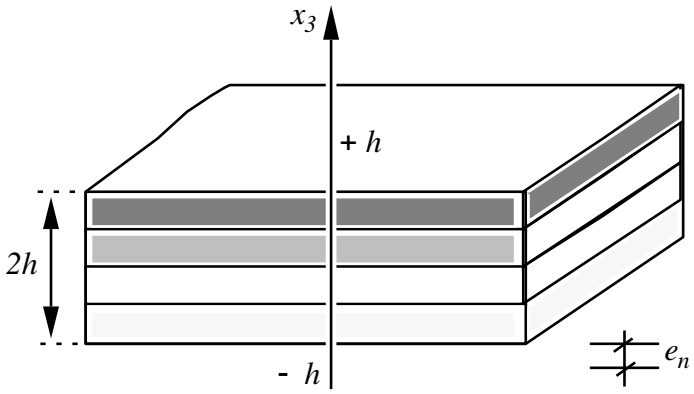


Figure 4.1-a

Une couche n est définie par :

- son épaisseur e_n avec les ordonnées des interfaces inférieure et supérieure :

$$x_3^{n-1} = -h + \sum_{j=1}^{n-1} e_j \text{ et } x_3^n = x_3^{n-1} + e_n \quad (35)$$

- le matériau constitutif m , et ses caractéristiques physiques,
- l'angle ϕ_n de la première direction d'orthotropie (notée L) dans le plan tangent ($\boldsymbol{T}$) par rapport à la direction de référence $\boldsymbol{e}_{réf}$ (voir figure 4.1-1).

Remarque :

Dans le cas d'une couche constituée de fibres dans une matrice de résine, la première direction d'orthotropie correspond à la direction des fibres.

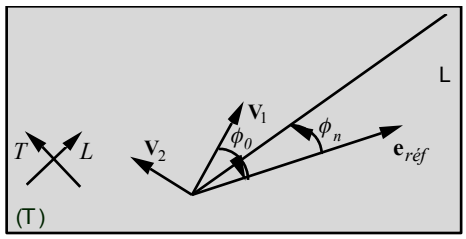


Figure 4.1-1: Définition du repère sur une couche orthotrope

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.2 Thermique

L'expression des vecteurs $A^{ij}\left((i,j)\in[m,s,i]^2, i\le j\right)$ définis au [§3.2.1] s'obtient à partir des conductivités k_m du matériau m constituant les couches n. Dans les cas d'orthotropie (L, T) du matériau m, les coefficients de conductivité sont :

$$k_{(L,T)}=\begin{pmatrix} k_L \\ k_T \\ 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Dans le cas d'un matériau isotrope transverse, le coefficient k_{33} est égal à k_T. Pour avoir l'expression de A^{ij} dans le repère de l'élément (V_1, V_2) on doit appliquer la rotation suivante, du repère d'orthotropie vers le repère de l'élément, comme explicité au [§3] :

$$k^{(m)}=\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C^2 & S^2 \\ S^2 & C^2 \\ CS & -CS \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_L \\ k_T \end{pmatrix}_{(L,T)} \text{ avec } \begin{matrix} C=\cos\left(\varphi_i+\varphi_0\right) \\ S=\sin\left(\varphi_i+\varphi_0\right) \end{matrix} \tag{37}$$

Les vecteurs A^{ij} peuvent alors s'exprimer par intégration dans l'épaisseur des contributions de couche :

$$A^{ij}=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\int_{x_3^{n-1}}^{x_3^n} P_i(x_3)\cdot P_j(x_3)\cdot k_{(m)}\cdot dx_3 \tag{38}$$

Les termes $B^{ij}\left((i,j)\in[2,3]^2, i\le j\right)$ sont :

$$B^{ij}=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\int_{x_3^{n-1}}^{x_3^n}\frac{\partial P_i(x_3)}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial P_j(x_3)}{\partial x_3}\cdot k_{33(m)}\cdot dx_3 \tag{39}$$

