# Éléments de Fourier pour les structures axisymétriques

**Résumé**

Les éléments de Fourier sont destinés à calculer la réponse de structure à géométrie axisymétrique sollicitées par des chargements non axisymétriques décomposés en séries de Fourier.

On expose dans ce document une théorie générale d'Analyse de Fourier avec couplage des modes symétriques et antisymétriques dans le cas anisotrope. Le cas des matériaux isotropes, ou orthotropes d'axe $Oz$ , où les modes sont découplés, est étudié à part.

Les éléments de Fourier sont utilisables dans *Code_Aster* à partir de la modélisation AXIS_FOURIER. Les mailles supports de ces éléments sont des triangles et quadrangles de degré 1 et 2.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des Matières

1 Introduction....3
2 Analyse de Fourier anisotrope....3
2.1 Théorie générale....3
2.2 Couplage et découplage des modes symétriques et antisymétriques....5
2.3 Calcul des contraintes....6
3 Calcul de la matrice de rigidité....7
3.1 Cas général....7
3.2 Calcul de dans le cas isotrope....8
4 Chargements....11
5 Conclusion et Perspectives....12
6 Bibliographie....12
7 Description des versions du document....12



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Introduction

L'analyse de Fourier est destinée à calculer la réponse de structures à géométries axisymétriques soumises à des chargements non axisymétriques. Dans ce cas, il est nécessaire de développer les chargements en séries de Fourier. Généralement la convergence est atteinte pour 4 ou 5 harmoniques, mais la rapidité de cette convergence dépend de la nature du chargement : plus le chargement est régulier et plus la série correspondante converge rapidement. Le cas le plus défavorable est celui d'une force concentrée pour laquelle la pratique montre qu'il faut aller au delà (au moins 7 harmoniques).

Dans *Code_Aster*, la décomposition du chargement en séries de Fourier est supposée avoir été faite au préalable par l'utilisateur. *Code_Aster* permet de calculer les réponses à ce chargement, harmonique par harmonique (modélisation `AXIS_FOURIER`), et globalement après recombinaison des harmoniques entre elles (opérateur `COMB_FOURIER`).

On exposera dans un premier chapitre le cadre général de l'anisotropie, en insistant sur le découplage des modes dans le cas orthotrope. Le deuxième chapitre explicite le calcul de la matrice de rigidité dans le cas isotrope.

Pour l'utilisation des éléments de Fourier dans *Code_Aster*, on renvoie à la notice d'utilisation de la modélisation Fourier [U2.07.01].

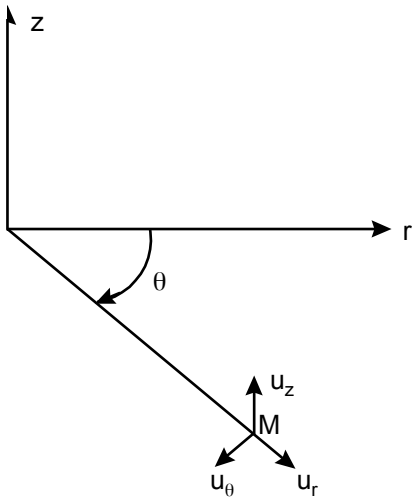
# 2 Analyse de Fourier anisotrope

## 2.1 Théorie générale

Tous les champs considérés (forces, déplacements, déformations, contraintes) sont exprimés en coordonnées cylindriques avec la convention suivante sur l'ordre des composantes :

1 composante radiale suivant $r$
2 composante axiale suivant $z$
3 composante tangentielle suivant $\theta$

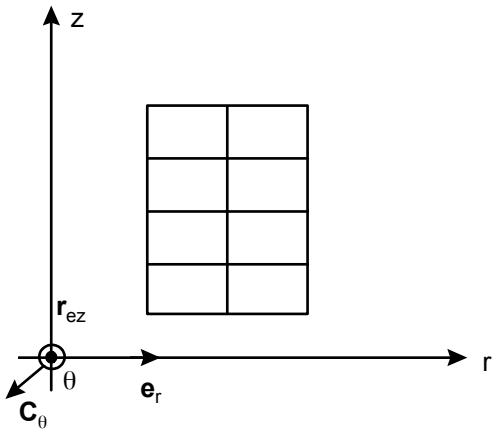
Exemple : $(u_r, u_z, u_\theta), (f_r, f_z, f_\theta)$




Le maillage est localisé dans le plan $(r, z)$, la symétrie de révolution se faisant autour de l'axe $Oz$. Le trièdre $(r, z, \theta)$ est orienté dans le sens direct.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)




On décompose le déplacement $\mathbf{u}$ (ou le chargement $\mathbf{f}$ ) suivant $\mathbf{u}=\mathbf{u}^s+\mathbf{u}^a$ où $\mathbf{u}^s$ (resp. $\mathbf{u}^a$ ) désigne la partie symétrique (resp. antisymétrique) du développement en série de Fourier de $\mathbf{u}$ par rapport à la variable $\theta$ .

