Formulation d'un modèle de thermique pour les coques minces

Résumé :

Le modèle présenté ici est issu de l'analyse asymptotique des équations de la thermique lorsque l'épaisseur de la structure tend vers zéro.

La température est décrite par 3 champs définis sur la surface moyenne de la coque.

On montre sur quelques exemples, les capacités du modèle par référence à des solutions 3D.

Les applications visées sont les calculs de coques thermomécaniques, la restitution thermique de paroi pour la thermohydraulique des tuyauteries, les problèmes d'identification.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Présentation du modèle....5
2.1 Position du problème thermique dans les coques....5
2.1.1 Description de la géométrie....5
2.1.2 Équation de la chaleur....6
2.1.3 Thermique pour une structure mince....7
2.2 Rappel des résultats issus du développement asymptotique....8
2.2.1 Le modèle limite obtenu....8
2.2.2 Une application....10
2.3 Formulation du modèle de thermique stationnaire de coque....12
2.3.1 Équations du modèle....12
2.3.2 Cas d'une plaque homogène....14
2.3.3 Lien avec le modèle asymptotique....16
2.3.4 Généralisation aux problèmes d'évolution thermique....18
2.3.5 Équations du modèle avec des variables usuelles....20
2.3.5.1 Cas d'une plaque homogène....22
2.3.5.2 Relation entre les variables des deux représentations....23
2.3.6 Synthèse....23
3 Validation du modèle sur quelques exemples....25
3.1 Le cylindre infini soumis à un flux intérieur uniforme....25
3.2 La plaque infinie sous un couple de flux antisymétriques....27
3.3 La plaque infinie sous un couple de flux symétriques....29
3.4 Le cylindre infini soumis à une stratification horizontale....33
4 Remarques sur la discrétisation numérique....36
4.1 Résolution par éléments finis....36
4.2 Blocage numérique d'un élément fini de coque thermique....37
5 Conclusion....41
6 Références....42
7 Description des versions du document....42
Annexe 1 Plaque infinie sous un couple de flux symétriques....43
Annexe 2 Formulation mixte du problème stationnaire pour la plaque....45

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Les modèles mécaniques de structures minces (coques et plaques) sont arrivés à un stade de développement extrêmement avancé du moins pour les structures élastiques homogènes dans l'épaisseur. Le problème est connu depuis fort longtemps et diverses théories ont vu le jour, généralement dédiées à des problèmes spécifiques (coques épaisses, flambage etc…). Cependant un modèle de base, celui de LOVE-KIRCHHOFF, fait l'unanimité dans les applications les plus courantes. Les difficultés résident plutôt dans le calcul numérique de celui-ci du fait, d'une part, de la nécessité d'approcher correctement la surface de la coque (en particulier sa courbure), et d'autre part de l'ordre élevé des équations aux dérivées partielles qu'il faut résoudre ($4^{ème}$ ordre).

En thermique en revanche, la situation est beaucoup moins nette et un grand nombre d'approches coexistent. Ce n'est en effet que récemment que le problème s'est posé avec les possibilités (et la nécessité) de calculs thermomécaniques. Les premiers modèles négligent la conduction parallèlement à la surface moyenne pour ne retenir que les transferts thermiques dans l'épaisseur de la coque, cette démarche est tout à fait antinomique de celle des structures minces où, au contraire, la faible épaisseur de la structure conduit à des hypothèses simplificatrices sur la variation dans l'épaisseur des champs de grandeurs physiques.

Les modélisations les plus récentes s'inspirent des idées mécaniques de coques minces se rattachant à la deuxième approche, on peut les classer selon un ordre tout à fait similaire.

1) Modèles faisant intervenir un développement polynômial plus ou moins poussé de la température dans l'épaisseur [bib2], [bib9], [bib10]. Il s'agit essentiellement de formulation d'éléments finis.
2) Modèles associés aux théories de surfaces à directeurs (Surfaces de COSSERAT) [bib5], [bib8]. Le directeur est ici le gradient de la température dans l'épaisseur. Le problème de ces approches réside dans la loi de comportement à introduire. La cohérence avec la loi tridimensionnelle conduit à des choix qui s'interprètent comme une hypothèse de répartition linéaire de la température dans l'épaisseur. Ce formalisme rejoint donc pratiquement les modèles précédents (l'introduction de plusieurs directeurs s'identifiant à divers ordres de développement des polynômes).
3) Modèles d'éléments finis dégénérés [bib11] : partant d'un élément fini tridimensionnel, l'introduction de contraintes entre les degrés de libertés situés sur une même normale à la surface moyenne permet par condensation de déduire un élément de "coque thermique". Pratiquement, là encore, l'élément de base utilisant une interpolation parabolique selon l'épaisseur, l'élément de coque correspond à une répartition linéaire dans l'épaisseur.

Parallèlement à ces approches numériques (1) et (3) ou basées sur des hypothèses a priori (2), des résultats sur la forme du champ de température d'une plaque mince et du problème dont elle est solution ont été obtenus par des méthodes asymptotiques [bib3], [bib1].

Comme pour le modèle mécanique, celles-ci permettent de justifier les hypothèses a priori faites dans les théories de coques minces, voire d'obtenir les équations du problème de coque. Les résultats de [bib 1] sont rappelés plus bas et serviront de base au modèle proposé. Notons simplement ici que l'idée sous-jacente à toute démarche de type asymptotique est d'introduire un petit paramètre ε (ici le rapport épaisseur de la plaque sur une dimension caractéristique de celle-ci), puis ayant obtenu le problème limite lorsque ε tend vers zéro à partir du problème tridimensionnel, d'approcher dans les applications (où ε prend évidemment une valeur non nulle) la solution par sa limite.

D'un point de vue pratique, la limite obtenue pour les équations de la thermique stationnaire semble être trop "pauvre" pour être d'un réel intérêt, (on en donnera une illustration en [§2.2.2]). Plus précisément les valeurs de ε à atteindre pour identifier la solution à sa limite sont très petites dans les situations réelles rencontrées.

C'est la raison pour laquelle on se propose dans cette note de garder **la forme de la solution limite** (répartition parabolique dans l'épaisseur) **mais d'en disposer comme d'une hypothèse a priori sur la solution tridimensionnelle** permettant de se ramener à un problème posé sur la surface moyenne.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On dispose ainsi d'un **modèle approché de structure mince convergeant vers le modèle limite des équations tridimensionnelles**. En ce sens, il est "optimal" puisqu'une hypothèse de répartition linéaire dans l'épaisseur conduit à un modèle **ne convergeant pas vers la solution limite** et qu'un modèle basé sur un développement plus riche dans l'épaisseur voit ses termes d'ordre supérieur à deux **converger vers zéro** lorsque la coque est mince.

Le plan de la note est le suivant :

- on commence par rappeler les équations du problème thermique stationnaire pour le solide tridimensionnel et leurs expressions dans un système de coordonnées adapté aux cas où le solide est une "coque mince",

- puis, ayant rappelé les résultats d'une étude asymptotique de ces équations réalisée dans le cas d'une plaque, on donne la description complète du modèle proposé,

- on applique alors le modèle à un certain nombre de géométries et de chargements thermiques et une comparaison est faite par rapport à des solutions analytiques ou des calculs numériques tridimensionnels,

- enfin, on donne quelques indications sur les aspects numériques de l'utilisation du modèle dans un calcul par éléments finis surfaciques et linéiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Présentation du modèle

2.1 Position du problème thermique dans les coques

Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord rappeler la description de la géométrie des coques, vues comme solides tridimensionnels minces. On posera ensuite le problème de conduction thermique.

2.1.1 Description de la géométrie

Une coque est définie comme étant un solide Ω, mince perpendiculairement à une surface moyenne ω. On note $2h$ l'épaisseur de la coque ; on choisit un système de coordonnées (x_1, x_2) sur la surface ω. On note g le tenseur métrique associé, $\vec{n}$ le vecteur normal, c le tenseur courbure de ω.

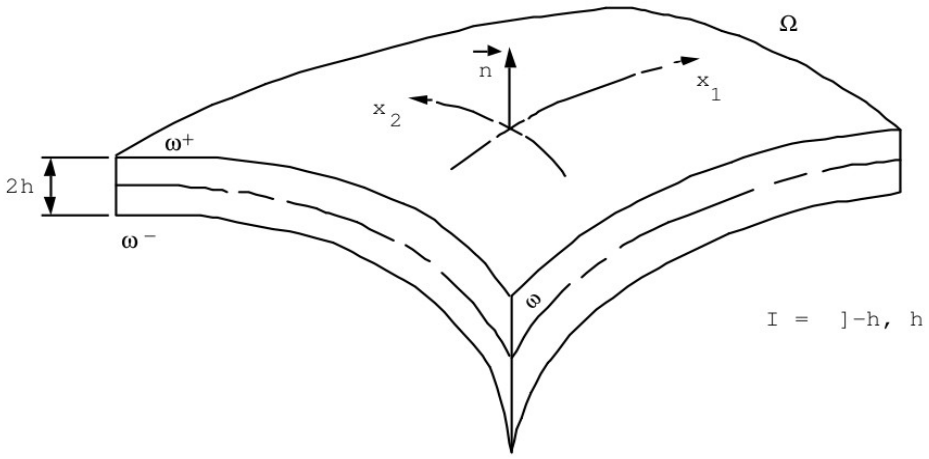


Figure : 2.1.1-a

La coque Ω est décrite par le système de coordonnées (x_γ, x_3), x_3 selon $\vec{n}$: $\Omega = \omega \times]-h, h[$

(Les indices grecs α, β, γ sont dédiés aux coordonnées surfaciques sur ω).

Cette description convient bien entendu pour une coque d'épaisseur $2h$ inférieure au plus petit rayon de courbure de ω.

En un point quelconque (x_γ, x_3) de la coque Ω, le tenseur métrique G s'exprime en fonction des tenseurs fondamentaux g et c de la surface moyenne ω par :

$$\begin{cases} G_{\alpha\beta}(x_\gamma, x_3) = g_{\alpha,\beta}(x_\gamma) - 2 x_3 c_{\alpha\beta}(X_\gamma) \\ G_{\alpha 3} = 0 \quad , \quad G_{33} = 1 \end{cases} \qquad \textbf{éq 2.1.1-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\text{et} \quad \begin{aligned} \sqrt{\det G} &= \sqrt{\det G}\,(1 - x_3 \operatorname{tr} c) \\ &= \sqrt{\det G}\left(1 + x_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right) \end{aligned}$$

où $R_{1,} R_2$ sont les rayons de courbure principaux de ω au point x_γ considéré.

Remarque :

On sait en effet que la trace (tr) *d'un tenseur est un invariant (par changement de base). On a l'habitude cependant d'écrire les grandeurs en base physique c'est-à-dire orthonormée. Ainsi :.* $G^{phy}_{\alpha\beta}(x_\gamma, x_3) = \delta_{\alpha\beta} - 2\, x_3 C^{phy}_{\alpha\beta}(x_\gamma)$

Et si la base est principale de courbure : $C^{phy}_{\alpha\beta} = \frac{-1}{R_\beta}\delta_{\alpha\beta}$ *(sans sommation).*

On notera : $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = H_1$ et $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = H_2$.

On s'est limité ici aux termes du premier ordre en $x_3 \ \operatorname{tr} C$; comme on le fera dans toute la suite. En pratique, en effet, la minceur de la coque permet une telle simplification. On aura avantage aussi à se placer dans un repère principal de courbure, orthonormé. Le tenseur g est alors l'identité, C est diagonal. C'est ce qu'on fera dorénavant.

2.1.2 Équation de la chaleur

Les équations de la conduction thermique tridimensionnelle s'écrivent (pour un conducteur rigide) :

$$-\operatorname{div}(\mathbf{K}\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) + \rho C_t T = r \qquad \textbf{éq 2.1.2-1}$$

où $\mathbf{K}$ désigne le tenseur de conductivité, ρC la capacité calorifique et r les sources éventuelles.

On a avantage à écrire l'expression de l'opérateur différentiel selon la métrique G engendrée par la surface moyenne ω . On considérera en effet des tenseurs de conductivité $\mathbf{K}$ isotropes transverses selon ces axes de coordonnées (cf. matériaux multicouches).

$$\mathbf{K}^i_j = \begin{pmatrix} k^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, k^\alpha_\beta \text{ et } K \text{ pouvant varier avec } x_{1,} x_{2,} x_3$$

L'expression de l'opérateur :

$$-\operatorname{div}(\mathbf{K}\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) = -(\det G)^{-1/2} . \partial_i\left(\det G^{1/2} \mathbf{K}^i_j G^{ij} \partial_j T\right)$$

s'écrit alors au premier ordre en $x_3 / \operatorname{tr} c$, pour une conductivité orthotrope selon les directions de courbure principales :

$$-(1 - x_3 H_1).\left[\partial_1\left[(1 - x_3 H_2) k_{11} \partial_1 T\right] + \partial_2\left[(1 + x_3 H_2) k_{22} \partial_2 T\right] + H_1 K \partial_3 T\right] - \partial_3\left[K \partial_3 T\right] \qquad \textbf{éq 2.1.2-2}$$

Si les courbures sont constantes, ceci devient :

$$-(1 - 2x_3/R_1).(\partial_1(k_{11}\partial_1 T)) - (1 - 2x_3/R_2).(\partial_2(k_{22}\partial_2 T)) - H_1(1 - x_3 H_1) K \partial_3 T - \partial_3\left(K \partial_3 T\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'effet de la courbure est donc de même type qu'une répartition modifiée de conductivité dans l'épaisseur.

2.1.3 Thermique pour une structure mince

Les équations de la thermique stationnaire sur la coque peuvent être écrites sous la forme d'un problème de minimisation.

On suppose notamment que les conditions aux limites sur les extrémités $\partial\omega\times I$ de la coque Ω sont de même type sur toute l'épaisseur I. On partitionne $\partial\omega\times I$ en :

$\partial\omega_T\times I$ (zone à température imposée),

et $\partial\omega_\varphi\times I$ (zone à condition d'échange ou flux imposé).