De même pour C^{ij} :

$$C^{ij}=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\int_{x_3^{n-1}}^{x_3^n} P_i(x_3)\cdot P_j(x_3)\cdot \rho C_{(m)}\cdot dx_3 \tag{40}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Thermomécanique

4.3.1 Relation de comportement

Dans le cas des coques stratifiées, on montre que la relation entre les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ dans la couche n dépend des constantes du matériau orthotrope m. Pour les coefficients élastiques, on a $E_{\mathrm{LL}}^{(m)}$, $E_{\mathrm{TT}}^{(m)}$, $\nu_{\mathrm{LT}}^{(m)}$, $G_{\mathrm{LT}}^{(m)}$, $G_{\mathrm{LZ}}^{(m)}$ et $G_{\mathrm{TZ}}^{(m)}$ et les coefficients de dilatation $d_{\ell}^{(m)}$ et $d_{\mathrm{TT}}^{(m)}$. Dans les axes d'orthotropie (L,T) du matériau m, la matrice de souplesse $\boldsymbol{S}$ s'exprime par :

$$\boldsymbol{S}_{(m)}|_{(L,T)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\mathrm{LL}}} & -\frac{v_{LT}}{E_{TT}} & 0 \\ -\frac{v_{TL}}{E_{TT}} & \frac{1}{E_{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{\mathrm{LT}}} \end{bmatrix}_{(m)} \quad \text{avec} \quad \frac{v_{LT}}{E_{LL}}=\frac{v_{TL}}{E_{TT}} \tag{41}$$

La rigidité $\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}=\boldsymbol{S}_{(m)}^{-1}$ étant :

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}|_{(L,T)}=\begin{bmatrix} \frac{E_{\mathrm{LL}}}{1-v_{TL}\cdot v_{\mathrm{LT}}} & \frac{v_{TL}\cdot E_{\mathrm{LL}}}{1-v_{TL}\cdot v_{\mathrm{LT}}} & 0 \\ \frac{v_{LT}\cdot E_{TT}}{1-v_{TL}\cdot v_{\mathrm{LT}}} & \frac{E_{TT}}{1-v_{TL}\cdot v_{\mathrm{LT}}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\mathrm{LT}} \end{bmatrix}_{(m)} \tag{42}$$

La rigidité en cisaillement transverse s'exprime pour sa part de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\tau(m)}|_{(L,T)}=\begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix}_{(m)} \tag{43}$$

En se plaçant dans le repère de l'élément $(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2)$, on utilise la matrice de passage $\boldsymbol{P}^{(m)}$ du tenseur de déformations définie au [§3] de $(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2)$ vers le repère d'orthotropie :

$$\boldsymbol{P}^{(m)}=\begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -CS & CS & C^2-S^2 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{matrix} C=\cos\left(\varphi_i+\varphi_0\right) \\ S=\sin\left(\varphi_i+\varphi_0\right) \end{matrix} \tag{44}$$

De même le vecteur dilatation s'exprime dans le repère $(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2)$:

$$\boldsymbol{d}^{(m)}=\begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{12} \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{m^{-1}}\begin{pmatrix} d_{LL} \\ d_{TT} \\ 0 \end{pmatrix}_{(L,T)}=\begin{pmatrix} C^2 & S^2 \\ S^2 & C^2 \\ 2CS & -2CS \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{LL} \\ d_{TT} \end{pmatrix}_{(L,T)} \tag{45}$$

On a donc dans la couche n (matériau : m), en x_3 :

$$s_{(n)}=\boldsymbol{P}_s^{(m)^{-1}}.\boldsymbol{\Lambda}|_{(L,T)}.\boldsymbol{P}^{(m)}.\left(e(u)-e^{th}\right)={}^T\boldsymbol{P}^{(m)}.\boldsymbol{\Lambda}|_{(L,T)}.\boldsymbol{P}^{(m)}.\left(e(u)-e^{th}\right)=\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}\left(e(u)-e^{th}\right) \tag{46}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Avec :

$$\varepsilon(u)=\begin{pmatrix}E_{11}\\E_{22}\\E_{12}\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}K_{11}\\K_{22}\\K_{12}\end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon^{th}=\begin{pmatrix}d_{11}\\d_{22}\\d_{12}\end{pmatrix}.\left(T(x_3)-T^{réf}\right) \quad (47)$$