On obtient :

$$\left.\begin{aligned} u_r^s &= \sum_{l=0}^{\infty} u_l^s(r,z)\cos l\theta \\ u_z^s &= \sum_{l=0}^{\infty} v_l^s(r,z)\cos l\theta \\ u_\theta^s &= \sum_{l=0}^{\infty} w_l^s(r,z)\left(-\sin l\theta\right) \end{aligned}\right\} \text{partie symétrique } u^s$$

$$\left.\begin{aligned} u_r^a &= \sum_{l=0}^{\infty} u_l^a(r,z)\sin l\theta \\ u_z^a &= \sum_{l=0}^{\infty} v_l^a(r,z)\sin l\theta \\ u_\theta^a &= \sum_{l=0}^{\infty} w_l^a(r,z)\cos l\theta \end{aligned}\right\} \text{partie antisymétrique } u^a$$

A noter le choix du signe $-$ pour $u_\theta^s$ , qui permet de simplifier les calculs ultérieurs. Si on note $\mathbf{U}_l^s=\left(u_l^s, v_l^s, w_l^s\right)$ $\left(\text{resp. } \mathbf{U}_l^a\right)$ la $l-\text{ième}$ composante symétrique (resp. antisymétrique) du développement en série de Fourier de $\mathbf{u}$ , on obtient :

$$\mathbf{u}=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\begin{pmatrix}\cos l\theta & 0 & 0\\ 0 & \cos l\theta & 0\\ 0 & 0 & -\sin l\theta\end{pmatrix}\mathbf{U}_l^s+\begin{pmatrix}\sin l\theta & 0 & 0\\ 0 & \sin l\theta & 0\\ 0 & 0 & \cos l\theta\end{pmatrix}\mathbf{U}_l^a\right] \qquad \text{éq 2.1-1}$$

Si l'on désigne par $\boldsymbol{\varepsilon}$ le vecteur déformation linéarisé, on s'aperçoit que $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut être décomposé en série de Fourier suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\sum_{l=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\cos l\theta\, I_4 & 0_{4,2}\\ 0_{2,4} & -\sin l\theta\, I_2\end{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_l^s+\begin{pmatrix}\sin l\theta\, I_4 & 0_{4,2}\\ 0_{2,4} & \cos l\theta\, I_2\end{pmatrix}\boldsymbol{\theta}_l^a \qquad \text{éq 2.1-2}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec $\boldsymbol{\varepsilon}=\left\{\varepsilon_r,\varepsilon_z,\varepsilon_q,\gamma_{rz},\gamma_{rq},\gamma_{zq}\right\}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l^s=B_l^s\mathbf{U}_l^s \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_l^a=B_l^a\mathbf{U}_l^a$$

avec (voir [bib1]) :

$$B_l^s=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{l}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{l}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r} \\ 0 & \frac{l}{r} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

On a $B_l^a=B_l^s\ \forall l$ (ceci est dû au choix du développement symétrique de $\mathbf{u}$ en $(\cos,\cos,-\sin)$ au lieu de $(\cos,\cos,\sin)$). On omettra à partir de maintenant les indices $a$ et $s$ et on notera $B_l$ l'opérateur permettant de calculer les déformations correspondant à l'harmonique $l$.

