Un élément fini de câble-poulie

Résumé :

Les poulies jouent un rôle important dans les structures de câbles telles que les lignes électriques aériennes. Il est donc utile de savoir les modéliser d'une façon à la fois réaliste et performante. On présente la formulation élément fini d'un tronçon de câble passant par une poulie : expressions des forces internes et de la matrice de rigidité. La poulie peut être fixe ou supportée par une structure flexible. Sa position sur le câble à l'équilibre n'est pas connue à priori : cette position est celle pour laquelle la tension du câble est la même de part et d'autre.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Notations....3
2 Introduction....4
3 Hypothèses et définition d'un élément fini de câble-poulie....5
4 Forces internes d'un élément fini de câble-poulie....7
5 Matrice de rigidité....8
6 Matrice de masse....9
7 Introduction de l'élément de câble-poulie dans le Code_Aster....9
8 Exemple d'application....10
9 Conclusion....11
10 Bibliographie....11
11 Description des versions du document....11
Annexe 1 Calcul de la matrice de rigidité....12
Annexe 2 Figure d'équilibre d'un câble pesant inextensible soumis à une tension donnée en extrémité 13

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notations

A aire de la section droite du câble.

E module d'Young.

$\mathbf{F}$ vecteur des forces internes de l'élément.

$\mathbf{F_n}$ force interne au nœud n .

H composante horizontale de la tension [§An1].

$\mathbf{I_3}$ matrice unité d'ordre 3.

$\mathbf{K}$ matrice de rigidité de l'élément.

l longueur actuelle de l'élément.

l_0 longueur au repos.

l_i longueur initiale.

$\mathbf{l_1}$ $\overrightarrow{N_3N_1}$

l_1 norme euclidienne de $\mathbf{l_1}$

$\mathbf{l_2}$ $\overrightarrow{N_3N_2}$

l_2 norme euclidienne de $\mathbf{l_2}$.

N tension actuelle du câble constituant l'élément.

N_i tension initiale (prétension).

S flèche d'une portée de câble [§An1].

s longueur d'une portée [§An1].

T température actuelle.

T_i température initiale.

$\mathbf{u}$ vecteur-déplacement des nœuds par rapport à la position initiale.

$\mathbf{u}_n$ déplacement du nœud n par rapport à sa position initiale.

w poids par unité de longueur.

$\mathbf{x}_n$ vecteur-position du nœud n en configuration initiale.

α coefficient de dilatation thermique.

ε déformation actuelle par rapport à la configuration initiale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Introduction

On utilise des poulies, lors de la construction des lignes électriques aériennes, pour l'opération de pose des câbles. Le câble en cours de pose [Figure 2-a] est fixé à l'un des supports d'arrêt du canton, il repose sur des poulies placées au bas des isolateurs des supports d'alignement et il est retenu par une force au niveau du second support d'arrêt. En jouant sur cette force - ou en déplaçant son point d'application - on ajuste la flèche de l'une des portées, celle qui est la plus soumise à des contraintes d'environnement. Puis on supprime les poulies et on fixe le câble aux isolateurs. La longueur du câble dans les différentes portées est alors fixée et elle détermine le comportement ultérieur de la ligne sous des sollicitations statiques (vent, surcharge de givre) et en régime dynamique (mouvement dû aux forces de Laplace créées par les courants de court-circuit).