Remarque :

Dans le code, on a choisi de réaliser le passage du repère d'orthotropie au repère de l'élément en deux étapes. Une première étape concerne le passage du repère d'orthotropie au repère défini par `ANGL_REP` *. Les données de* `DEFI_MATERIAU` *sont ainsi transformées lors de ce premier passage. On traite ensuite le matériau équivalent comme on le ferait avec des éléments de plaques classiques.*
Le traitement de la dilatation thermique est fait sous la forme d'une contribution au second membre de l'équation matricielle à résoudre issue du principe du travail virtuel. Cette contribution s'écrit : $\sigma^{th(n)}=-^T\boldsymbol{P}^{(m)}.\boldsymbol{\Lambda}|_{(L,T)}.\begin{Bmatrix}d_{LL}\Delta T\\d_{TT}\Delta T\\0\end{Bmatrix}$.

4.3.2 Cisaillement transverse

La rigidité en cisaillement transverse de chaque couche s'écrit dans le repère $(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2)$ de la même façon que la dilatation :

$$\boldsymbol{\Lambda}_{t(m)}|_{(V_1,V_2)}={}^t\boldsymbol{P}_2^{(m)}.\boldsymbol{\Lambda}_{t(m)}.\boldsymbol{P}_2^{(m)} \quad (48)$$

Avec $\boldsymbol{P}_2^{(m)}=\begin{bmatrix}C & S\\-S & C\end{bmatrix}$ la matrice de passage vectorielle de $(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2)$ vers le repère d'orthotropie.

La rigidité en cisaillement transverse globale de la coque $[\boldsymbol{R}_c]$ calculée de manière à être égale à celle donnée par la loi de l'élasticité tridimensionnelle [bib2], la matrice $[\boldsymbol{R}_c]$ est définie de sorte que la densité surfacique d'énergie de cisaillement transverse U_2 obtenue pour une distribution tridimensionnelle des contraintes σ_{13} et σ_{23} soit identique à celle associée au modèle de plaque de Reissner-Mindlin notée U_2 . Au final :

$$U_1=\frac{1}{2}\int_{-h}^{h}\langle\tau\rangle\left[\boldsymbol{\Lambda}_{\tau(m)}\right]^{-1}|\tau|d_3 \quad (49)$$

Et :

$$U_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}\left[\boldsymbol{R}_c\right]^{-1}\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}\left(\int_{-h}^{h}|\tau|d_3\right)\left[\boldsymbol{H}_c\right]^{-1}\frac{1}{2}\left(\int_{-h}^{h}|\tau|d_3\right) \quad (50)$$

Avec $\langle\tau\rangle=\langle\sigma_{13}\sigma_{23}\rangle$. Avec les équations d'équilibre :

$$\begin{cases}\sigma_{13}=-\int_{-h}^{x_3}\left(\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}\right)d_3\\\sigma_{23}=-\int_{-h}^{x_3}\left(\sigma_{12,1}+s_{22,2}\right)d_3\end{cases} \quad (51)$$