## 2.2 Couplage et découplage des modes symétriques et antisymétriques

En reprenant les notations précédentes, on a :

$$\mathbf{u}=\sum_l\begin{pmatrix}\cos l\theta\, I_2 & 0_{2,1}\\ 0_{1,2} & -\sin l\theta\end{pmatrix}\mathbf{u}_l^s+\sum_l\begin{pmatrix}\sin l\theta\, I_2 & 0_{2,1}\\ 0_{1,2} & \cos l\theta\end{pmatrix}\mathbf{u}_l^a$$

ce qui s'écrit, en introduisant des matrices $M_l^s$ et $M_l^a$ :

$$\mathbf{u}=\sum_l\left(M_l^s\mathbf{U}_l^s+M_l^a\mathbf{U}_l^a\right)$$
$$\mathbf{u}_l=M_l^s\mathbf{U}_l^s+M_l^a\mathbf{U}_l^a$$

On en déduit que : $\boldsymbol{\varepsilon}_l=M'^s_l\boldsymbol{\varepsilon}_l^s+M'^a_l\boldsymbol{\varepsilon}_l^a$

avec $M'^s_l=\begin{pmatrix}\cos l\theta\, I_4 & 0_{4,2}\\ 0_{2,4} & -\sin l\theta\, I_2\end{pmatrix}$

$M'^a_l=\begin{pmatrix}\sin l\theta\, I_4 & 0_{4,2}\\ 0_{2,4} & \cos l\theta\, I_2\end{pmatrix}$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

**Calcul de l'énergie de déformation**

$$W_l = \int_0^{2\pi} \int_s {}^t\varepsilon_l D \varepsilon_l \, ds \, d\theta \quad \text{avec } ds = r dr dz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_s {}^t\varepsilon_l^s \, {}^t M'^s_l \, DM'^s_l \varepsilon_l^s \, ds + \int_0^{2\pi} d\theta \int_s {}^t\theta_l^a \, {}^t M'^a_l \, DM'^a_l \varepsilon_l^a \, ds$$
$$+ \int_0^{2\pi} d\theta \int_s {}^t\varepsilon_l^a \, {}^t M'^a_l \, DM'^s_l \varepsilon_l^s \, ds + \int_0^{2\pi} d\theta \int_s {}^t\varepsilon_l^s \, {}^t M'^s_l \, DM'^a_l \varepsilon_l^a \, ds$$

Puisque $M'^a_l DM'^s_l = \begin{pmatrix} \sin l\theta \, I_4 & 0 \\ 0 & \cos l\theta \, I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ {}^t D_3 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos l\theta \, I_4 & 0 \\ 0 & -\sin l\theta \, I_2 \end{pmatrix}$

$$M'^a_l DM'^s_l = \begin{pmatrix} D_1 \sin l\theta \cos l\theta & -D_3 (\sin l\theta)^2 \\ {}^t D_3 (\cos l\theta)^2 & -D_2 \sin l\theta \cos l\theta \end{pmatrix}$$

et que $\int_0^{2\pi} \sin l\theta \cos l\theta \, d\theta = 0$, si $D_3 = 0$ il n'y a donc pas de terme $\left({}^t\varepsilon_l^a, \varepsilon_l^s\right)$ ou $\left({}^t\varepsilon_l^s, \varepsilon_l^a\right)$ dans $W$ . Il n'y a alors pas de couplage $\left(U^a, U^s\right)$ ou $\left(U^s, U^a\right)$ .

## 2.3 Calcul des contraintes

De même que $\boldsymbol{\varepsilon}$ , $\boldsymbol{\sigma}$ peut être décomposé en séries de Fourier suivant :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_l \left( M'^s_l \boldsymbol{\sigma}_l^s + M'^a_l \boldsymbol{\sigma}_l^a \right)$$

De la loi de Hooke $\boldsymbol{\sigma} = D\boldsymbol{\varepsilon}$ , on déduit :

$$\mathbf{s} = \sum_l \begin{pmatrix} \cos l\theta \, D_1 & -\sin l\theta \, D_3 \\ \cos l\theta \, D_3^t & -\sin l\theta \, D_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_l^s + \begin{pmatrix} \sin l\theta \, D_1 & \cos l\theta \, D_3 \\ \sin l\theta \, D_3^t & \cos l\theta \, D_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_l^a$$

Soit, en faisant apparaître les matrices $M'^s_l$ et $M'^a_l$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_l M'^s_l \left[ \begin{pmatrix} D_1 & 0_{4,2} \\ 0_{2,4} & D_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_l^s + \begin{pmatrix} 0_{4,4} & D_3 \\ -D_3^t & 0_{2,2} \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_l^a \right]$$
$$+ M'^a_l \left[ \begin{pmatrix} 0_{4,4} & -D_3 \\ D_3^t & 0_{2,2} \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_l^s + \begin{pmatrix} D_1 & 0_{4,2} \\ 0_{2,4} & D_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_l^a \right]$$