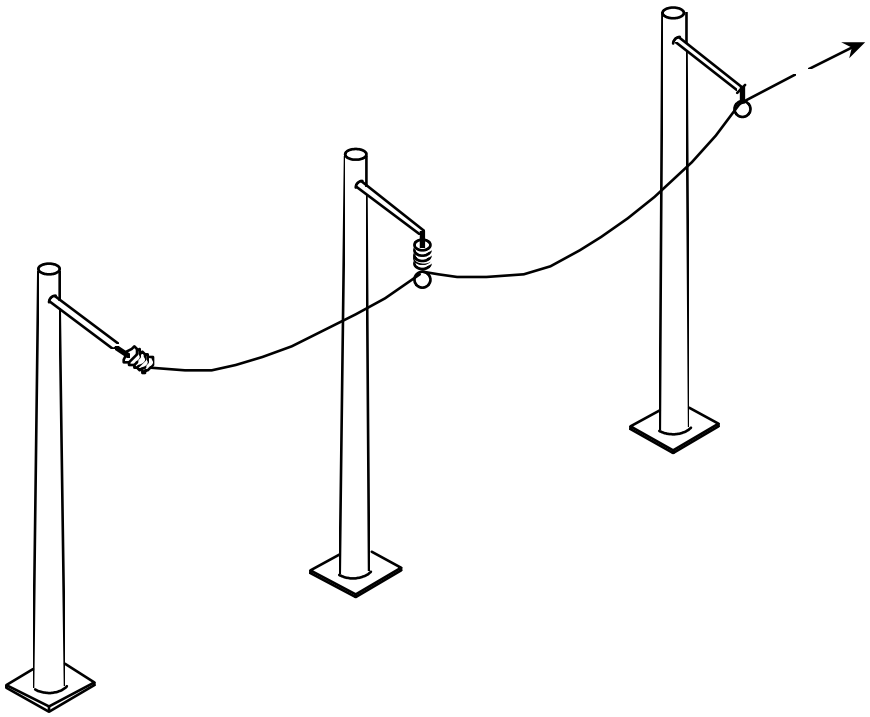


Figure 2-a : Pose d'un câble dans un canton à deux portées

L'élément fini de câble-poulie présenté ici permet de modéliser l'opération de pose et donc de calculer, d'une façon naturelle, la longueur de câble dans les différentes portées.

L'idée de cet élément fini nous est venue quelque temps après la conversation [bib1] et nous avons présenté sa formulation dans [bib2].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Hypothèses et définition d'un élément fini de câble-poulie

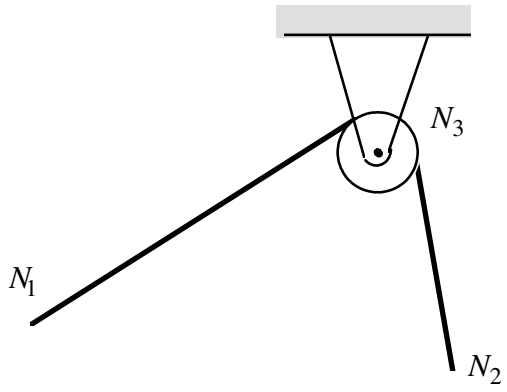


Figure 3-a : Tronçon de câble passant par une poulie - réel

Prenons un tronçon de câble $N_1 N_2$ passant par la poulie N_3 [Figure 3-a]. Cette poulie n'est pas forcément fixe et peut, par exemple et comme c'est le cas dans l'exemple de [§8], être montée à l'extrémité d'un câble.

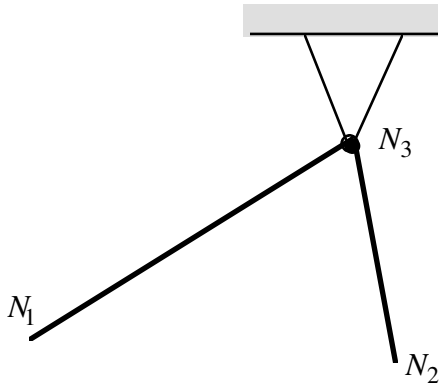


Figure 3-b : Tronçon de câble passant par une poulie - modélisé

La poulie est supposée ponctuelle [Figure 3-b]. On fait de plus les hypothèses suivantes :

- La position d'équilibre de N_3 n'est pas connue, mais elle se trouve nécessairement sur le tronçon N_1 N_2 déformé à partir de sa position initiale.