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver le champ de température } T:\\ T=\underset{\theta\in V}{\text{Arg Min}}\, J(\theta),\ \text{avec } J(\theta)=\frac{1}{2}A(\theta,\theta)-F(\theta),\ \text{avec}:\\ A(T,\theta)=\int_\Omega \mathbf{K}.\Delta T.\Delta\theta\, d\Omega+\int_{\omega^+\cup\omega^-}\lambda T.\theta\, d\omega^{\pm}+\int_{\partial\omega_\varphi\times I}\lambda T.\theta\, dS\\ F(\theta)=\int_{\omega^+\cup\omega^-}\varphi.\theta\, d\omega^{\pm}+\int_{\partial\omega_\varphi\times I}\varphi.\theta\, dS\end{array}\right. \qquad \text{éq 2.1.3-1}$$

On note :

- $V=\left\{\theta\in H^1(\omega\times I),\theta=0 \text{ sur } \partial\omega_T\times I\right\}$.
- Les conditions aux limites sur $\omega^+\cup\omega^-\cup(\partial\omega_\varphi\times I)$ sont du type échange ou flux imposé φ :

  $\vec{\Phi}\vec{n}=\lambda T-\varphi=-(\mathbf{K}\Delta T).\vec{n}$ λ étant un coefficient d'échange.

Le terme de conductivité dans $A(T,\theta)$ s'écrit :

$$\int_\Omega \mathbf{K}\Delta T.\Delta\theta\, d\Omega$$
$$=\int_\omega\int_I\left[k_{\alpha\beta}\left(1-x_3\left(\frac{1}{R_\alpha}+\frac{1}{R_\beta}\right)\right)\partial_\alpha T\partial_\beta\theta+K\partial_3 T\partial_3\theta\right](1+x_3H_1)\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

ce, dans un repère principal orthonormé de courbure de ω ($k_{\alpha\beta}$ et K sont alors les composantes physiques du tenseur de conduction $\mathbf{K}$).

Les termes d'échange sur les surfaces ω^+ et ω^- sont :

$$\int_{\omega^+\cup\omega^-}\varphi.\theta\, d\omega^{\pm}=\int_\omega \lambda^{\pm}T^{\pm}\theta^{\pm}.(1\pm h.H_1)\,dx_1\,dx_2$$

L'objet d'un modèle de coque thermique est donc de ramener de trois à deux variables d'espace la dépendance du champ de température T dans l'expression de l'opérateur différentiel correspondant à [eq 2.1.2-2] ou [eq 2.1.3-1], moyennant le choix et la justification d'hypothèses appropriées.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le modèle proposé en [§2.3] repose sur les résultats du développement asymptotique des équations de la thermique présentés en [§2.2] ci-après.

2.2 Rappel des résultats issus du développement asymptotique

2.2.1 Le modèle limite obtenu

On résume ici les principaux résultats obtenus en [bib1] par une technique de développement asymptotique. On considère le cas d'une plaque : $\omega \times I_\varepsilon$, d'épaisseur $2\varepsilon h$. La température est fixée à 0 sur le bord $\partial\omega \times I_\varepsilon$, et des flux φ^+ , φ^- sur les faces ω^+ et ω^- .

On cherche à étudier la dépendance de la solution T^ε du problème thermique [éq 2.1.3-1] vis-à-vis de l'épaisseur de la plaque $2\varepsilon h$. On utilise pour cela une technique de changement d'ouvert qui ramène le problème à un domaine fixe $\omega \times I$, avec $i =]-h, +h[$. Le paramètre ε apparaît alors explicitement dans les équations du problème transporté (P^ε) , de $\omega \times I_\varepsilon$ à $\omega \times I$.

Sur $\omega \times I_\varepsilon$, le problème initial s'écrit sous forme variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver} : T^\varepsilon \in V = \{\theta \in H^1(\omega \times I_\varepsilon), \theta = 0 \text{ sur } \partial\omega \times I_\varepsilon\} \\ \text{tel que :} \\ \int_{\omega \times I_\varepsilon} (k_{\alpha\,\hat{e}ta} . T_{,\alpha} . \theta_{,\beta} + k_{33} T_{,3} . \theta_{,3}) = \int_\omega (\varphi^+ \theta^+ + \varphi - \theta^-) \quad \forall \theta \quad \mathbf{V^\varepsilon} \end{cases}$$ **éq 2.2.1-1**

Les résultats du développement asymptotique [bib 1] consistent en les propriétés suivantes vérifiées par $T(\varepsilon)$, la solution du problème transporté (P^ε) , posé sur $\omega \times I$:

$$\begin{cases} (i) \quad \dfrac{1}{\varepsilon} T(\varepsilon) \text{ tend vers } T_1(x_\alpha; x_3) = T_1(x_\alpha) \text{ dans } H^1(\omega \times I) \\ \quad T_1(x_\alpha) \text{ apparaît comme une température moyenne sur l'épaisseur } I, \text{ au point } x_\alpha \\ (ii) \quad \varepsilon T, э(\varepsilon), \text{ qui est la dérivée de } \varepsilon T \text{ selon la variable d'épaisseur } x_3 \in I, \text{ tend vers la dérivée selon } x_3 \\ \quad \text{du champ } \rho(x_\alpha; x_3) \text{ dans } L^2(\omega) \times H^1_m(I), \text{ où } H^1_m(I) \text{ désigne l'espace des fonctions de} \\ \quad H^1(I) \text{ à moyenne nulle.} \end{cases}$$

éq 2.2.1-2

En conclusion, la solution T^ε du problème initial sur $\omega \times I_\varepsilon$ peut se représenter par les deux premiers termes de son développement :

$$T^\varepsilon(x_\alpha, x_э^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} T_1(x_\alpha) + \varepsilon \rho(x_\alpha, x_3 = x_э^\varepsilon/\varepsilon) + ... \quad \textbf{éq 2.2.1-3}$$

Cependant le gradient de T^ε ne se représente pas par le gradient de la représentation de T^ε . Cette situation est générique des problèmes de perturbations singulières rencontrés dans l'étude des structures minces (plaques, poutres...) :

$$(\nabla T^\varepsilon)^\varepsilon(x_\alpha, x_э^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} T_1(x_\alpha)_{,\beta} \vec{e}_\beta + \rho(x_\alpha, x_3 = x_э^\varepsilon/\varepsilon)_{,э} \vec{e}_3 \quad \textbf{éq 2.2.1-4}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le champ du "gradient de T^{ε} " n'est donc pas un champ de gradient !

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les champs T_1 et ρ se calculent sur la surface moyenne ω. Dans le cas où la conductivité est homogène dans l'épaisseur, on a :

$$\begin{cases} T_1 \in H_0^1(\omega), \text{solution de :} \\ \int_\omega h\, k_{\alpha\beta} T_{1,\alpha}.\theta_{,\beta} = \int_\omega \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-)\theta, \qquad \forall \theta \in H_0^1(\omega) \end{cases} \quad \textbf{éq 2.2.1-5}$$

$$\rho(x_\alpha, x_3) = \frac{\varphi^+(x_\alpha)+\varphi^-(x_\alpha)}{4K(x_\alpha)} \cdot \left(\frac{x_3^2}{h} - \frac{h}{3} \right) + \frac{\varphi^+(x_\alpha)-\varphi^-(x_\alpha)}{2K(x_\alpha)} . x_3 \quad \textbf{éq 2.2.1-6}$$

On constate que T_1 est la solution d'un problème posé sur ω, alors que ρ s'obtient explicitement en fonction des flux imposés. Ces deux équations constituent le modèle "limite" obtenu par le développement asymptotique.

Remarque :

- *Dans un langage plus imagé et plus flou, les résultats précédents s'interprètent en disant que pour une plaque mince, la température moyenne est régie par le flux moyen reçu et la conduction dans le plan de la plaque. La répartition dans l'épaisseur n'est fonction, en un point donné, que des flux imposés en ce point sur les faces supérieure et inférieure, elle n'est pas affectée par la présence des points voisins.*
- *La répartition de température dans l'épaisseur est "parabolique" selon la représentation [éq 2.2.1-6].*

2.2.2 Une application

On peut illustrer les résultats du développement asymptotique par un exemple simple, qui montre aussi les limitations du modèle obtenu en utilisant la représentation de la température [éq 2.2.1-3] à l'aide des champs T_1 et ρ, [éq 2.2.1-5] et [éq 2.2.1-6].

On considère une plaque infinie soumise sur sa moitié $x_2 < 0$ à un couple de flux constants $(\varphi^+ = \varphi, \varphi^- = -\varphi)$ équilibrés, et isolée sur l'autre moitié $x_2 > 0$.

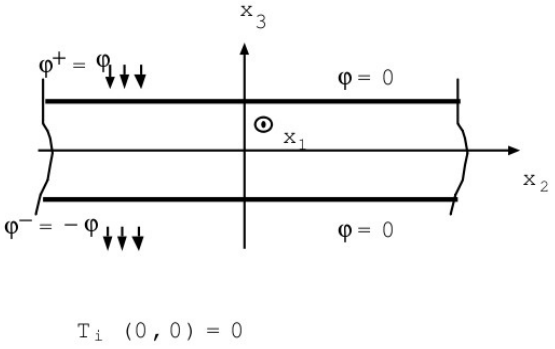


Figure : 2.2.2-a

Le problème [eq 2.2.1-5] de détermination de la température moyenne T_1 est ici une équation différentielle en x_2 : $\frac{\partial^2 x_2}{\partial x_2^2} T_1(x_2) = 0$ puisque le flux moyen $j^+ + j^-$ est nul. La solution est alors $T_1 = 0$ partout.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le champ $\rho(x_2, x_3)$ se calcule aisément par [éq 2.2.1-6] :`

$$\rho(x_2, x_3) = \frac{\varphi}{K} . x_3 \quad \text{pour } x_2 < 0 ,$$

$$\rho(x_2, x_3) = 0 \quad \text{pour } x_2 > 0 .$$

La discontinuité de la condition aux limites de NEUMANN sur $\omega^{\pm}$ se reporte donc directement sur le champ de température : en face supérieure la température T est la suivante :

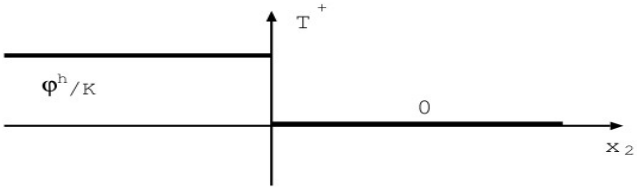


Figure : 2.2.2-b

Cette discontinuité apparaît de plus indépendante de l'épaisseur h dans ce modèle limite, une fois le flux φ apporté normalisé par h.

Cette limitation du modèle limite obtenu par développement asymptotique est inhérente à la détermination purement locale du terme complémentaire parabolique $\rho(x_\alpha, x_3)$. Les discontinuités induites seront gênantes pour les applications, notamment en thermomécanique.

On est ainsi amené à formuler autrement le modèle de thermique de coque, tout en gardant les résultats de ce développement asymptotique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3 Formulation du modèle de thermique stationnaire de coque

On a vu sur les résultats de l'étude asymptotique des équations tridimensionnelles sur le solide $\Omega=\omega\times I$, que le modèle limite obtenu comportait une température moyenne solution d'un problème du 2ème ordre posé sur ω, et que le terme parabolique supplémentaire n'était déterminé que localement (point par point sur ω). Ceci avait donc l'inconvénient de fournir des solutions discontinues lorsque les "chargements" thermiques le sont.

On présente donc dans ce paragraphe une représentation de la température, toujours parabolique dans l'épaisseur, mais évitant l'écueil précédent. On décrit les équations obtenues, et leurs propriétés.

2.3.1 Équations du modèle

Suite aux résultats du développement asymptotique, on **choisit** la représentation dans l'épaisseur suivante sur $\Omega=\omega\times I$:

$$T(x_\alpha,x_3)=T_1(x_\alpha)+T_2(x_\alpha).w_2(x_3)+T_3(x_\alpha).w_3(x_3) \qquad \textbf{éq 2.3.1-1}$$

avec $(w_1=1,w_{2,}w_3)$ une base donnée des polynômes de degré 2.

On remplace ainsi la détermination du champ T à trois variables d'espace par celle de trois champs scalaires T_1, T_2, T_3 à 2 variables surfaciques sur ω. Cette décomposition [éq 2.3.1-1] est pratique pour montrer son lien avec le modèle asymptotique. Mais on utilisera une autre représentation pour le modèle numérique : voir [§ 2.3.5].

On va injecter cette représentation de la température $T(x_\alpha,x_3)$ directement dans le problème thermique [éq 2.1.3-1] posé sur $\Omega=\omega\times I$.

De par la définition de l'espace $\mathbf{V}$ en [éq 2.1.3 - 1], on adopte pour les champs T_i :

$$\mathbf{W}=\left\{\mathbf{V}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\in H^1(\omega)^3,\theta_i=0 \text{ sur } \partial\omega_T\right\}$$

En posant $\boldsymbol{T}=(T_{1,}T_{2,}T_3)$ la formulation du problème thermique sur Ω devient :

$$\begin{cases}\text{Trouver } \mathbf{T}\in W\\ \boldsymbol{T}=\underset{V\in\mathbf{W}}{\text{Argmin}}\,J(\theta),\text{avec } J(\theta)=\frac{1}{2}A(\theta,\theta)-F(\theta)\text{et}\\ A(\boldsymbol{T},\boldsymbol{\theta})=\int_\omega\left({}^t\nabla\boldsymbol{T}.\mathbf{A}.\nabla\theta+{}^t\mathbf{T}.\boldsymbol{B}.\theta\right)d\omega\\ F(\theta)=\int_\omega{}^t\mathbf{C}.\theta\,d\,\omega+\int_{\partial\omega_\varphi}{}^t\boldsymbol{D}.\theta\,d\,s\end{cases} \qquad \textbf{éq 2.3.1-2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En effet, de [éq 2.3.1-1] on déduit les expressions :

$$\begin{cases} (\nabla \mathrm{T})^{\alpha} = \nabla \mathbf{T}_{\alpha} . \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{w}_2 \\ \mathrm{w}_3 \end{pmatrix} \\ \partial_3 \mathrm{T} = \mathrm{T} . \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{w}'_2 \\ \mathrm{w}'_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Le tenseur $\boldsymbol{A}$ d'ordre 4 correspond aux conductivités moyennes surfaciques :

$$\boldsymbol{A}_{\alpha\beta\, i\, j}(\mathrm{x}_{\gamma}) = \int_{\mathrm{I}} \mathrm{k}_{\alpha\beta}\, \mathrm{w}_i . \mathrm{w}_j . \left(1 - \mathrm{x}_3 . \left(\frac{1}{\mathrm{R}_{\alpha}} + \frac{1}{\mathrm{R}_{\beta}}\right)\right)(1 + \mathrm{x}_3 \mathrm{H}_1)\, \mathrm{d}\, \mathrm{x}_3 \qquad \textbf{éq 2.3.1-3}$$

(en utilisant la métrique vue en [éq 2.1.1-1]).

La dépendance de $\boldsymbol{A}$ suivant (x_{γ}) provient de celle de $\mathrm{k}_{\alpha\beta}$ et de celle de la courbure moyenne H_1 de la surface ω .