Et les conditions :

$$0=\sigma_{13}=\sigma_{23} \text{ pour } x_3=\pm h \quad (52)$$

Les contraintes planes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} s'expriment en fonction des efforts résultants en faisant l'hypothèse de flexion pure et d'absence de couplage membrane/flexion. Il en résulte que :

$$\sigma(x_3)=x_3.\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}(x_3)\boldsymbol{P}^{-1}.\boldsymbol{M} \text{ et } \boldsymbol{A}(x_3)=\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}(x_3)\boldsymbol{P}^{-1} \quad (53)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Où $\boldsymbol{P}$ est la matrice de rigidité de flexion de l'ensemble du multicouche définie par la première équation de (16). Ces calculs, ainsi que les suivants sont à effectuer dans un repère unique. On choisit dans *Code_Aster* le repère intrinsèque à l'élément. Il faut donc transformer la matrice A dans ce repère. On a alors :

$$\left\{\tau\left(x_3\right)\right\}=\boldsymbol{D}_1\left(x_3\right)\boldsymbol{V}+\boldsymbol{D}_2\left(x_3\right)\left\{\lambda\right\} \tag{54}$$

Avec :

$$\boldsymbol{V}=\langle M_{11,1}+M_{12,2}\,;M_{12,1}+M_{22,2}\rangle \tag{55}$$

Et :

$$\langle\lambda\rangle=\langle M_{11,1}-M_{12,2}\,;M_{12,1}-M_{22,2}\,;M_{22,1}\,;M_{11,2}\rangle \tag{56}$$

Et :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_1&=\int_{-x_3}^{h}-\frac{z}{2}\begin{bmatrix}A_{11}+A_{33} & A_{13}+A_{32}\\ A_{31}+A_{23} & A_{22}+A_{33}\end{bmatrix}dz\\ \boldsymbol{D}_2&=\int_{-x_3}^{h}-\frac{z}{2}\begin{bmatrix}A_{11}-A_{33} & A_{13}-A_{32} & 2\mathrm{A}_{12} & 2\mathrm{A}_{31}\\ A_{31}-A_{23} & A_{33}-A_{22} & 2\mathrm{A}_{32} & 2\mathrm{A}_{21}\end{bmatrix}dz\end{aligned} \tag{57}$$

U_1 s'écrit donc :

$$U_1=\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{V}\,|\lambda\rangle\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{C}_{12^T} & \boldsymbol{C}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{V}\\ \lambda\end{Bmatrix} \tag{58}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\underset{2\times2}{\mathbf{C}_{11}}&=\int_{-h}^{h}\mathbf{D}_{1^T}\boldsymbol{\Lambda}_{\tau(m)}^{-1}\mathbf{D}_1\,d_3\\ \underset{2\times4}{\mathbf{C}_{12}}&=\int_{-h}^{h}\mathbf{D}_{1^T}\boldsymbol{\Lambda}_{\tau(m)}^{-1}\mathbf{D}_2\,d_3\\ \underset{4\times4}{\mathbf{C}_{22}}&=\int_{-h}^{h}\mathbf{D}_{2^T}\boldsymbol{\Lambda}_{\tau(m)}^{-1}\mathbf{D}_2\,d_3\end{aligned} \tag{59}$$

D'où les déplacements finaux :

$$U_1=U_2\Leftrightarrow\langle\boldsymbol{V}\,|\lambda\rangle\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{11}-\mathbf{H}_c^{-1} & \mathbf{C}_{12}\\ \mathbf{C}_{12^T} & \mathbf{C}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{V}\\ \lambda\end{Bmatrix}=0\quad\forall\,\boldsymbol{V},\{\lambda\} \tag{60}$$

On propose donc la solution $\boldsymbol{H}_c=\boldsymbol{C}_{11^{-1}}$. Les coefficients de correction de cisaillement transverse correspondent au rapport des termes de $\boldsymbol{H}_c$ à l'intégrale sur l'épaisseur du stratifié des termes de $\boldsymbol{\Lambda}_{\tau(m)}$.