  En modélisation des lignes, les mouvements horizontaux sont de faible amplitude et cette hypothèse n'est généralement pas limitative ;

- Les deux brins N_3 N_1 et N_3 N_2 sont toujours rectilignes, comme des éléments de câble du 1er ordre.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Il découle de cette hypothèse que :

$$\mathbf{l_1}=\mathbf{x_1}+\mathbf{u_1}-\mathbf{x_3}-\mathbf{u_3} \qquad \text{éq 3-1}$$
$$\mathbf{l_2}=\mathbf{x_2}+\mathbf{u_2}-\mathbf{x_3}-u_3$$

$$l_1=\sqrt{\mathbf{l_1^T l_1}} \qquad \text{éq 3-2}$$
$$l_2=\sqrt{\mathbf{l_2^T l_2}}$$

La longueur totale des deux brins est :

- dans la position actuelle, où la température est T :

$$l=l_1+l_2 \ ;$$

- dans la position initiale, désignée par l'indice i, où la tension est N_i et la température T_i :

$$l_i=\left(l_1\right)_i+\left(l_2\right)_i \ ;$$

- dans une position non contrainte, désignée par l'indice 0, où la température est T_0 :

$$l_0=\left(l_1\right)_0+\left(l_2\right)_0 .$$

- La poulie est sans frottement et donc la tension est la même dans les deux brins.

  Il découle de cette hypothèse que la déformation ε est aussi la même et l'on prend pour valeur de celle-ci la mesure de l'allongement relatif du tronçon par rapport à l'état initial :

$$\varepsilon=\frac{l-l_i}{l_0} \qquad \text{éq 3-3}$$

  ε doit rester petit, en sorte que la section A est considérée comme constante.

  On notera que, dans le cadre de la méthode des éléments finis, les charges linéiques n'empêchent pas la tension d'être constante de N_1 à N_2. Ces forces sont en effet concentrées aux nœuds N_1 et N_2 et sur l'**axe** de la poulie N_3.

- La relation de comportement est élastique :

$$N=EA\left[e-\alpha\left(T-T_i\right)\right]+N_i \qquad \text{éq 3-4}$$

  On appelle **élément fini de câble-poulie**, un tronçon de câble N_1 N_2 N_3 satisfaisant aux hypothèses précédentes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Forces internes d'un élément fini de câble-poulie

Rappelons la définition suivante : on appelle forces internes d'un élément fini de structure les forces qu'il faut exercer en ses nœuds pour le maintenir dans sa configuration déformée actuelle.

Dans le cas d'un élément fini de câble-poulie, les forces internes se déduisent immédiatement de la statique. On a en effet [Figure 4-a] :

$$\mathbf{F}_1 = \frac{N}{l_1}\mathbf{l}_1 \qquad \text{éq 4-1}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{N}{l_2}\mathbf{l}_2$$

et, pour assurer l'équilibre :

$$\mathbf{F}_3 = -\left(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\right).$$

$\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ ayant même module, $\mathbf{F}_3$ est dirigée suivant la bissectrice de l'angle $\left(N_1 N_3 N_2\right)$.