Le tenseur $\boldsymbol{B}$ d'ordre 2 décrit la conduction transversale ainsi que les échanges sur les faces ω^{+} et ω^{-} :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_{i\, j}(x_{\gamma}) = \int_{\mathrm{I}} \mathrm{K} . \mathrm{w}'_i . \mathrm{w}'_j (1 + \mathrm{x}_3 \mathrm{H}_1)\, \mathrm{d}\, \mathrm{x}_3 + \lambda^{+} \mathrm{w}_i(\mathrm{h}) . \mathrm{w}_j(\mathrm{h})(1 + \mathrm{h}\mathrm{H}_1) \\ + \lambda^{-} \mathrm{w}_i(-\mathrm{h}) . \mathrm{w}_j(-\mathrm{h})(1 - \mathrm{h}\mathrm{H}_1) \end{aligned} \qquad \textbf{éq 2.3.1-4}$$

En ce qui concerne le second membre F , le vecteur $\boldsymbol{C}$ est :

$$\boldsymbol{C}(x_{\gamma}) = \varphi_{+} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{w}_2(\mathrm{h}) \\ \mathrm{w}_3(\mathrm{h}) \end{pmatrix} (1 + \mathrm{h}\mathrm{H}_1) + \varphi_{-} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{w}_2(-\mathrm{h}) \\ \mathrm{w}_3(-\mathrm{h}) \end{pmatrix} (1 - \mathrm{h}\mathrm{H}_1) \qquad \textbf{éq 2.3.1-5}$$

(On suppose l'absence de sources de chaleur dans l'épaisseur pour simplifier.)

Enfin :

$$\boldsymbol{D}(x_{\gamma}) = \int_{\mathrm{I}} \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{w}_2(\mathrm{x}_3) \\ \mathrm{w}_3(\mathrm{x}_3) \end{pmatrix} . (1 + \mathrm{x}_3 \mathrm{H}_1)\, \mathrm{d}\, \mathrm{x}_3 , \text{ pour } \mathrm{x}_{\gamma} \in \partial \omega_{\varphi} \qquad \textbf{éq 2.3.1-6}$$

A l'examen de la formulation [éq 2.3.1-2] obtenue pour la thermique de coque, on constate que l'opérateur différentiel reste d'ordre 2 , contrairement à la mécanique où celui-ci passe à 4 . En thermique la courbure de la surface moyenne n'intervient que dans une modification de métrique, et non directement dans les opérateurs, ainsi que le ferait une hétérogénéité des conductivités dans l'épaisseur.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3.2 Cas d'une plaque homogène

Dans le cas où l'on considère une plaque, ou si on néglige la variation de métrique dans l'épaisseur de la coque ($1 \gg h H_1$) et en supposant le matériau homogène dans l'épaisseur pour simplifier, on peut proposer le choix d'une base $(1, w_{2,} w_3)$ des polynômes de degré 2 (polynômes de Legendre), de sorte que les tenseurs de conduction $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ se diagonalisent sur les indices i, j (en U_j, V_j) :

$$w_2(x_3)=x_3/h;\quad w_3(x_3)=\frac{3}{2}\left(\frac{x_3^2}{h^2}-\frac{1}{3}\right) \qquad \textbf{éq 2.3.2-1}$$

soit : $w_i(h)=1\ \forall\, i; w_2(-h)=-1=-w_3(-h)$

$$\int_I w_2=0=\int_I w_3=\int_I w_2 . w_3=\int_I w_2' . w_3'$$

$$\text{et : } \int_I w_2^2=\frac{2h}{3}; \int_I w_3^2=\frac{2h}{5}; \int_I w_2'^2=\frac{2}{h}; \int_I w_2'^2=\frac{6}{h}$$

Ainsi T_1 sera la température moyenne, T_2 sera associé au gradient dans l'épaisseur.

On trouve alors :

$$\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}^{11}=2\,kh\,\delta_{\alpha\beta}; \boldsymbol{A}_{\alpha\beta}^{22}=\frac{2}{3}kh\,\delta_{\alpha\beta}; \boldsymbol{A}_{\alpha\beta}^{33}=\frac{2}{5}kh\,\delta_{\alpha\beta}; \boldsymbol{A}_{\alpha\beta}^{ij}=0 \ \text{ si } i\neq j$$

De plus : $$\boldsymbol{B}=\frac{2K}{h}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}+(\lambda^+ +\lambda^-)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}+(\lambda^+ -\lambda^-)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=(\varphi^+ +\varphi^-)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(\varphi^+ -\varphi^-)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\int_I \varphi\\ \int_I \varphi . x_3/h\\ \int_I \varphi\frac{3}{2}(x_3^2/h^2-1/3)\end{pmatrix}_{\text{sur}\,\partial\omega_\varphi}$$

En écrivant la formulation variationnelle du problème [éq 2.3.1-2] :

$$\begin{cases}\text{Trouver } U=\begin{pmatrix}T_1\\T_2\\T_3\end{pmatrix}\in H_1(\omega)^3 \text{ tel que } \forall V\in H_1(\omega)^3\\ \int_\omega \left({}^t\nabla U . \boldsymbol{A} . \nabla V + {}^tU \boldsymbol{B} . V\right) dx_1 dx_2 + \int_\omega {}^t\boldsymbol{C}\, dx_1 dx_2 + \int_{\partial\omega_\varphi} {}^t\boldsymbol{D} . V\, ds\end{cases}$$

on établit les équations locales à résoudre dans ω :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} -2\,kh\,\Delta T_1 + & (\lambda^+ + \lambda^-)(T_1+T_3) + & (\lambda^+ - \lambda^-)(T_2) = & \varphi^+ + \varphi^- \\ \frac{-2}{3}\,kh\,\Delta T_2 + 2\frac{K}{h}T_2 + & (\lambda^+ + \lambda^-)T_2 + & (\lambda^+ - \lambda^-)(T_1+T_3) = & \varphi^+ - \varphi^- \\ \frac{-2}{5}\,kh\,\Delta T_3 + \frac{6K}{h}T_3 + & (\lambda^+ + \lambda^-)(T_1+T_3) + & (\lambda^+ - \lambda^-)T_2 = & \varphi^+ + \varphi^- \end{cases} \quad \textbf{éq 2.3.2-2}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$T_{1,}\,T_{2,}\,T_3 \text{ donnés sur } \partial\omega_T$$
$$\begin{cases} T_{1,v} = \frac{1}{4k^2h^2}\int_I \varphi \\ T_{2,v} = \frac{9}{4k^2h^2}\int_I \varphi\, x_3/h & \text{sur } \partial\omega_\varphi \\ T_{3,v} = \frac{25}{4k^2h^2}\int_I \varphi . \frac{3}{2}(x_3^2/h^2 - 1/3) \end{cases}$$

Les équations [éq 2.3.2-2] sont donc valables pour les plaques et les coques minces dont on néglige les termes de courbure dans la métrique $(1 \gg hH_1)$, et pour un matériau homogène dans l'épaisseur.

Les solutions générales $[T_i]$ de [éq 2.3.2-2] comportent des exponentielles de type $e^{-|x|/l^a}$ avec des longueurs d'amortissement l^a dépendant des valeurs de $\frac{k}{K}$ et $\frac{\lambda^\pm h}{k}$. Par exemple, en l'absence de conditions de type échange sur les parois $\omega+ \cup \omega- \ (\lambda^\pm = 0)$, on obtient pour les champs T_2 et T_3 les longueurs d'amortissement respectives :

$$l_2^a = h\sqrt{\frac{k}{3K}} \qquad l_3^a = h\sqrt{\frac{k}{15K}}$$

Il arrive en pratique fréquemment que négliger les termes de courbure ($hH_1 \ll 1$) dans l'opérateur ne détériore que peu la solution ; par contre, on a souvent intérêt à garder l'expression complète dans le second membre. En effet ceci permet de calculer la vraie quantité de chaleur apportée par les flux appliqués sur les faces $\omega^\pm$ (cf. exemple en [§3.1]). Dans ce cas, il faut prendre $\boldsymbol{C}$ dans [éq 2.3.1-2] et [éq 2.3.2-2].

$$\boldsymbol{C} = (\varphi^+ + \varphi^-)\begin{pmatrix} 1 \\ hH_1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\varphi^+ - \varphi^-)\begin{pmatrix} hH_1 \\ 1 \\ hH_1 \end{pmatrix} \quad \textbf{éq 2.3.2-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3.3 Lien avec le modèle asymptotique

On peut vérifier facilement que le modèle proposé ici a bien pour limite quand l'épaisseur εh tend vers 0 les résultats du développement asymptotique présentés en [éq 2.2.1-5] et [éq 2.2.1-6].

En effet l'épaisseur h intervient ici explicitement dans les coefficients de l'opérateur différentiel dans les équations locales [éq 2.3.2-2], qui sont résolues sur la surface moyenne ω.

Dans le cas sans échange thermique ($\lambda^+=\lambda^-=0$) considéré dans l'étude asymptotique, ces équations [éq 2.3.2-2] ont la forme :

$$\begin{cases} -2k\Delta T_1=\dfrac{1}{\varepsilon h}(\varphi^+ +\varphi^-) \\ \dfrac{-2}{3}k h^2\varepsilon^2\Delta T_2=\varepsilon h(\varphi^+ -\varphi^-) \\ \dfrac{-2}{5}k h^2\varepsilon^2\Delta T_3=\varepsilon h(\varphi^+ +\varphi^-) \end{cases}$$

Après un développement asymptotique formel de la solution (T_i) selon l'épaisseur ε dans ces équations, on vérifie bien que :

- εT_1 est solution du problème [éq 2.2.1-5] donnant le terme principal du développement asymptotique (cf. [§2.2]).
- $\dfrac{1}{\varepsilon}T_2$ et $\dfrac{1}{\varepsilon}T_3$ sont :

$$\frac{1}{\varepsilon}T_2=h\frac{(\varphi^+ -\varphi^-)}{2K}\ ;\ \frac{1}{\varepsilon}T_3=h\frac{(\varphi^+ +\varphi^-)}{6K}$$

ce qui correspond bien à la définition [éq 2.2.1-6] du champ complémentaire ρ.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le modèle [éq 2.3.1-1] à trois champs scalaires T_1, T_2, T_3, parabolique dans l'épaisseur, apparaît en quelque sorte le modèle optimal vis-à-vis du comportement asymptotique des équations de la thermique stationnaire dans les structures minces. Le schéma suivant indique l'imbrication des différents modèles possibles, avec leur comportement quand l'épaisseur tend vers zéro (flèches $\rightarrow$) :

Modèle à 2 champs (affine)	**Modèle limite asymptotique**	**Modèle à 3 champs (parabolique)**	**Modèles plus riches**
$\hat{T}_1(x_\alpha)$	$\frac{1}{\varepsilon}\tilde{T}_1(x_\alpha)$	$T_1(x_\alpha)$	$T_1(x_\alpha)$
+	+	+	+
$\hat{T}_2(x_\alpha)\frac{x_3}{h}$	$\varepsilon\,\rho\left(x_\alpha, \frac{x_3^\varepsilon}{\varepsilon}\right)$	$\begin{cases} T_2(x_\alpha) w_2(x_\alpha) \\ + \\ T_3(x_\alpha) w_3(x_\alpha) \end{cases}$	$\begin{cases} T_2(x_\alpha) w_2(x_\alpha) \\ + \\ T_3(x_\alpha) w_3(x_\alpha) \end{cases}$
	+		+
	ε^2 ... + ...		$T_i(x_\alpha) w_i(x_\alpha)$ +...

On a vu l'intérêt du terme supplémentaire ρ pour décrire les évolutions de température dans l'épaisseur x_3 (alors que $\tilde{T}_1(x_\alpha)$ est constant sur l'épaisseur).

Or le résultat précédent prouve que le terme $\hat{T}_2$ du modèle à 2 champs ne converge pas vers ρ : il faut au moins une représentation à 3 champs pour cela. Pourtant, sachant que les modèles mécaniques de coques considèrent des déformations thermiques affines dans l'épaisseur, on aurait pu croire suffisant un modèle thermique à 2 champs. On verra en [§3.3] un exemple illustrant (pour une épaisseur donnée) l'effet du terme parabolique T_3 sur la température moyenne T_1 entre les différents modèles.

D'autres auteurs proposent des modèles de thermique plus riches (cf. par exemple [bib9], [bib10], [bib2], probablement intéressants pour des coques épaisses, mais dont les termes supérieurs à l'ordre 2 deviennent inutiles pour les structures minces.

En effet, comme le montre le schéma précédent, les termes d'ordre supérieur viennent uniquement corriger (lorsque $\varepsilon \neq 0$) des expressions dont les parties principales sont données par T_1 d'une part, T_2 et T_3 d'autre part. Qualitativement, ils n'apportent donc rien (contrairement à T_2 et T_3), quantitativement leur contribution devient vite négligeable en général devant les parties principales.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3.4 Généralisation aux problèmes d'évolution thermique

Le modèle de thermique dans les coques présenté précédemment a été justifié à partir des résultats du développement asymptotique des équations tridimensionnelles de la thermique stationnaire. On ne dispose cependant pas de résultats sur le problème d'évolution, hormis la convergence du terme en température moyenne $<T>$ (cf. [bib3]) (voir aussi la remarque faite ci-après en [éq 2.3.4-5]).

On peut cependant donner quelques indications sur la résolution du problème d'évolution, notamment dans le cadre d'une approche modale (contrairement à une intégration directe en temps).