4.3.3 Efforts généralisés

Les efforts généralisés mis sous une forme vectorielle sont obtenus par intégration dans l'épaisseur de la coque en sommant les contributions des couches (d'épaisseur $\boldsymbol{e}_n=x_3^n-x_3^{n-1}$) :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix}=\int_l \sigma\cdot x_3\cdot dx_3=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\int_{x_3^{n-1}}^{x_3^n}\sigma_{(n)}\cdot x_3\cdot dx_3$$

$$\mathbf{N}=\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix}=\int_l \sigma\cdot dx_3=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\int_{x_3^{n-1}}^{x_3^n}\sigma_{(n)}\cdot dx_3 \quad (61)$$

Si on exprime comme précédemment (avec m matériau de la couche n) :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(n)}=\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}\cdot\left(\mathbf{E}+x_3\cdot\mathbf{K}-\mathbf{d}_{(\mathbf{m})}\left(T\left(x_3\right)-T^{réf}\right)\right) \quad (62)$$

On peut noter les efforts généralisés sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}-\mathbf{M}^{th}&=\mathbf{P}\cdot\mathbf{K}+\mathbf{Q}\cdot\mathbf{E}\\ \mathbf{N}-\mathbf{N}^{th}&=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{K}+\mathbf{R}\cdot\mathbf{E}\end{aligned} \quad (63)$$

Avec $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ des matrices 3 x 3 s'exprimant par :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}&=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}\int_{x_3^{n-1}}^{x_3^n}x_3^2\cdot dx_3 &&=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\left(x_3^n\right)^3-\left(x_3^{n-1}\right)^3\right)\\ \mathbf{Q}&=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}\int_{x_3^{n-1}}^{x_3^n}x_3\cdot dx_3 &&=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\left(x_3^n\right)^2\cdot\left(x_3^{n-1}\right)^2\right)\\ \mathbf{R}&=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}\cdot\left(x_3^n-x_3^{n-1}\right) &&=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}\cdot e_n\end{aligned} \quad (64)$$

L'effort tranchant V est obtenu par dérivation du moment [§4.3.2]. Les efforts généralisés d'origine thermique sont calculés directement :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{th}&=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}\cdot\int_{x_3^{n-1}}^{x_3^n}x_3\cdot\left(T\left(x_3\right)-T^{réf}\right).\boldsymbol{d}_{(m)}.dx_3\\ \boldsymbol{N}^{th}&=\sum_{n=1}^{N_{couch}}\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}\cdot\int_{x_3^{n-1}}^{x_3^n}\left(T\left(x_3\right)-T^{réf}\right).\boldsymbol{d}_{(m)}.dx_3\end{aligned} \quad (65)$$

4.3.4 Localisation des contraintes (post-traitement)

Inversement, à la suite d'un calcul par élément finis et de l'obtention des déformations $\boldsymbol{E}$ et variations de courbure $\boldsymbol{K}$, on peut alors calculer le champ de contraintes $\sigma_{(n)}\left(n=1,N_{couch}\right)$ dans chaque couche de l'élément.

Il est nécessaire de calculer dans chaque couche (n) , la matrice $\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}$ et les termes $\left(T\left(x_3\right)-T^{réf}\right).\boldsymbol{d}_{(m)}$ (cf. [§3.2]) ($m=mat_n$ représente les caractéristiques matériau de la couche n).

Les contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$ à une ordonnée $x_3\in\left]x_3^{n-1},x_3^n\right[$ dans la couche (n) sont alors :

$$\sigma_{(n)}\left(x_3\right)=\boldsymbol{\Lambda}_{(m)}.\left[\boldsymbol{E}+x_3.\boldsymbol{K}-\boldsymbol{d}_{(m)}\left(T\left(x_3\right)-T_{réf}\right)\right] \quad (66)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Et le cisaillement transverse :

$$\tau_{(n)}(x_3) = D_1(x_3).V + D_2(x_3).\lambda \quad (67)$$

Remarque :

Dans le code les post-traitements des éléments de plaques sont généralement définis dans le repère associé à `ANGL_REP` *. Les contraintes dans le repère intrinsèque de l'élément sont ainsi ramenées dans le repère de la variété. On a :*