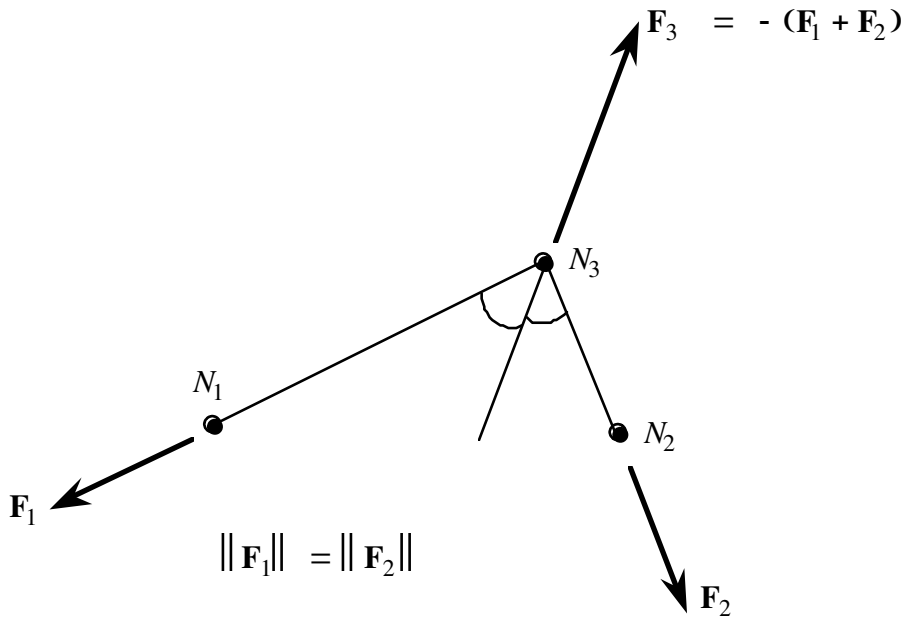


Figure 4-a : Forces internes d'un élément de câble-poulie

$\mathbf{F}_3$ est appliquée à l'**axe** de la poulie.

Le système $\mathbf{F}$ des forces internes de l'élément est donc :

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{Bmatrix}.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Matrice de rigidité

La matrice de rigidité $\mathbf{K}$ de l'élément est dérivée de Fréchet de $\mathbf{F}$ dans la direction du déplacement $\delta\mathbf{u}$ des nœuds :

$$\delta\mathbf{F}=\mathbf{K}\,\delta\mathbf{u}\ .$$

$\mathbf{K}$ se calcule par la formule classique suivante, utilisée intensivement dans [bib3], [bib4] et [bib5] :

$$\delta\mathbf{F}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta}{\delta\varepsilon}\mathbf{F}\left(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\mathbf{u}\right)\ . \qquad \text{éq 5-1}$$

Le détail des calculs est donné en [§An1] et l'expression finale de K est la suivante :

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}+\frac{N}{l_1}\mathbf{I}_3 & \mathbf{K}_{12} & -\mathbf{K}_{11}-\mathbf{K}_{12}-\frac{N}{l_1}\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22}+\frac{N}{l_2}\mathbf{I}_3 & -\mathbf{K}_{22}-\mathbf{K}_{12}^T-\frac{N}{l_2}\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{K}_{11}-\mathbf{K}_{12}^T-\frac{N}{l_1}\mathbf{I}_3 & -\mathbf{K}_{22}-\mathbf{K}_{12}-\frac{N}{l_2}\mathbf{I}_3 & \mathbf{K}_{11}+\mathbf{K}_{22}+\mathbf{K}_{12}+\mathbf{K}_{12}^T+\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)N\,\mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \qquad \text{éq 5-2}$$

N est donné par [éq 3-4] et [éq 3-3] ;

$$\mathbf{K}_{11}=\left(\frac{EA}{l_0}-\frac{N}{l_1}\right)\frac{1}{l_1^2}\mathbf{l}_1\mathbf{l}_1^T;$$
$$\mathbf{K}_{12}=\frac{EA}{l_0 l_1 l_2}\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2^T;$$
$$\mathbf{K}_{22}=\left(\frac{EA}{l_0}-\frac{N}{l_2}\right)\frac{1}{l_2^2}\mathbf{l}_2\mathbf{l}_2^T.$$

$\mathbf{K}$ est **symétrique**, à cause de la symétrie de $\mathbf{K}_{11}$ et de $\mathbf{K}_{22}$ et de la symétrie globale par blocs.

Mais $\mathbf{K}$ dépend des déplacements de $N_1, N_2 \text{et } N_3$ par l'intermédiaire de $\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2} \text{et } N$: l'élément fini de câble-poulie est donc un élément **non linéaire**.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Matrice de masse

Cette matrice n'intervient évidemment que dans les problèmes dynamiques. L'élément de câble-poulie n'est utilisé dans le *Code_Aster* que pour les problèmes quasi-statiques de pose de câbles [§7].

Remarque :

On présente néanmoins dans [bib2] l'exemple d'un problème dynamique comportant un câble-poulie.

La matrice de masse de l'élément $N_1 \quad N_2 \quad N_3$ *est obtenue en assemblant les matrices de masse "cohérentes" des éléments de câble à deux nœuds* $N_3 \quad N_1$ *et* $N_3 \quad N_2$ *[bib6] et en ajoutant la masse ponctuelle de la poulie.*

Il faut noter que, au cours d'une analyse dynamique, cette matrice de masse doit être mise à jour parce que les longueurs l_1 *et* l_2 *varient.*

7 Introduction de l'élément de câble-poulie dans le *Code_Aster*

L'élément de câble-poulie est supporté par une maille SEG3.