Les équations tridimensionnelles sont :

$$\begin{aligned} &-\boldsymbol{K}\,\Delta T+\rho C\,\partial_i T=r \text{ sur } \Omega \\ &\text{avec :} \\ &T=T_d \text{ sur } \partial\Omega_T \ , \ -k\,\partial_n T=\varphi \text{ sur } \partial\Omega_\varphi \\ &T(x,t=0)=T^0(x) \text{ sur } \Omega \end{aligned} \qquad \textbf{éq 2.3.4-1}$$

On note : $(\mu_q, \hat{T}_q)$ les valeurs propres et les vecteurs propres du problème suivant :

$$\boldsymbol{K}\,\Delta\hat{T}+\mu\,\rho C\hat{T}=0 \text{ sur } \Omega \ ; \ \hat{T}=0 \text{ sur } \partial\Omega_T \ , \ \partial_n\hat{T}=0 \text{ sur } \partial\Omega_\varphi \qquad \textbf{éq 2.3.4-2}$$

La solution (tridimensionnelle) de [eq 2.3.4 - 1] est alors donnée par :

$$T(x,t)=\sum_{q=1}^{\infty}\left[\left(\int_\Omega T^0.\hat{T}_q\right)e^{-\mu_q t}+\int_0^t\left(\int_\Omega r(s).\hat{T}_q+\int_{\partial\Omega_\varphi}\varphi(s).\hat{T}_q\right)e^{-\mu_q(t-s)ds}\right].\hat{T}_q(x) \qquad \textbf{éq 2.3.4-3}$$

Les μ_q, inverses de temps de relaxation, sont caractéristiques des modes spatiaux du problème [éq 2.3.4-2]. Pour résoudre les équations [éq 2.3.4-1] sur une coque mince, on peut adopter comme en stationnaire la représentation [éq 2.3.1-1] pour le champ de température dans la coque :

$$T(x_\alpha;x_3,t)=\sum_{i=1}^{3}T_i(x_\alpha).f_i(t).w^i(x_3)$$

On obtient alors le problème de modes propres, posé sur la surface moyenne ω, sous forme variationnelle :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \left([\mu_q],[\hat{T}]_q\right)\in \boldsymbol{R}_+^3 \text{ tels que, } \forall\,\theta\in H_1(\omega)^3: \\ \displaystyle\int_\omega {}^t\nabla[\hat{T}]_q.\mathbf{A}.\nabla\theta+{}^t[\hat{T}]_q.\left(\mathbf{B}-2h\rho C.\begin{bmatrix}\mu_q^1 & 0 & 0\\ 0 & \mu_q^2 & 0\\ 0 & 0 & \mu_q^3\end{bmatrix}.\theta\right)d\omega=0 \end{array}\right. \qquad \textbf{éq 2.3.4-4}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Note : l'opérateur ${}^t\nabla(.).\boldsymbol{A}.\nabla(.)+(.).\boldsymbol{B}(.)$ est bien elliptique ; on rappelle que $\boldsymbol{B}$ décrit la conduction transversale (coefficient k) ainsi que les échanges sur les deux parois de la coque, alors que $\boldsymbol{A}$ correspond à la conduction surfacique (coefficient K). On a supposé ici que ρc était homogène dans l'épaisseur.

Par exemple, si on néglige l'effet de courbure dans l'épaisseur, en l'absence de condition d'échange sur les parois ω^+, ω^-, et avec un matériau homogène, on obtient les équations aux dérivées partielles suivantes, à résoudre sur ω (cf. [éq 2.3.2-2]) :

$$\begin{cases} \Delta \hat{T}_1+\mu_1\frac{\rho C}{k}\hat{T}_1=0 \\ \Delta \hat{T}_2+3\frac{\rho C}{k}(\frac{-K}{h^2\rho C}+\mu_2)\hat{T}_2=0 \\ \Delta \hat{T}_3+5\frac{\rho C}{k}(\frac{-3K}{h^2\rho C}+\mu_3)\hat{T}_3=0 \qquad \text{avec}\,\mu_i>0 \end{cases} \qquad \textbf{éq 2.3.4-5}$$

On constate ici que l'épaisseur h n'affecte pas les modes de température moyenne T_1. Par contre, une augmentation relative de conductivité transversale K/k ou une diminution d'épaisseur h ont pour effet de diminuer les temps caractéristiques pour les modes de "températures" T_2 et T_3.

La solution complète selon cette représentation apparaît donc sous la forme :

$$\begin{aligned} T(x_\alpha;x_3,t) = &\sum_{q=1}^{\infty}\left[\int_\omega 2h\,T_1^0.\hat{T_{1q}}e^{-\mu_q^2 t}+\int_0^t\left(\int_\omega(\varphi^+(s)+\varphi^-(s)).\hat{T_{1q}}\right)e^{-\mu_q^1(t-s)}ds\right].\hat{T_{1q}}(x_\alpha) \\ &+\sum_{q=1}^{\infty}\left[\int_\omega\frac{2h}{3}T_2^0.\hat{T_{2q}}e^{-\mu_q^2 t}+\int_0^t\left(\int_\omega(\varphi^+(s)+\varphi^-(s)).\hat{T_{2q}}\right)e^{-\mu_q^1(t-s)}ds\right].\hat{T_{2q}}(x_\alpha)\frac{x_3}{h} \\ &+\sum_{q=1}^{\infty}\left[\int_\omega\frac{2h}{5}T_3^0.\hat{T_{3q}}e^{-\mu_q^3 t}+\int_0^t\left(\int_\omega(\varphi^+(s)+\varphi^-(s)).\hat{T_{3q}}\right)e^{-\mu_q^3(t-s)}ds\right].\hat{T_{3q}}(x_\alpha)\frac{3}{2}\left(\frac{x_3^2}{h^2}-\frac{1}{3}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{éq 2.3.4-6}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où on a considéré une température initiale :

$$T^0(x_\alpha; x_3) = T_i^0(x_\alpha).\, w_i(x_3)$$

et où on a supposé l'absence de sources de chaleur dans l'épaisseur.

En comparant la solution 3D [éq 2.3.4-3] et le modèle de coque [éq 2.3.4-6], on constate que dans ce dernier les modes transversaux $\hat{T}_q$ selon x_3 ne sont représentés que par les fonctions $w_i(x_3)$ données ; ce qui revient à tronquer la série $\hat{T}_q$. Mais une autre limitation apparaît dans le produit de convolution pour les temps de relaxation $\frac{1}{\mu_q}$ caractéristiques des modes transversaux dans [éq 2.3.4-3] qui disparaissent dans le modèle [éq 2.3.4-6] au-delà d'un « mode » parabolique.

Dans une diffusion de chaleur purement transversale (décrite par les $(\hat{T}_{i0}, \mu_{i0})$ dans le modèle [éq 2.3.4-6]), la valeur propre la plus faible étant $K/h^2 \rho C$ on peut espérer une solution correcte avec le modèle de coque si les temps de relaxation t_c des chargements appliqués sont tels que :

$$t_c > \frac{\rho C}{K} h^2 \qquad \textbf{éq 2.3.4-7}$$

Cette inégalité peut servir de limite pratique d'application du modèle.

2.3.5 Équations du modèle avec des variables usuelles

Le choix des variables T_1, T_2, T_3 de la représentation [éq 2.3.1-1] correspondait au développement de la température selon l'épaisseur.

Pour les applications, il est cependant plus commode de les remplacer par les variables : T^m, T^s, T^i :

T^m désigne la température sur la surface moyenne de la coque,
T^s la température sur la surface "extérieure" $(x_3 = +h)$,
T_i la température sur la surface "intérieure" $(x_3 = -h)$.

La représentation dans l'épaisseur utilise alors les polynômes de LAGRANGE : P_1, P_2, P_3 :

$$T(x_\alpha; x_3) = T^m(x_\alpha).\, P_1(x_3) + T^s(x_\alpha).\, P_2(x_3) + T^i(x_\alpha).\, P_3(x_3)$$

avec :

$$P_1(x_3) = 1 - (x_3/h)^2$$
$$P_2(x_3) = \frac{x_3}{2h}(1 + x_3/h)$$
$$P_3(x_3) = \frac{x_3}{2h}(1 - x_3/h)$$

La formulation du problème thermique sur Ω est similaire à [éq 2.3.1-2], mais où l'on considère :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{T}(\mathrm{T}^{m},\mathrm{T}^{s},\mathrm{T}^{i})$$

$$(\nabla \mathrm{T})^{\alpha}=\nabla \boldsymbol{T}_{\alpha}.\begin{pmatrix}\mathrm{P}_1\\ \mathrm{P}_2\\ \mathrm{P}_3\end{pmatrix};\quad {}_3\mathrm{T}=\boldsymbol{T}.\begin{pmatrix}\mathrm{P}_1\\ \mathrm{P}_2\\ \mathrm{P}_3\end{pmatrix}$$

Le tenseur $\boldsymbol{A}$ d'ordre 4 s'écrit alors :

$$\boldsymbol{A}_{\alpha\beta ij}(x_\gamma)=\int_I k_{\alpha\beta}\,P_i P_j(1+x_3.H_1)\left(1-x_3\left(\frac{1}{R_\alpha}+\frac{1}{R_\beta}\right)\right)dx_3$$

Le tenseur $\boldsymbol{B}$ d'ordre 2 est :

$$\boldsymbol{B}_{ij}(x_\gamma)=\int_I K.P_i'.P_j'(1+x_3H_1)\,dx_3+\lambda^{+}P_i(h).P_j(h)(1+hH_1)+\lambda^{-}P_i(-h).P_j(-h)(1-hH_1)$$

Pour le second membre, $\boldsymbol{C}$ devient :

$$\boldsymbol{C}(x_\gamma)=\varphi_{+}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(1+hH_1)+\varphi_{-}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(1-hH_1) \qquad \textbf{éq 2.3.1-5}$$

Et $\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{D}(x_\gamma)=\int_I \varphi\begin{pmatrix}P_1(x_3)1\\ P_2(x_3)\\ P_3(x_3)\end{pmatrix}.(1+x_3H_1)\,dx_3,\ \text{pour}\ \ x_\gamma\in\partial\omega_\varphi$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3.5.1 Cas d'une plaque homogène

Les différentes intégrales sur $I=]-h;h[$ nécessaires au calcul de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont rassemblées ci-après :

$$\int_I (P_1)^2 dx_3 = \frac{16h}{15} \quad ; \quad \int_I (P_2)^2 dx_3 = \int_I (P_3)^2 dx_3 = \frac{4h}{15}$$
$$\int_I (P_1 . P_2) dx_3 = \int_I (P_1 . P_3) dx_3 = \frac{2h}{15} \quad ; \quad \int_I (P_2 . P_3) dx_3 = \frac{-h}{15}$$
$$\int_I (P_1')^2 dx_3 = \frac{8}{3h} \quad ; \quad \int_I (P_2')^2 dx_3 = \int_I (P_3')^2 dx_3 = \frac{7}{6h}$$
$$\int_I (P_1' . P_2') dx_3 = \int_I (P_1' . P_3') dx_3 = \frac{-4}{3h} \quad ; \quad \int_I (P_2' . P_3') dx_3 = \frac{1}{6h}$$

On trouve alors (en négligeant la correction de courbure) :

$$\boldsymbol{A}^{11}_{\alpha\beta} = \frac{16hk}{15}\delta_{\alpha\beta} \quad ; \quad \boldsymbol{A}^{22}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{A}^{33}_{\alpha\beta} = \frac{4hk}{15}\delta_{\alpha\beta}$$
$$\mathbf{A}^{12}_{\alpha\beta} = \mathbf{A}^{21}_{\alpha\beta} = \mathbf{A}^{13}_{\alpha\beta} = \mathbf{A}^{31}_{\alpha\beta} = \frac{2hk}{15}\delta_{\alpha\beta} \quad ; \quad \mathbf{A}^{23}_{\alpha\beta} = \mathbf{A}^{32}_{\alpha\beta} = \frac{-hk}{15}\delta_{\alpha\beta}$$

Puis :

$$\boldsymbol{B} = \frac{K}{6h}\begin{pmatrix} 16 & -8 & -8 \\ -8 & 7 & 1 \\ -8 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^+ & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^- \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \int_I \varphi[1-(x_3/h)^2] . dx_3 \\ \int_I \varphi . \frac{x_3}{2h} . (1+x_3/h) dx_3 \\ \int_I \varphi . \left(\frac{-x_3}{2h}\right)(1-x_3/h) dx_3 \end{pmatrix} \text{ sur } \omega_\varphi$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3.5.2 Relation entre les variables des deux représentations

$$\begin{cases} T^m(x_\alpha)=T_1(x_\alpha)-\frac{1}{2}T_3(x_\alpha) \\ T^s(x_\alpha)=T_1(x_\alpha)-T_2(x_\alpha)+T_3(x_\alpha) \\ T^i(x_\alpha)=T_1(x_\alpha)+T_2(x_\alpha)+T_3(x_\alpha) \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} T_1(x_\alpha)=\frac{1}{6}\left[4T^m(x_\alpha)+T^s(x_\alpha)+T^i(x_\alpha)\right] \\ T_2(x_\alpha)=\frac{1}{2}\left[\quad\quad +T^s(x_\alpha)+T^i(x_\alpha)\right] \\ T_3(x_\alpha)=\frac{1}{3}\left[-2T^m(x_\alpha)+T^s(x_\alpha)+T^i(x_\alpha)\right] \end{cases}$$

2.3.6 Synthèse

Le problème à résoudre sur la coque ω , d'épaisseur $2h$ s'écrit :

Trouver $\boldsymbol{T}=(T^m,T^s,T^i)\in\mathbf{W}\left\{\theta=(\theta^m,\theta^s,\theta^i)\in H^1(\omega)^3,\theta^m=\theta^s=\theta^i=0\,\text{sur}\,\partial\omega_T\right\}$
tel que :
$\int_\omega ({}^t\nabla\boldsymbol{T}.\boldsymbol{A}+\nabla\theta+{}^t\boldsymbol{T}.\boldsymbol{B}.\theta).d\omega+\int_\omega {}^t\boldsymbol{C}.\theta\,d\omega+\int_{\partial\omega_\varphi} t\,\boldsymbol{D}.\theta\,ds\ ,\ \forall\theta\in\mathbf{W}$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\alpha\beta ij}(x_\gamma)=\int_{-h}^{h}\left[k_{\alpha\beta}P_i.P_j(1+x_3.H_1)\left(1-x_3\left(\frac{1}{R_\alpha}+\frac{1}{R_\beta}\right)\right)\right]dx_3 \\ \mathbf{B}_{ij}(x_\gamma)=\int_{-h}^{h}\left[K.P_i^{'}.P_j^{'}(1+x_3H_1)\right]dx_3+\lambda^{\pm}P_i(\pm h).P_j(\pm h)(1\pm hH_1) \\ \mathbf{C_i}(x_\gamma)=\varphi^{\pm}.P_i(\pm h)(1\pm hH_1)+\int_{-h}^{h}r.P_i(1+x_3H_1)dx_3 \\ \mathbf{D_i}(x_\gamma)=\int_{-h}^{h}\varphi.P_i(1+x_3H_1)dx_3\ ,\quad \text{pour}\ x_\gamma\in\partial\omega_\varphi \end{cases}$$

et :

$$T(x_\gamma;x_3)=T^m(x_\gamma).P_1(x_3)+T^s(x_\gamma).P_2(x_3)+T^i(x_\gamma)+T^i(x_\gamma).P_3(x_3)$$

$P_i(x_3)$: les trois polynômes de LAGRANGE dans l'épaisseur $[-h,h]$:

$$P_1(x_3)=1-(x_3/h)^2\ ;\ P_2(x_3)=\frac{x_3}{2h}(1+x_3/h)\ ;\ P_1(x_3)=\frac{x_3}{2h}(1-x_3/h)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

H_1 : courbure moyenne : $H_1=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$;

(x_1, x_2) : système de coordonnées orthonormées selon les courbures principales de ω ; $d\omega = dx_1 . dx_2$;

$k_{\alpha\beta}$: composantes surfaciques du tenseur $\boldsymbol{K}$ de conductibilité ;

K : composante transversale du tenseur $\boldsymbol{K}$ de conductibilité ;

$\lambda^{\pm}$: coefficients d'échange sur les faces ω^+ et ω^- ;

$\varphi^{\pm}$: flux appliqués sur les faces ω^+ et ω^- ;

r : sources réparties dans l'épaisseur ;

φ : flux imposé sur l'extrémité $\partial\omega_{\varphi}$ de la coque.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Validation du modèle sur quelques exemples

On présente ici des applications sur des cylindres et des plaques. La première traite en fait d'un cas unidimensionnel dans l'épaisseur et permet d'évaluer l'effet des termes de courbure, notamment dans le second membre des équations. Les autres permettent de juger la capacité du modèle à traiter le cas de chargements thermiques discontinus, par référence à des solutions 3D.