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}_{eref} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & +2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -CS & +CS & C^2-S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}_n$$

où $C = \cos(\varphi_0)$

$S = \sin(\varphi_0)$ $(\text{cf.}[\S 4.1])$

où φ_0 *est l'angle entre* V_1 *et* $e_{réf}$

4.3.5 Calcul des critères de rupture dans les couches (post-traitement)

Les valeurs limites de contraintes de rupture dépendent du matériau de la couche, de la direction et du sens de la sollicitation (pour un groupe d'éléments correspondant au même champ matériau) :

mat_n

X	: limite en traction dans le sens L	(1ère direction orthotropie : sens des fibres)
X'	: limite en compression dans le sens L	(1ère direction orthotropie : sens des fibres)
Y	: limite en traction dans le sens T	(2ème direction orthogonale à la 1ère)
Y'	: limite en compression dans le sens T	(2ème direction orthogonale à la 1ère)
S	: limite en cisaillement dans le sens LT	

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Il est nécessaire de calculer les contraintes dans le repère de la couche (définie par les axes d'orthotropie) à partir des contraintes dans le repère de l'élément. L'angle entre $\mathbf{V}_1$ et $\boldsymbol{e}_{réf}$ est φ_0, et celui entre $\boldsymbol{e}_{réf}$ et le repère d'orthotropie est φ_n :

$$\begin{pmatrix}\sigma_L\\ \sigma_T\\ \sigma_{LT}\end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & +2CS\\ S^2 & C^2 & -2CS\\ -CS & +CS & C^2-S^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}_n \quad \text{où} \quad \begin{matrix} C=\cos(\phi_0)\\ S=\sin(\phi_0)\end{matrix} \tag{68}$$

Pour le critère de contrainte maximum, les cinq critères suivants sont calculés par couche :

$$\text{Pour } n=1,N-couch \text{ on a } \begin{matrix}\dfrac{\sigma_{L_{(n)}}}{X_{(mat_n)}}\left(\text{si } \sigma_{L_{(n)}}>0\right) & \dfrac{\sigma_{L_{(n)}}}{X'_{(mat_n)}}\left(\text{si } \sigma_{L_{(n)}}<0\right)\\ \dfrac{\sigma_{T_{(n)}}}{Y_{(mat_n)}}\left(\text{si } \sigma_{T_{(n)}}>0\right) & \dfrac{\sigma_{T_{(n)}}}{Y'_{(mat_n)}}\left(\text{si } \sigma_{T_{(n)}}<0\right)\\ \dfrac{|\sigma_{LT_{(n)}}|}{S_{(mat_n)}} & \end{matrix} \tag{69}$$

Le critère de Tsai-Hill s'écrit dans chaque couche de la manière suivante :

$$C_{TH}=\frac{\sigma^2_{L(n)}}{X^2_{(mat_n)}}-\frac{\sigma_{L(n).}\sigma_{T(n)}}{X^2_{(mat_n)}}+\frac{\sigma^2_{T(n)}}{Y^2_{(mat_n)}}+\frac{\sigma^2_{LT(n)}}{S^2_{(mat_n)}} \tag{70}$$

Le matériau est rompu lorsque $C_{TH}\geq 1$. Les valeurs X et Y sont remplacées par X' et Y' lorsque les contraintes $\left(\sigma_{L(n)}\ ,\ \sigma_{T(n)}\right)$ correspondantes sont négatives.

5 Bibliographie

1) S. ANDRIEUX, F. VOLDOIRE : "Formulation d'un modèle de thermique pour les coques minces" - Note HI-71/7131 - 1990, voir aussi : [R3.11.01].
2) J.L. BATOZ, G. DHATT : "Modélisation des structures par éléments finis" - Vol 2 Poutres et plaques - HERMES 1990.
3) J.R. BARBER : "Elasticity". Kluwer academic publishers.

6 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6,3	P. MASSIN, F. NAGOT, F. VOLDOIRE EDF-R&D/AMA	Texte initial
7,4	P. MASSIN, J.M.PROIX-R&D/AMA	

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)