Dans la commande AFFE_MODELE, sous le mot-clé facteur AFFE, on doit définir comme suit les arguments des mots-clés :

mot-clé	GROUP_MA	PHENOMENE	MODELISATION
argument	groupe de mailles de câble-poulie	'MECANIQUE'	'CABLE_POULIE'

Le matériau constitutif doit être élastique.

Dans la commande AFFE_CARA_ELEM, les câbles-poulies sont traités comme des câbles.

Comme l'élément de câble-poulie est non linéaire [§5] et que, pour l'instant, il n'est utilisé qu'en statique [§6], il n'est accessible que par l'opérateur STAT_NON_LINE. Sous le mot-clé facteur COMPORTEMENT, les arguments des mots-clés sont les suivants :

mot-clé	GROUP_MA	RELATION	DEFORMATION
argument	groupe de mailles de câble-poulie	'ELAS'	'GROT_GDEP'

Enfin, la force de pesanteur agissant sur les nœuds N_1 et N_2 d'un élément de câble-poulie [fig 3-b] est suiveuse car elle dépend de la longueur des brins N_3N_1 et N_3N_2. Pour une structure comportant au moins un élément de câble-poulie, on doit spécifier cette charge (suiveuse) dans STAT_NON_LINE sous le mot clé facteur EXCIT.

On trouve un exemple d'application dans le test SSNL100A [V6.02.100].

Remarque :

L'élément de câble-poulie ne permet pas de prendre en compte de déformation due à la température.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Exemple d'application

Cet exemple est celui de la pose d'un câble à deux portées et à tension de réglage imposée.

Sur [Figure 7-a], O est l'ancrage du câble sur le support d'arrêt de gauche. P_1 est une première poulie placée au pied de la chaîne de suspension P_1C, fixée en C au support d'alignement. P_2 est une seconde poulie placée sur le support d'arrêt de droite. O, P_1 et P_2 sont, pour simplifier, situés sur une horizontale.

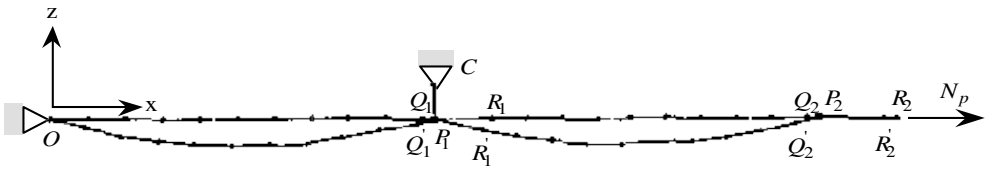


Figure 7-a : Equilibre d'un câble à deux portées, soumis à une tension de réglage donnée.
$OP_1 = P_1P_2 = 100\,m$; $w = 30\,N/m$; $E'A = 5\,x\,10^7\,N$; $N_p = 5\,000\,N$

En position initiale, le câble au repos, supposé en apesanteur, est droit : ligne en trait d'axe de [Figure 7-a]. Pour la modélisation en éléments finis, cette ligne est découpée en :

- dix éléments de câble à deux nœuds entre O et Q_1 ;
- un élément de câble-poulie Q_1 R_1 P_1 ;
- neuf éléments de câble entre R_1 et Q_2 ;
- un élément de câble-poulie Q_2 R_2 P_2 .

On soumet le câble simultanément à la pesanteur et à la tension de réglage N_p exercée en R_2 . La position d'équilibre (ligne en trait plein de [Figure 7-a]) est atteinte en 11 itérations par l'opérateur STAT_NON_LINE de *Code_Aster*. Les flèches sont de $7.955\,m$ et $7.867\,m$, respectivement dans la portée de gauche et celle de droite.

Pour un câble **inextensible** d'une portée de $100\,m$, de poids linéique $30\,N/m$ et soumis à une tension en extrémité de $5\,000\,N$, la flèche théorique est de $7.941\,m$ [§An2].