3.1 Le cylindre infini soumis à un flux intérieur uniforme

On considère un cylindre infini (rayon R, épaisseur $2h$), soumis à un flux uniforme à l'intérieur : φ_i, et à une condition d'échange en peau externe $\lambda^+(T-T_{ext})=\lambda^+ T-\varphi_{e^-}$.
On note K le coefficient de conductivité transversale.
La solution analytique de ce problème axisymétrique 1D est :

$$T(x_3)=\hat{T}_1+\hat{T}_0\ln(1+x_3/R)$$

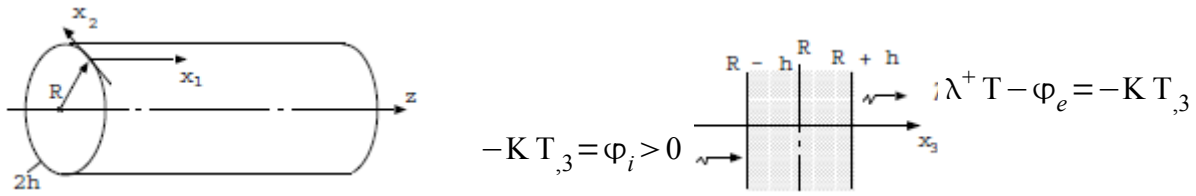


Figure : 3.1-a

avec :

$$\hat{T}_0=-\frac{R\,\varphi_i}{K}\left(1-\frac{h}{R}\right)$$

$$\hat{T}_1=\frac{R\,\varphi_i}{K}\left(1-\frac{h}{R}\right)\ln\left(1+\frac{h}{R}\right)+\left(\varphi_i\frac{1-h/R}{1+h/R}+\varphi_e\right).\frac{1}{\lambda^+}$$

Un développement limité au 2ème ordre en x_3/R est :

$$T(x_3)\approx\frac{\varphi^+ +\varphi^-}{\lambda^+}-\frac{2\varphi_i}{\lambda^+}.\frac{h}{R}\left[1-\frac{h}{R}-\frac{\lambda^+ R}{2k}\left(1-\frac{3h}{2R}\right)\right]-\varphi_i\frac{h}{K}\left(1-\frac{h}{R}\right)\left(\frac{x_3}{h}-\frac{x_3^2}{2h^2}.\frac{h}{R}\right)+\ldots$$

Utilisons maintenant le modèle à 3 champs $\boldsymbol{T}=(T_1, T_2, T_3)$ défini au [§ 2.3.2]. A cause de l'indépendance en x_1 et x_2 de la solution, on se ramène à la résolution de : $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{T}=\boldsymbol{C}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour la représentation $T(x_3)=T_1+T_2\frac{x_3}{h}+\frac{3}{2}.T_3\left(\frac{x_3^2}{h^2}-\frac{1}{3}\right)$, on a :

$$\boldsymbol{B}=\frac{2K}{h}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & h/R\\ 0 & h/R & 3\end{pmatrix}+\lambda^+\left(1+\frac{h}{R}\right)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\varphi_i\left(1-\frac{h}{R}\right)\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}+\varphi_e\left(1+\frac{h}{R}\right)\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$ pour le second membre.

Dans le cas où on néglige l'intervention de la courbure dans la métrique, on supprime les termes en $\frac{h}{R}$ dans les expressions précédentes.

La solution est, si on néglige complètement la courbure $(1\gg\frac{h}{R})$:

$T(x_3)=\frac{\varphi_e+\varphi_i}{\lambda^+}+\frac{\varphi_i.h}{K}\left(1-\frac{x_3}{h}\right)$ c'est-à-dire la solution du « mur »plan.

Si on tient compte de la courbure dans le second membre ainsi que dans les termes d'échange λ^+ (vraies surfaces d'application des flux) :

$$T(x_3)=\frac{\varphi_i+\varphi_e}{\lambda^+}-\frac{2\varphi_i}{\lambda^+}.\frac{h}{R}\left[1-\frac{h}{R}-\frac{\lambda^+R}{2k}\left(1-\frac{h}{R}\right)\right]-\varphi_i\frac{h}{K}\left(1-\frac{h}{R}\right).\frac{x_3}{h}+0$$

On retrouve la solution analytique développée au 1er ordre en x_3/R. La prise en compte de la courbure dans les termes de conductivité dans $\boldsymbol{B}$ interviendrait au niveau des termes en $(x_3/R)^2$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2 La plaque infinie sous un couple de flux antisymétriques

Reprenons le cas de la plaque infinie soumise sur sa moitié $x_2<0$ à un couple de flux constants $(\varphi^+=\varphi,\varphi^-=-\varphi)$ équilibrés, et adiabatique sur l'autre moitié $x_2>0$.

L'antisymétrie du chargement impose que : $T(x_1,x_2,0)=0$. On peut montrer aussi que T est linéaire dans l'épaisseur en $x_2=-\infty,0,+\infty$.

Les équations [éq 2.3.2-2] se réduisent ici à :

$$-2kh\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\T_2\\T_3\end{pmatrix}+\frac{2K}{h}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\T_2\\T_3\end{pmatrix}=\varphi\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

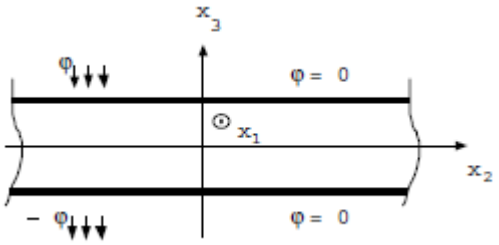


Figure : 3.2-a

Les dérivées $T_{i,2}$ s'annulant à l'infini, T_1 et T_3 sont identiquement nulles partout. Il reste à déterminer T_2 (ne dépendant que de x_2) telle que :

$-T_2''+\frac{3K}{kh^2}.T_2=\frac{3\varphi}{kh}$ dont la solution est de la forme :

$$\begin{cases}T_2(x_2)=a\,e^{\sqrt{3K/k}.x_2/h}+\dfrac{\varphi h}{K} & \text{si } x_2<0\ ,\\ T_2(x_2)=b\,e^{-\sqrt{3K/k}.x_2/h} & \text{si } x_2>0\ ,\end{cases}$$

La continuité de T_2 et T_2' en 0 donne :

$$\begin{cases}T_2(x_2)=\dfrac{\varphi h}{K}\left(2-e^{\sqrt{3K/k}.x_2/h}\right) & \text{si } x_2\le 0\\ T_2(x_2)=\dfrac{\varphi h}{K}e^{-\sqrt{3K/k}.x_2/h} & \text{si } x_2\ge 0\end{cases}$$

Après changement pour les variables T^m,T^s,T^i, on trouve :

$$T^m(x_2)=0\ ;\ T^s(x_2)=T_2(x_2)\ ;\ T^i(x_2)=-T_2(x_2)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La température de la plaque, calculée dans le cadre de ce modèle est donc linéaire dans l'épaisseur et s'exprime avec $T^m(x_2)$ ou $T^s(x_2)$ et $T^i(x_2)$ par :

$$T(x_{1,}x_{2,}x_3)=T_2(x_2).\frac{x_3}{h}=T^s(x_2).\frac{x_3}{2h}(1+x_3/h)-T^i(x_2).\frac{x_3}{2h}(1-x_3/h)$$

La [Figure 3.2-a] permet de comparer les températures en peau supérieure $(x_3=+h)$ de la plaque sous un flux extérieur normalisé ($\varphi=K/h$ avec $k=K=1, h=1$), obtenues par un calcul numérique 3D (*Code Aster*), le modèle coque, et le modèle limite asymptotique (avec la discontinuité observée en [§2.2]).

On constate la bonne capacité du modèle à décrire la couche limite apparaissant au voisinage d'une discontinuité de flux extérieur.

Plaque homogène
h = 1 ; k = K = 1

Flux unitaires
Opposé sur x < 0
Flux nuls sur x > 0

Légende :
0 = modèle 3D
Δ= modèle de Coque
X = modèle Asymptot.

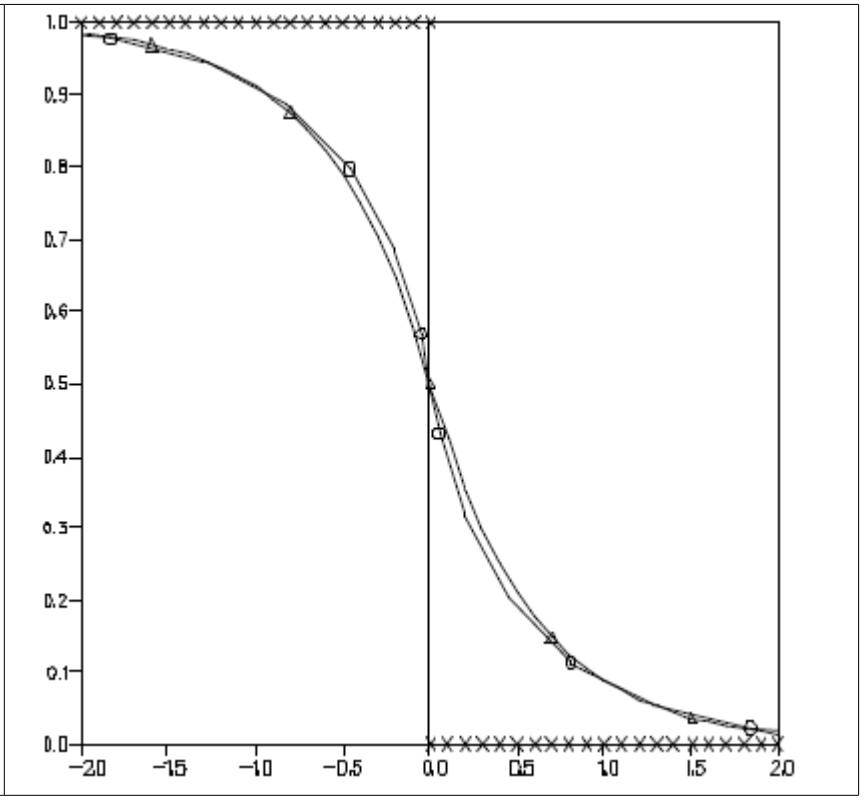


Figure 3.2-b : Température comparée en peau supérieure de la plaque soumise à des flux antisymétriques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 La plaque infinie sous un couple de flux symétriques

Dans l'exemple précédent, l'antisymétrie du chargement entraînait la nullité des termes pairs en $x_3 (T_1 = T_3 = 0)$. On traite maintenant un autre cas de chargement, symétrique, (par rapport à $x_3 = 0$) permettant de juger l'effet du terme T_3, notamment sur T_1, ce qui nécessite de prendre des conditions aux limites du type échange, pour dédiagonaliser $\boldsymbol{B}$ [§ 2.3.2].

En $x_3 = +h$, on a comme condition :

$$\begin{aligned} -KT &= -\lambda T + \varphi \text{ si } x_2 < 0 \\ &= -\lambda T - \varphi \text{ si } x_2 > 0 \end{aligned}$$

En $x_3 = -h$, on a :

$$\begin{aligned} -KT &= -\lambda T + \varphi \text{ si } x_2 < 0 \\ &= -\lambda T - \varphi \text{ si } x_2 > 0 \end{aligned}$$

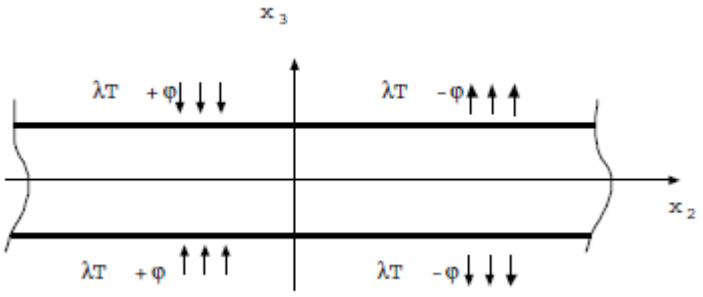


Figure : 3.2-a

Les conditions de symétrie et d'antisymétrie imposent à la solution de vérifier :

- $-T(x_1, -x_2, x_3) = T(x_1, x_2, x_3) = T(x_1, x_2, -x_3)$

d'où : $T(x_1, 0, x_3) = 0$, et $\partial_3 T(x_1, x_2, 0) = 0$.

Les équations (18) s'écrivent dans notre cas (T_i ne dépend que de x_2) :

$$\begin{cases} -kh \,.\, T_1'' + \lambda T_1 + \lambda T_3 & = \phi \quad \text{pour } x_2 < 0 \text{ ou } -\phi \text{ pour } x_2 > 0 \\ -kh/3 \,.\, T_2'' + \left(\dfrac{K}{h} + \lambda\right) T_2 & = 0 \\ -kh/5 \,.\, T_3'' + \lambda T_1 + \left(\dfrac{3K}{h} + \lambda\right) T_3 & = \phi \quad \text{pour } x_2 < 0 \text{ ou } -\phi \text{ pour } x_2 > 0 \end{cases}$$

T_2 est donc identiquement nulle (ce qui est cohérent avec les conditions de symétrie).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les solutions T_1 et T_3 sont données par (cf. [An 1]) :

$$\begin{cases} T_1(x_{1,}x_2)=-\dfrac{\varphi}{\lambda}\left(1-\dfrac{\lambda/kh-s_2^2}{s_1^2-s_2^2}.e^{-s_1|x_2|}+\dfrac{\lambda/kh-s_1^2}{s_1^2-s_2^2}.e^{-s_2|x_2|}\right)\mathrm{sgn}(x_2) \\ T_3(x_{1,}x_2)=-\dfrac{\varphi}{\lambda}.\dfrac{kh}{\lambda}\dfrac{(\lambda/kh-s_2^2).(\lambda/kh-s_1^2)}{s_1^2-s_2^2}.(e^{-s_1|x_2|}-e^{-s_2|x_2|})\mathrm{sgn}(x_2) \end{cases}$$

s_1 et s_2 étant les racines positives du polynôme caractéristique.

Après changement pour les variables T^m, T^s, T^i, on trouve :

$$\begin{cases} T^m(x_{1,}x_2)=T_1(x_{1,}x_2) \\ T^s(x_{1,}x_2)=T_1(x_{1,}x_2)+T_3(x_{1,}x_2) \\ T^i(x_{1,}x_2)=T^s(x_{1,}x_2) \end{cases}$$

Si on adopte pour résoudre le problème thermique un modèle à 2 champs $(\tilde{T}_{1,}\tilde{T}_2)$, avec une représentation affine dans l'épaisseur, on obtient comme solution :

$$\begin{cases} \tilde{T}_1(x_1,x_2)= & \varphi/\lambda\left(1-e^{\sqrt{\lambda/kh}.x_2}\right) & \text{si } (x_2<0) \\ & -\varphi/\lambda\left(1-e^{\sqrt{\lambda/kh}.x_2}\right) & \text{si } (x_2>0) \\ \tilde{T}_2(x_1,x_2)= & 0 & \end{cases}$$

Dans un tel modèle la température apparaît constante dans l'épaisseur. Le modèle limite asymptotique produit la même solution.
On compare la solution numérique 3D et celle d'un modèle à 2 champs $(\tilde{T}_1)$. Cette dernière comparaison permet de juger de l'effet du terme parabolique sur la répartition de la température moyenne. En effet c'est cette dernière qui, en théorie mécanique des coques, engendre une déformation membranaire.

Ces comparaisons sont faites pour des valeurs unitaires de $k, K, \lambda, h, \varphi$ en unités Si. On visualise les isovaleurs 3D dans l'épaisseur sur la [Figure 3.3-a].

Les températures moyennes T_1 et $\tilde{T}_1$ sont représentées [Figure 3.3-b]. Enfin la [Figure 3.3-c] montre l'évolution de la température en peau supérieure ($x_3=+h$) de la plaque, pour les trois solutions envisagées, ainsi que par celle du modèle limite asymptotique ; la [Figure 3.3-d] présente la même comparaison pour le feuillet moyen de la plaque.

On constate sur ces résultats la bonne adéquation entre la solution complète 3D (points 0) et celle obtenue avec le modèle de coques à 3 champs (points Δ), alors que le modèle à 2 champs (points $+$) paraît insuffisant.

Ces observations restent valables pour d'autres choix de $k, K, \lambda, h, \varphi$, puisque le problème est linéaire en φ, et que la variable d'espace x_2 apparaît normalisable par $\sqrt{\dfrac{\lambda}{kh}}$ dans les équations.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

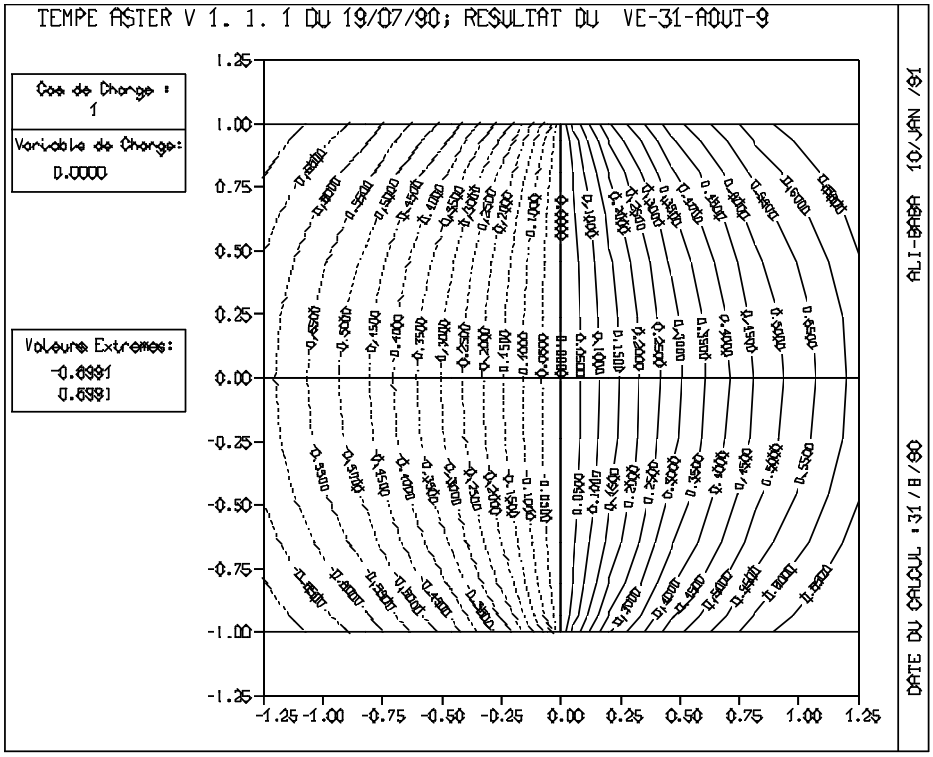


Figure : 3.3-a : Isovaleurs de température par calcul numérique 3D

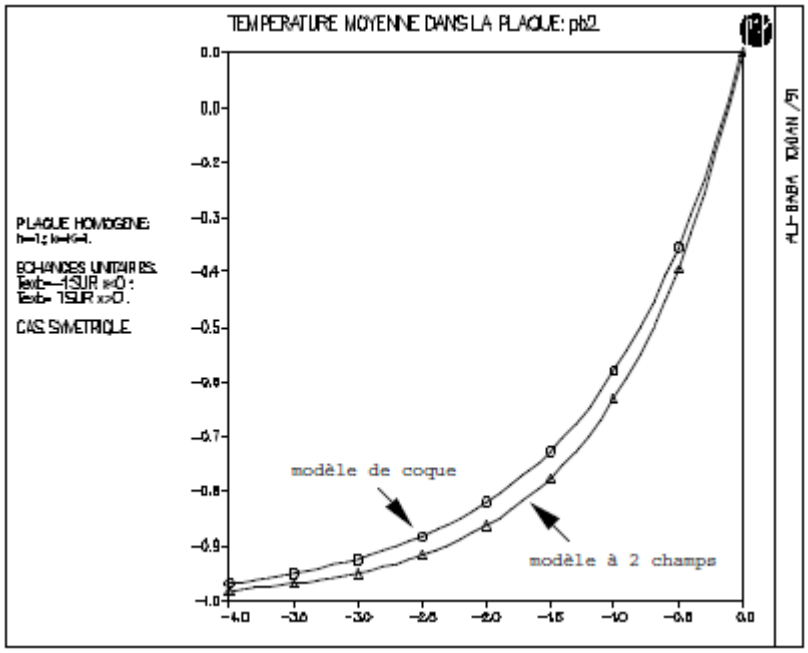


Figure : 3.3-b : Comparaison des températures moyennes : effet du terme parabolique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

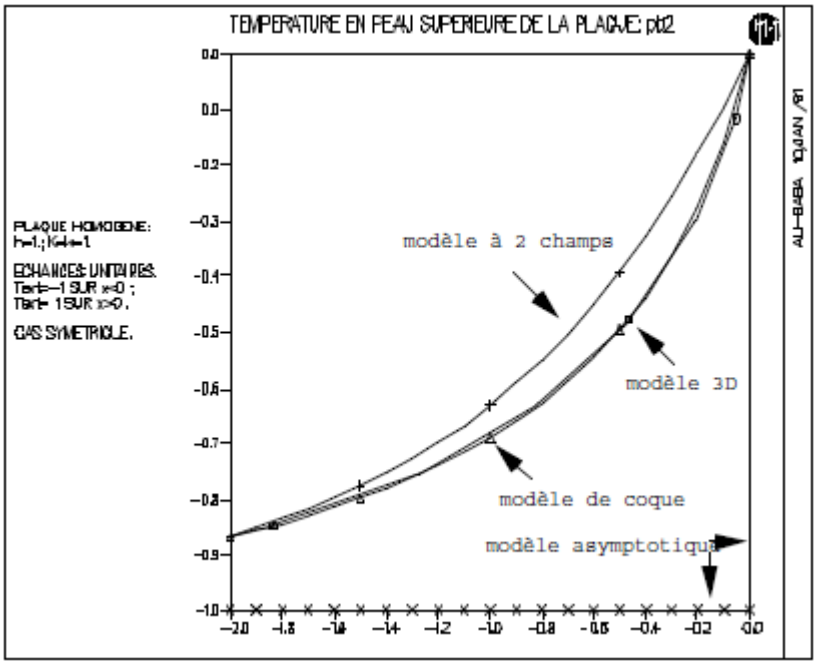


Figure : 3.3-c : Température comparée en peau supérieure de la plaque soumise à des échanges symétriques

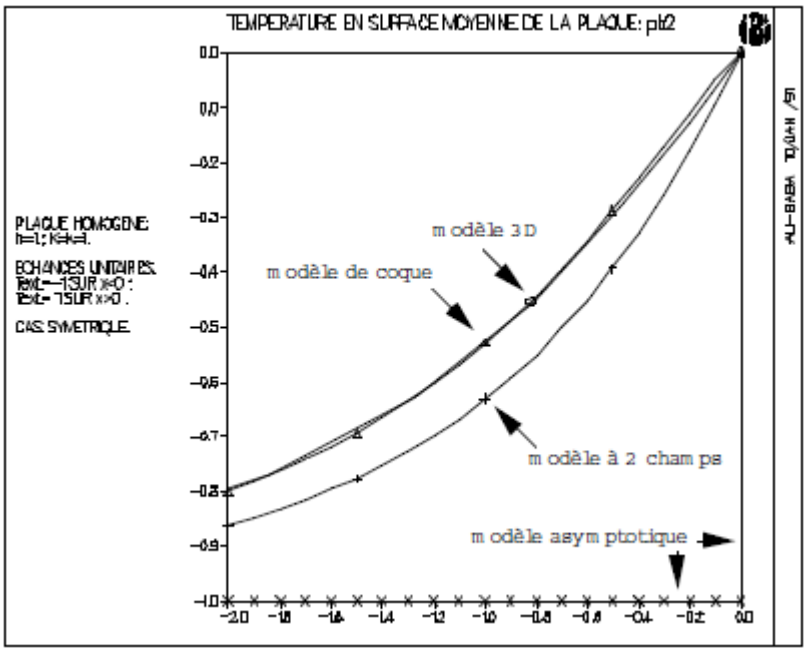


Figure : 3.3-d : Température comparée sur le feuillet moyen de la plaque soumise à des échanges symétriques

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.4 Le cylindre infini soumis à une stratification horizontale

On s'intéresse dans ce paragraphe à une situation plus industrielle que les cas précédents. Il s'agit d'un problème de stratification thermique dans un tuyau horizontal [bib12]. Sous certaines conditions thermohydrauliques, la température du fluide peut varier très rapidement avec la cote z (cf. figure ci-dessous). On peut pratiquement considérer qu'il existe deux zones à températures constantes de part et d'autre d'une interface horizontale.

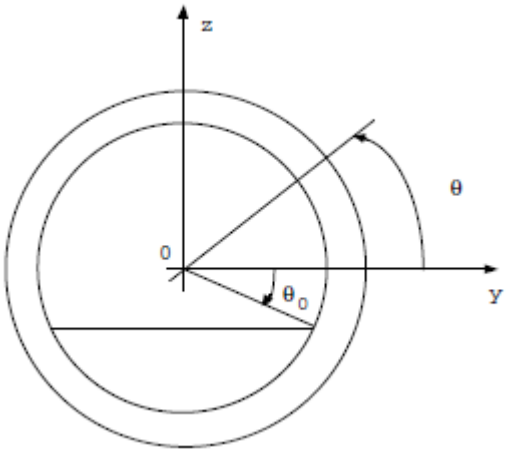


Figure : 3.4-a

- Caractéristiques géométriques :

$$R=1{,}0\,\mathrm{m} \qquad h=0{,}075\,\mathrm{m} \qquad \theta_0=-30°$$

- Caractéristiques physiques :

Conductivité $k=17\,\mathrm{W/m/°C}$

Échanges : extérieur (air) $=\lambda^e$ $=12\,\mathrm{W/m^2/°C}$
intérieur (eau chaude) $=\lambda^c$ $=1000\,\mathrm{W/m^2/°C}$
intérieur (eau froide) $=\lambda^h$ $=1000\,\mathrm{W/m^2/°C}$

Températures : extérieure : $25\,°\mathrm{C}$
intérieure : chaude $250\,°\mathrm{C}$ froide $50\,°\mathrm{C}$

La détermination de la température dans le tuyau présente deux intérêts, le premier est de pouvoir conduire à la répartition de contrainte au voisinage de la stratification, le second est d'estimer les échanges de chaleur entre la zone d'eau "froide" et la zone d'eau "chaude" via la conduction dans le tube.

Le problème étant indépendant de la variable x, il devient unidimensionnel dans le cadre du modèle de coque. Pour le résoudre, on cherche tout d'abord les solutions générales de l'équation sans second membre sur chacun des segments $]-\frac{\pi}{2},\theta_0[$ et $]\theta_0,\frac{\pi}{2}[$:

$$-\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\Delta T_1\\ \Delta T_2\\ \Delta T_3\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\end{bmatrix}=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Résolvant pour cela numériquement une équation du troisième degré (polynôme caractéristique en s), on écrit ensuite les conditions de continuité des champs T_i et de leurs dérivées tangentielles à l'interface, en exprimant ceux-ci par la combinaison des solutions générales et des solutions particulières dans chacun des domaines. Le système linéaire à résoudre (12×12) est ramené à un système de dimension 6×6 par des considérations de symétries, puis résolu numériquement.

On dispose ainsi d'une solution semi-analytique [bib4] (résolution numérique de l'équation du troisième degré et du système linéaire) bien que la situation soit complexe. La comparaison avec un calcul 2D par éléments finis est donnée sur les [Figure 3.4-b] et [Figure 3.4-c] : la différence entre les deux solutions est indiscernable.