En jouant sur la tension de réglage, on peut ajuster l'une des deux flèches à une valeur fixée à l'avance.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Conclusion

L'élément fini de câble-poulie présenté dans cette note, d'une formulation mécanique très simple, a des performances comparables à celles d'un élément de câble ordinaire. Il est très commode et même indispensable pour une modélisation réaliste des lignes électriques aériennes. Il devrait trouver d'autres applications, notamment en Robotique.

10 Bibliographie

1) J. L. LILIEN : Communication privée.

2) M. AUFAURE : A finite element of cable passing through a pulley. Computers & Structures 46, 807-812 (1993).

3) J. C. SIMO, L. VU-QUOC : A three-dimensional finite-strain rod model. Part II : computational aspects. *Comput. Meth. appl. Mech. Engng* 58, 79-116 (1986).

4) A. CARDONA, M. GERADIN : A beam finite element nonlinear theory with finite rotations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 26, 2403-2438 (1988).

5) A. CARDONA : An integrated approach to mechanism analysis. Thesis, University of Liège, Belgium (1989).

6) M. AUFAURE : Modélisation des câbles dans le *Code_Aster*, en cours de rédaction.

7) H. MAX IRVINE : Cable Structures. MIT Press (1981).

11 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3	*M. AUFAURE (EDF/IMA/MMN)*	Texte initial
10,1	J.M.PROIX (EDF-R&D/AMA)	Modification de GREEN en GROT_GDEP

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 1Calcul de la matrice de rigidité

On montre ici comment s'applique la formule [éq 5-1] au calcul des trois premières lignes de la matrice K [éq 5-2], celles qui sont relatives à la force $\mathbf{F}_1$. Les autres lignes s'obtiennent soit par permutation des indices, soit par sommation de deux lignes précédentes.

Les premières lignes s'obtiennent donc en calculant la dérivée :

$$\lim_{e\to 0}\frac{d}{de}F_1(u+ed\,u) \qquad \text{éq An1-1}$$

et en mettant en facteur le vecteur $\delta \boldsymbol{u}$.

D'après les relations [éq 4-1], [éq 3-4] et [éq 3-3], on a :

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})=\left\{EA\left[\frac{l_1(\mathbf{u}+\varepsilon\,d\,\mathbf{u})+l_2(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})-l_i}{l_0}-\alpha(T-T_i)\right]+N_i\right\}\frac{l_1(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})}{l_1(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})}$$

avec, d'après [éq 3-1] :

$$\mathbf{l}_1(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})=\mathbf{x}_1+\mathbf{u_1}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u_1}-\mathbf{x}_3-\mathbf{u_3}-\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u_3}$$

et, d'après [éq 3-2] :

$$l_1(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})=\sqrt{\mathbf{l}_1^T(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})\,\mathbf{l}_1(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})}.$$

Par conséquent :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\,\varepsilon}\mathbf{l}_1(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})=\delta\,\mathbf{u}_1-\delta\,\mathbf{u}_3$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\,\varepsilon}\mathbf{l}_1(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})=\frac{1}{l_1(\mathbf{u})}\mathbf{l}_1^T(\mathbf{u})(\delta\,\mathbf{u}_1-\delta\,\mathbf{u}_3)$$

et par permutation des indices 1 et 2 :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\,\varepsilon}\mathbf{l}_2(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})=\frac{1}{l_2(\mathbf{u})}\mathbf{l}_2^T(\mathbf{u})(\delta\,\mathbf{u}_2-\delta\,\mathbf{u}_3)$$

Finalement :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\,\varepsilon}\mathbf{l}_1(\mathbf{u}+\varepsilon\,\delta\,\mathbf{u})=\frac{1}{l_1^3(\mathbf{u})}\mathbf{l}_1^T(\mathbf{u})(\delta\,\mathbf{u}_1-\delta\,\mathbf{u}_3)$$

En portant les expressions précédentes dans [éq An1-1] et en mettant en facteur le vecteur $\delta\,\mathbf{u}$, on obtient aisément les trois premières lignes de $\mathbf{K}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 2Figure d'équilibre d'un câble pesant inextensible soumis à une tension donnée en extrémité

Prenons un câble [Figure An2-a] dont une extrémité est fixée au point O et dont l'autre extrémité P est soumise à la tension N_p. O et P sont sur la même horizontale et distants de s. Le poids linéique est w. On cherche la flèche S.