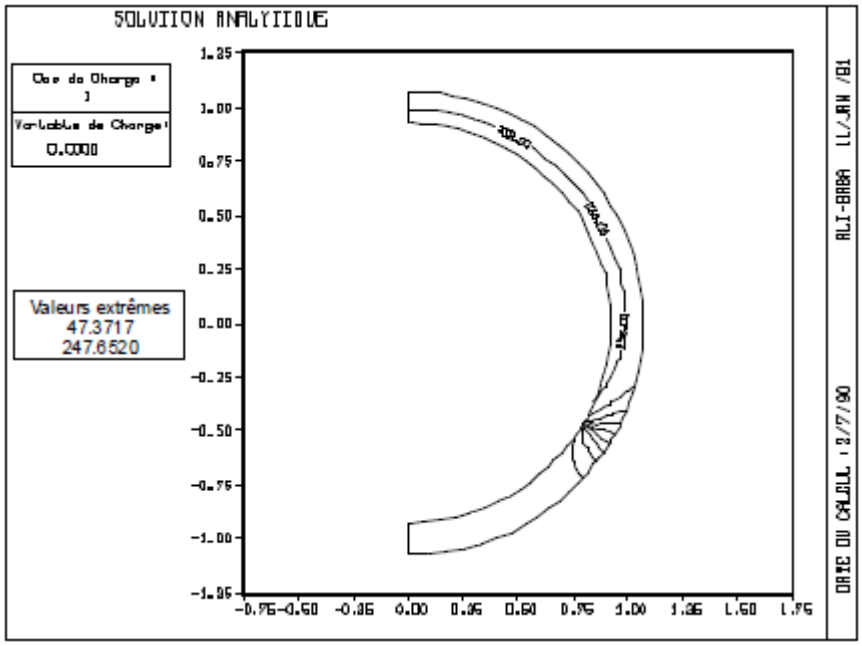


Figure 3.4-b : Tuyauterie stratifiée : solution analytique par le modèle de coque thermique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

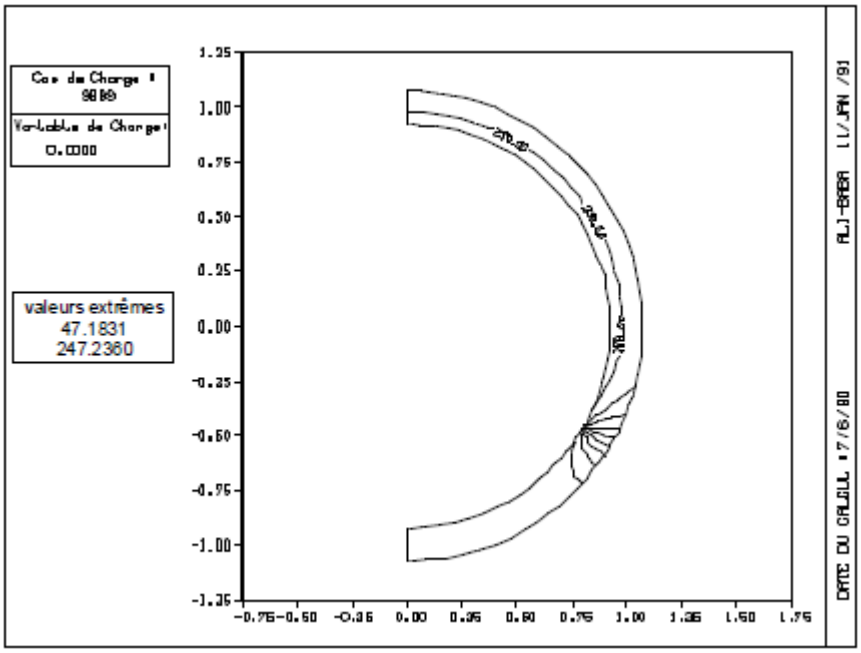


Figure 3.4-c : Tuyauterie stratifiée : solution éléments finis thermique 2D *Aster*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Remarques sur la discrétisation numérique

Dans ce paragraphe on se limite à quelques observations quant à la résolution numérique des équations du modèle thermique de coque : tout d'abord sur l'utilisation d'une méthode d'éléments finis et ensuite sur le blocage numérique apparaissant lorsque l'épaisseur $2h$ est faible. Ce dernier provient de l'intervention de h à des puissances différentes dans les coefficients des équations.

4.1 Résolution par éléments finis

Le modèle de thermique de coque décrit en [§ 2.3] présente les caractéristiques suivantes :

- il conduit à un opérateur d'ordre 2 agissant sur les trois champs scalaires $\boldsymbol{T}=(T^m, T^s, T^i)$;
- ces trois champs sont définis sur un domaine ω surfacique, plongé dans $\mathbb{R}^3$;
- la courbure de la surface ω n'intervient, éventuellement, que dans l'expression des coefficients $\boldsymbol{A, B, C, D}$.

Dans le cas général d'une coque de forme quelconque plongée dans $\mathbb{R}^3$, on peut discrétiser la géométrie de sa surface moyenne ω par un maillage en éléments triangulaires plans (cette méthode présente certes le défaut de ne pas pouvoir prendre en compte explicitement la courbure de ω).

Le problème thermique (voir [§ 2.3.6]) étant scalaire, à 3 champs, du second ordre, on propose les éléments finis usuels : les triangles plans $P1$ (à 3 nœuds) ou $P2$ (à 6 nœuds).

Leur formulation est la même, que ω soit plane ou courbée : on néglige ainsi les corrections de métrique dans les opérateurs de rigidité $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, (on a vu dans les cas de validation que cela avait peu d'effet en pratique). Par contre l'utilisateur, s'il connait l'expression de la courbure, aura intérêt à en tenir compte dans les valeurs des coefficients $\lambda^{\pm}$ et des flux $\varphi^{\pm}$, comme dans les expressions [éq 2.3.1-4] et [éq 2.3.1-5].

Dans le cas des matériaux composites (de même que si l'on voulait tenir compte de la courbure), on a à prévoir un pré-traitement fournissant les coefficients $\boldsymbol{A, B, C, D}$, ainsi qu'un post-traitement permettant de reconstituer la température et les flux en tout point de l'épaisseur.

Il existe des situations où le problème ne dépend plus que d'une variable d'espace : il s'agit des coques de révolution chargement axisymétrique, ou des « tranches de coques », d'axe $\vec{e}_3$.

La géométrie est alors représentée par un méridien : (voir [Figure 4.1-a]). La courbe moyenne est alors :

- cas révolution : $H_1=\left(\frac{1}{R}+\frac{\cos\alpha}{x}\right)$
- cas « tranche », ou arc : $H_1=\frac{1}{R}$

où R désigne le rayon de courbure de la ligne méridienne AB .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

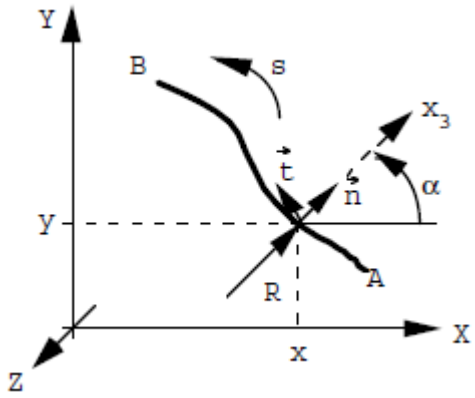


Figure 4.1-a.

Pour ces types de problèmes, on propose aussi un élément fini $P2$ à 3 nœuds, utilisant la même formulation, où on néglige la correction de métrique dans l'épaisseur, pour les coefficients $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. On utilise une formule de quadrature à 4 points de GAUSS.

Cet élément est exactement associé à celui proposé en mécanique pour des études thermo-mécaniques chaînées [R3.07.02].

4.2 Blocage numérique d'un élément fini de coque thermique

Le blocage est un phénomène apparaissant dans la résolution numérique par éléments finis de certains problèmes tels que celui des coques minces ou des arcs lorsque l'élément est courbe (blocage de membrane), celui des coques ou des poutres avec prise en compte du cisaillement (blocage de cisaillement), ou encore celui de la plasticité (blocage d'incompressibilité plastique [bib7]). Il a été rencontré initialement en mécanique des fluides incompressibles et c'est dans ce cadre que son étude théorique a débuté [bib6].

Ce phénomène de blocage se manifeste par une très grande perte de précision et des oscillations importantes sur certaines quantités calculées lorsqu'un paramètre physique du modèle devient "petit". L'illustration de ces désagréments est donnée dans la note HI-71/7131, (§4.2). L'origine de ces problèmes réside dans la différence d'ordre de grandeur qui apparaît entre certaines composantes de la forme bilinéaire de "rigidité" quand le paramètre physique ou géométrique tend vers zéro (épaisseur de la coque pour le blocage de membrane, inverse du module de compressibilité tangent pour le blocage plastique par exemple). Ici, c'est l'épaisseur de la coque qui va jouer le rôle de petit paramètre.

Reprenons les équations du problème thermique stationnaire posé sur une plaque sous forme variationnelle ; notons $2\,\varepsilon\,h$ son épaisseur (ε réel sans dimension) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{T}=(T_1, T_2, T_3)\in\mathbf{W}\left(=\left[H_0^1(\omega)\right]^3\right) \text{ tel que} \\ A(\boldsymbol{T},\boldsymbol{\theta})+\dfrac{1}{\varepsilon}B(\boldsymbol{T},\boldsymbol{\theta})=F(\boldsymbol{\theta}) \qquad \forall\,\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\in\mathbf{W} \end{cases} \qquad \text{éq 4.2-1}$$

avec :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$A(\boldsymbol{T},\theta)=2kh\int_{\omega}[\nabla \boldsymbol{T}].\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}.[\nabla\theta]\,d\omega$$

Le . désignant le produit scalaire usuel,

$$B(\boldsymbol{T},\theta)=\frac{2K}{h}\int_{\omega}[\boldsymbol{T}].\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.[\theta]\,d\omega$$

$$[\nabla\theta]=\left(\vec{\nabla}\theta_1,\vec{\nabla}\theta_2,\vec{\nabla}\theta_3\right)\quad\text{(gradients surfaciques)}$$

Une formulation mixte équivalente de ce problème est obtenue avec les variables q_2 et q_3, flux de chaleur dans l'épaisseur (cf. [An 2]) : on note $\theta=(L^2(\omega))^2$.

$$\begin{cases}\text{Trouver } (\boldsymbol{T},[p])\in \mathbf{W}\times Q \quad \text{tels que}\\ \begin{cases}A(\boldsymbol{T},\theta)-M(\theta,p)=F(\theta) & \forall\theta\in\mathbf{W}\\ -\varepsilon\bar{B}(p,q)-M(\theta,q)=0 & \forall q\in Q\end{cases}\end{cases}$$ éq 4.2-2

où :

$[q]=(q_2,q_3)$

$M(\theta,q)=\int_{\omega}(\theta_2 q_2+\theta_3 q_3)\,d\omega$

$$\bar{B}(p,q)=\frac{h}{v}2K\int_{\omega}[p]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}[q]\,d\omega$$

Sur cette formulation, le blocage numérique apparaît clairement (du moins formellement). En effet, la discrétisation de $\mathbf{W}\times Q$ étant effectuée, (on la note $\mathbf{W_d}\times Q_d$), le problème tend formellement lorsque ε tend vers zéro vers le problème suivant :

$$\begin{cases}A(\boldsymbol{T_d},\theta)-M(\theta,p_d) & =F(\theta)\ \forall\theta\in\mathbf{W_d}\\ M(\boldsymbol{T_d},q) & =0 \quad \forall q\in Q_d\end{cases}$$

Ce qui revient à résoudre sur le noyau de M :

$$A(\boldsymbol{T_d},\theta)=F(\theta)\ \forall\theta\in\boldsymbol{W_d}$$ éq 4.2-3

Le blocage apparaît lorsque le noyau discrétisé de M est trop petit ou réduit à zéro : la résolution de [éq 4.2-3] se fait sur un espace très petit voire réduit à zéro. Même si le maillage est fin, la solution est alors de très mauvaise qualité.

Le noyau de M dans $\boldsymbol{W_d}$ étant par définition, l'espace :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathrm{Ker}\,M_d=\left\{\theta\in\mathbf{W_d}\,\middle|\,M(\theta,q)=0\quad\forall q\in Q_d\right\}$$

On voit que le choix de la discrétisation de Q n'est pas innocent et conditionne fortement le comportement de la solution lorsque ε tend vers zéro. Il existe une condition de convergence portant sur les espaces W_d et Q_d qui assure le bon comportement numérique de la solution avec ε petit, c'est la condition dite LBB discrète, version adaptée au cas discret de la condition LBB continue (LADYJENSKAIA - BREZZI - BABUCHKA). Nous renvoyons à [bib 7] pour une étude de cas (plasticité) et une bibliographie sur ce sujet.

Parallèlement aux études théoriques rapidement mentionnées ci-dessus, un remède pratique au blocage, apparaissant une fois la discrétisation en W_d choisie si ce choix a été malheureux, consiste à sous-intégrer le terme "bloquant" dans la construction de la rigidité, c'est-à-dire le terme B ici. Certains choix de sous-intégration, dans la formulation primale [éq 4.2-1] s'interprètent comme des choix d'interpolation de W_d et Q_d dans la formulation mixte et peuvent ainsi, via la vérification (parfois laborieuse) de la condition LBB discrète, être justifiés sur le plan théorique.

Considérons en effet, un élément fini triangulaire à 3 nœuds et interpolation $P1$ pour résoudre le problème [éq 4.2-2]. Choisissons alors pour discrétisation de Q une interpolation $P0$ discontinue, c'est-à-dire une représentation de $[q]$ constante par élément.

La seconde équation de [éq 4.2-2] est alors une équation locale, c'est-à-dire à résoudre sur chaque élément séparément puisque p est quelconque sur chaque élément E.

$$-\frac{\varepsilon h}{2K}\int_E(p_2q_2+\frac{1}{3}p_3q_3)-\int_E T_2q_2+T_3Q_3=0\quad\forall(q_2,q_3)$$

d'où la solution immédiate si $|E|$ est la surface de E.

$$\begin{cases}p_2=-\dfrac{2K}{\varepsilon h}\dfrac{1}{|E|}\displaystyle\int_E T_2\\ p_3=-\dfrac{6K}{\varepsilon h}\dfrac{1}{|E|}\displaystyle\int_E T_3\end{cases}$$

En reportant ces résultats dans la forme M, on a sur l'élément E :

$$M(\theta,p)=\frac{2K}{\varepsilon h}\left[\frac{1}{|E|}\int_E T_2\int_E\theta_2+\frac{3}{|E|}\int_E T_3\int_E\theta_3\right]\text{ pour tout }\theta\in W_d$$

ayant ainsi éliminé p, on est ramené à une formulation primale sur T uniquement :

$$M(\theta,p)=\frac{2K}{\varepsilon h}\left[\frac{1}{|E|}\int_E T_2\int_E\theta_2+\frac{3}{|E|}\int_E T_3\int_E\theta_3\right]\text{ pour tout }\theta\in\mathbf{W_d}$$

qui correspond très exactement à la formulation [éq 4.2-1] dans laquelle le terme élémentaire :

$$B_E(T,\theta)=\frac{2K}{\varepsilon h}\int_E(T_2\theta_2+3T_3\theta_3)$$

est sous-intégré par un schéma à un point de GAUSS :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\int_E f.g = \frac{1}{|E|} . \int_E f . \int_E g .$$

L'examen de la condition LBB discrète reste à faire pour cette discrétisation afin de conclure à sa convergence (cf. [bib7]).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Conclusion

Une analyse asymptotique des équations de la thermique dans une structure mince quand l'épaisseur tend vers zéro aboutit à un modèle limite caractérisé par une température moyenne, solution d'un problème aux limites, et un terme complémentaire parabolique dans l'épaisseur, défini localement.

On en a déduit la formulation d'un modèle à 3 champs scalaires définis sur la surface moyenne de la coque, donnant une représentation parabolique de la température dans l'épaisseur. L'opérateur différentiel obtenu est d'ordre 2 ; l'épaisseur de la coque apparaît dans ses coefficients.

Ce modèle apparaît comme "optimal" pour les structures minces :

- sa limite quand l'épaisseur tend vers zéro est identique au modèle limite asymptotique ;
- des termes supplémentaires éventuels tendraient vers zéro avec l'épaisseur.

Dans une version standard la courbure de la surface moyenne de la coque n'intervient pas directement. Des exemples test montrent une bonne adéquation de la température obtenue avec des solutions tridimensionnelles complètes.

Ce modèle paraît donc tout à fait habilité à :

- être utilisé dans une formulation éléments finis pour calculer la température dans une coque mince de forme quelconque ; la solution obtenue pouvant être facilement injectée dans un calcul thermomécanique de la coque ; on propose ainsi des éléments surfaciques et linéiques pour les cas où une variable d'espace n'intervient pas ;
- être introduit directement (ou par couplage) dans une méthode de résolution des équations régissant l'état thermohydraulique d'une tuyauterie par exemple, afin de tenir compte de la restitution thermique de la paroi sur le fluide ;
- être utilisé comme modèle intégré dans la résolution de problèmes d'identification (problème inverse) à partir de mesures expérimentales (par exemple pour des conduites stratifiées) ;
- rechercher des solutions analytiques dans des cas à géométrie simple.

Le modèle décrit ici peut aussi être utilisé dans les problèmes d'évolution thermique, à condition que les chargements thermiques ne varient pas trop vite.

Enfin, il reste à étudier les méthodes numériques à utiliser pour éviter le blocage qui pourrait apparaître dans un calcul par éléments finis, lorsque l'épaisseur devient faible.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Références

1) ANDRIEUX S., MARIGO. J.J. : Application des méthodes asymptotiques au problème de la conduction thermique dans les plaques minces. Note EDF-DER-MMN : HI-71/5963, 1987.

2) BLANCHARD J.L, CARNOY E. : Elément fini de coque thermique pour l'analyse thermomécanique de coques minces. In "Calculs de structures et C.F.A.O".

3) FRANCFORT G. : Asymptotic transient thermoelastic behaviour in thermo-mechanical couplings in solids. IUTAM. Bui and N'Guyen Eds. Elsevier 1987.

4) FAZOUANNE A. : Etude d'un problème thermique inverse. Rapport de stage scientifique, ENPC. 1990.

5) GREEN A.E., NAGHDI P.M. : On thermal effects in the theory of shells. Proc. Roy. Soc. London. A365, A367. 1979.

6) HUGHES T.J.R., MALKUS D.S. : "Mixed Finite Element Methods Reduced and selective integration techniques. Computer Meth. Appl. Mech. Eng. 15-1, pp. 63-81, 1978.

7) MIALON P., THOMAS B. : Incompressibilité en plasticité : sous-intégration et autres techniques numériques. Note EDF-DER-MMN : HI-72/6404, du 19 janvier 1990. Voir aussi : Bull DER Série C, n°3, 1991.

8) RUBIN M.B. : Heat conduction in plates and shells with emphasis on a conical shell, in Int. J. of Solids and Structures, Vol. 22, N° 5, pp. 527-551. 1986.

9) SURANA K., ABUSALEH G. : Curved shell elements for heat conduction with p-approximation in the shell thickness direction. Computers and Structures, Vol. 34, N° 6, 1990.

10) SURANA K.S., ORTH N.J. : Axisymmetric shell elements for heat conduction with p-approximation in the thickness direction, in Computers and Structures, Vol. 33, N° 3, pp. 689-705. 1989.

11) SURANA K., PHILLIPS R. : Three dimensional curved shell finite elements for heat conduction. Computers and Structures, Vol. 25, N° 5. 1987.

12) SABATON M., BIMONT G., VIOLLET P.L., VOLDOIRE F., MASSON J.C., GRATTIER J. : Stratifications dans les tuyauteries des réacteurs à eau pressurisée. Note EDF-DER : HP/109/88/01. Fév. 1988.

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
2.6	*F. VOLDOIRE, S. ANDRIEUX (EDF/IMA/MMN)*	Texte initial
11.3	*F. VOLDOIRE, (EDF/AMA)*	Corrections de frappe (fiche rex 20336) et ajout des figures de la version initiale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

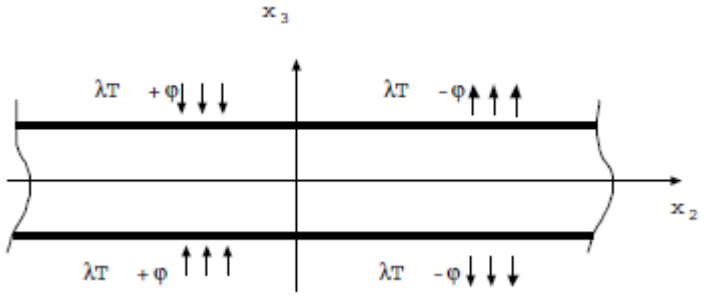
Annexe 1 Plaque infinie sous un couple de flux symétriques

En $x_3=+h$, les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} -K\partial_3 T &= \lambda T+\varphi \text{ si } x_2<0 \\ &= \lambda T-\varphi \text{ si } x_2>0 \end{aligned}$$

En $x_3=-h$, on a :

$$\begin{aligned} -K\partial_3 T &= -\lambda T+\varphi \text{ si } x_2<0 \\ &= -\lambda T-\varphi \text{ si } x_2>0 \end{aligned}$$



$T_i(0,0)=0$

Les conditions de symétrie et d'antisymétrie imposent à la solution de vérifier :

$$-T(x_{1,}-x_{2,}x_3)=T(x_{1,}x_{2,}x_3)=T(x_{1,}x_{2,}-x_3)$$

et donc : $T(x_{1,}0,x_3)=0$, $\partial_3 T(x_{1,}x_{2,}0)=0$.

Les équations [éq 2.3.2-2] s'écrivent dans notre cas :

$$\begin{cases} -kh.T_1''+\lambda T_1+\lambda T_3 = \phi \quad \text{pour } x_2<0 \text{ ou } -\phi \text{ pour } x_2>0 \\ -kh/3.T_2''+\left(\dfrac{K}{h}+\lambda\right)T_2 = 0 \\ -kh/5.T_3''+\lambda T_1+\left(\dfrac{3K}{h}+\lambda\right)T_3 = \phi \quad \text{pour } x_2<0 \text{ ou } -\phi \text{ pour } x_2>0 \end{cases}$$

T_2 est donc identiquement nulle (ce qui est cohérent avec les conditions de symétrie). Le système précédent admet comme solution particulière :

$$\begin{cases} T_1^p(x_1,x_2)=\dfrac{j}{\lambda} \text{ si } x_2<0 \text{ et } -\dfrac{j}{\lambda} \text{ si } x_2>0 \\ T_3^p(x_1,x_2)=0 \text{ sur } R^2 \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique en s du système homogène est :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\frac{k^2h^2}{5}s^4-k\left(\frac{6h\lambda}{5}+3K\right)s^2+\frac{3\lambda K}{h}=0$, dont les 4 racines s_i sont :

$s_i=\pm\frac{1}{h}.\sqrt{\frac{3}{k}}.\sqrt{\left(\lambda h+\frac{5}{2}K\right)\pm\sqrt{\lambda^2h^2+\frac{25K^2}{4}+\frac{10K\lambda h}{3}}}$, $s_1>s_2>0>s_3>s_4$

Les solutions $T_1(x_1,x_2)$ et $T_3(x_1,x_2)$, finies en $|x_2|=\infty$, s'expriment donc :

$$\begin{aligned}
T_1(x_1,x_2) &= \frac{\varphi}{\lambda}+\alpha e^{s_1x_2}+\beta e^{s_2x_2} && \text{pour } x_2>0\\
&= -\frac{\varphi}{\lambda}-\alpha e^{-s_1x_2}-\beta e^{-s_2x_2} && \text{pour } x_2>0\\
T_3(x_1,x_2) &= \gamma e^{s_1x_2}+\delta e^{s_2x_2} && \text{pour } x_2>0\\
&= -\gamma e^{-s_1x_2}-\delta e^{-s_2x_2} && \text{pour } x_2>0
\end{aligned}$$

Les conditions de raccord en $x_2=0$ sont naturellement exprimées par les conditions d'antisymétrie de T, déjà utilisées ci-dessus. Les quatre constantes $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sont déterminées par :

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=-\varphi/\lambda\\ \gamma+\delta=0\end{array}\right\}\text{nullité de T en } x_2=0\\ \left.\begin{array}{l}\alpha(\lambda-kh\,s_1^2)+\gamma\lambda=0\\ \beta(\lambda-kh\,s_2^2)+\delta\lambda=0\end{array}\right\}\text{modes } T_1-T_3 \text{ associés à } s_1,s_2\end{array}\right.$$

D'où :

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha=-\frac{\varphi}{\lambda}.\frac{(\lambda/kh-s_2^2)}{s_1^2-s_2^2}\\ \beta=\frac{\varphi}{\lambda}.\frac{(\lambda/kh-s_1^2)}{s_1^2-s_2^2}\\ \gamma=\frac{\varphi.kh}{\lambda^2}.\frac{(\lambda/kh-s_2^2).(\lambda/kh-s_1^2)}{s_1^2-s_2^2}\\ \delta=\frac{\varphi.kh}{\lambda^2}.\frac{(\lambda/kh-s_2^2).(\lambda/kh-s_1^2)}{s_1^2-s_2^2}\end{array}\right.$$

Les solutions T_1 et T_3 s'écrivent donc :

$$\left\{\begin{array}{l}T_1(x_1,x_2)=-\frac{\varphi}{\lambda}.\left(1-\frac{\lambda/kh-s_2^2}{s_1^2-s_2^2}e^{-s_1|x_2|}+\frac{\lambda/kh-s_1^2}{s_1^2-s_2^2}e^{-s_2|x_2|}\right)\text{sgn}(x_2)\\ T_3(x_1,x_2)=-\frac{\varphi.kh}{\lambda^2}.\frac{(\lambda/kh-s_2^2).(\lambda/kh-s_1^2)}{s_1^2-s_2^2}.(e^{-s_1|x_2|}-e^{-s_2|x_2|})\text{sgn}(x_2)\end{array}\right.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 2 Formulation mixte du problème stationnaire pour la plaque

Dans le cas de la plaque, le problème variationnel [éq 4.2-1] est équivalent à un problème de minimisation (en faisant apparaître explicitement l'épaisseur εh dans B) de la fonctionnelle :

$$J(\theta)=\frac{1}{2}A(\theta,\theta)+\frac{1}{2\varepsilon}B(\theta,\theta)-F(\theta)$$

Pour obtenir la formulation mixte, remarquons que :

Proposition :

$$\frac{1}{2\varepsilon}B(\theta,\theta)=\sup_{(q_2,q_3)\in\left[L^2(\omega)\right]^2}\left[-\int_\omega(q_2\theta_2+q_3\theta_3)-\frac{\varepsilon}{4}\frac{h}{K}\int_\omega\left(q_1^2+\frac{1}{3}q_3^2\right)\right]$$

Démonstration :

Écrivons la condition d'extrêmalité de la fonctionnelle entre crochets (son opposée est strictement convexe, coercive et semi-continue inférieurement) et notons p le couple où le sup est atteint :

$$q_2\theta_2+q_3\theta_3+\frac{\varepsilon}{2}\frac{h}{K}\left(q_2p_2+\frac{1}{3}q_3p_3\right)=0\quad\forall q$$

d'où : $\begin{cases}p_2=-\dfrac{2K}{\varepsilon h}\theta_2\\ p_3=-\dfrac{6K}{\varepsilon h}\theta_3\end{cases}$

La valeur de la fonctionnelle en ce point est donc :

$$\int_\omega+\frac{2K}{\varepsilon h}\theta_2^2+\frac{6K}{\varepsilon h}\theta_3^2-\frac{\varepsilon h}{4K}\left[\frac{4K^2}{\varepsilon^2h^2}\theta_2^2+\frac{36K^2}{3\varepsilon^2h^2}\theta_3^2\right]=\frac{1}{\varepsilon h}\left[\frac{2K}{h}\theta_2^2+\frac{3K}{h}\theta_3^2\right]$$

soit effectivement le résultat annoncé.

On a donc une formulation équivalente à la minimisation de J sur $\mathbf{W}$:

$$\min_{\theta\in\mathbf{W}}\max_{q\in Q}\left[\frac{1}{2}A(\theta,\theta)-\frac{\varepsilon}{2}\bar{B}(q,q)-M(\theta,q)-F(\theta).\right]$$

en notant :

$$M(\theta,q)=\int_\omega q_2\theta_2+q_3\theta_3\ ,\quad\bar{B}(q,q)=\int_\omega\frac{h}{2K}\left(p_2q_2+\frac{1}{3}p_3q_3\right)$$

La condition de point-selle de ce Lagrangien conduit à la formulation [éq 4.2 - 2] :

$$\begin{cases}A(\mathbf{T},\theta)-M(\theta,p)=F(\theta)&\forall\theta\in\mathbf{W}\\ -\varepsilon\bar{B}(p,q)-M(\mathbf{T},q)=0&\forall q\in Q\end{cases}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)