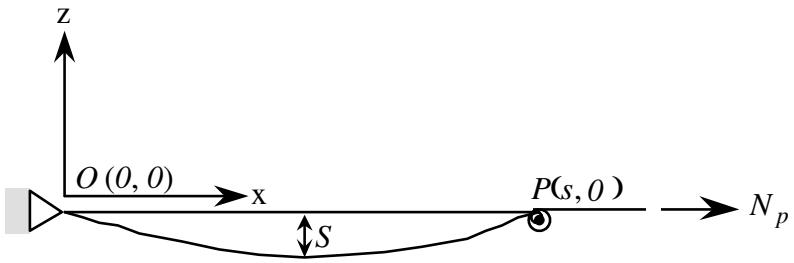


Figure An2-a : Câble pesant en équilibre

On trouve dans [bib7], p 6, les formules bien connues suivantes :

- figure d'équilibre du câble :

$$z(x)=\frac{H}{w}\left[\cosh\frac{w}{H}\left(\frac{s}{2}-x\right)-\cosh\frac{ws}{2\mathrm{H}}\right]; \qquad \text{éq An2-1}$$

- tension :

$$N(x)=H\cosh\frac{w}{H}\left(\frac{s}{2}-x\right). \qquad \text{éq An2-2}$$

H est la tension horizontale, constante le long du câble puisque la force extérieure répartie - le poids - est verticale.

H se calcule par [éq An2-2] écrite en P :

$$\cosh\frac{ws}{2\mathrm{H}}-\frac{2\mathrm{N}_p}{ws}\frac{ws}{2\mathrm{H}}=0.$$

$\frac{ws}{2\mathrm{H}}$ est donc racine de l'équation transcendante :

$$\cosh X=\frac{2\mathrm{N}_p}{ws}X.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette équation a deux racines [Figure An2-b] si :

$$\frac{2\mathrm{N}_p}{ws} > p_0,$$

avec :

$$p_0 = \sinh x_0$$

et :

$$x_0 = \operatorname{cotanh} x_0 \; x_0 > 0 .$$

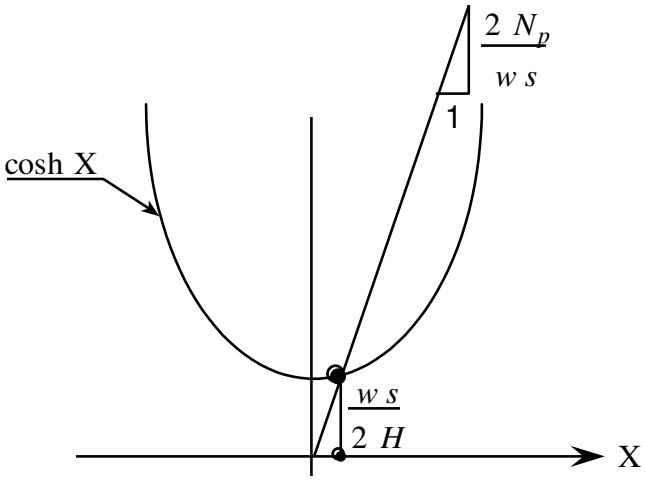


Figure An2-b : Calcul de $\frac{ws}{2\mathrm{H}}$

La plus petite racine, qui correspond à la plus grande tension du câble, est seule utile. L'autre racine correspond à une flèche du câble considérable, de l'ordre de grandeur de sa portée.

$\frac{ws}{2\mathrm{H}}$ étant calculé, la flèche se déduit de [éq An2-1] :

$$S = \frac{s}{2}\frac{2\mathrm{H}}{ws}\left(\cosh\frac{ws}{2\mathrm{H}} - 1\right) .$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)