En posant $D^s \begin{pmatrix} D_1 & 0_{4,2} \\ 0_{2,4} & D_2 \end{pmatrix}$ et $D^a = \begin{pmatrix} 0_{4,4} & D_3 \\ -D_3^t & 0_{2,2} \end{pmatrix}$ , on en déduit les parties symétrique et antisymétrique de la contrainte relative à l'harmonique $l$ :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_l^s = D^s\,\boldsymbol{\varepsilon}_l^s + D^a\,\boldsymbol{\varepsilon}_l^a = D^s\,B_l\,\mathbf{u}_l^s + D^a\,B_l\,\mathbf{u}_l^a \\ \boldsymbol{\sigma}_l^a = -D^a\,\boldsymbol{\varepsilon}_l^s + D^s\,\boldsymbol{\varepsilon}_l^a = -D^a\,B_l\,\mathbf{u}_l^s + D^s\,B_l\,\mathbf{u}_l^a \end{cases} \quad \text{éq 2.3-1}$$

**Remarque :**

*Dans le cas de l'orthotropie par rapport à $Oz$, on a $D^a=0$ et [éq 2.1-1] se réduit à :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_l^s = D^s\,B_l\,\mathbf{u}_l^s \\ \boldsymbol{\sigma}_l^a = D^s\,B_l\,\mathbf{u}_l^a \end{cases}$$

*C'est-à-dire que si les déplacements sont symétriques (ou antisymétriques), les contraintes le sont aussi.*

# 3 Calcul de la matrice de rigidité

## 3.1 Cas général

Soient $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ deux champs cinématiquement admissibles quelconques. En appliquant le principe des travaux virtuels à l'élément de volume $v$, on peut écrire :

$$\int_v \left({}^t\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,.\,\mathbf{s}\right) dv = \int_v \left({}^t\delta\mathbf{u}\,.\,f\right) dv$$

Après décomposition en série de Fourier et intégration par rapport à $\theta$, on obtient, pour des champs $\varepsilon_l^s, \varepsilon_l^a, u_l^s, u_l^a$ C.A. quelconques et pour toute harmonique $l$ :

$$\int_{s_l} \left({}^t\delta\varepsilon_l^s\,.\,\sigma_l^s + {}^t\delta\varepsilon_l^a\,.\,\sigma_l^a\right) ds_l = \int_{s_l} \left({}^t\delta u_l^s\,.\,f_l^s + {}^t\delta u_l^a\,.\,f_l^a\right) ds_l$$

Soit, en utilisant [éq 2.3-1] et en posant :

$$K_l^s = \int_{s_l} {}^t B_l\,D^s\,B_l\,ds_l$$
$$K_l^a = \int_{s_l} {}^t B_l\,D^s\,B_l\,ds_l = K_l^s = K_l$$
$$K_l^{as} = \int_{s_l} {}^t B_l\,D^a\,B_l\,ds_l$$

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} K_l\,u_l^s + K_l^{as}\,u_l^a = f_l^s \\ {}^t K_l^{as}\,u_l^s + K_l\,u_l^a = f_l^a \end{cases} \quad \text{éq 3-1}$$

où ${}^t K_l^{as} = -K_l^{as}$ on voit que si $D_a \neq 0$, le découplage des modes en harmoniques symétriques et antisymétriques n'est plus possible. Par contre, si $D_a = 0$ (orthotropie par rapport à $Oz$) alors $K_l^{as} = 0$ et [éq 3-1] se réduit à :

$$\begin{cases} K_l\,u_l^s = f_l^s \\ K_l\,u_l^a = f_l^a \end{cases}$$

En prenant pour vecteurs déplacement (resp. force) correspondant à l'harmonique $l$ les vecteurs :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{u}_l=\left\{u_r^s,u_z^s,u_\theta^s,u_r^a,u_z^a,u_\theta^a\right\}_l$$
$$\mathbf{f}_l=\left\{f_r^s,f_z^s,f_\theta^s,f_r^a,f_z^a,f_\theta^a\right\}_l$$

On a alors :

$$K_l^g\,\mathbf{u}_l=\mathbf{f}_l \text{ avec } K_l^g=\begin{pmatrix} K_l & K_l^{as} \\ {}^tK_l^{as} & K_l \end{pmatrix}$$

## 3.2 Calcul de $K_l^g$ dans le cas isotrope

Dans ce cas on a donc $K_l^{as}=0$ . On détaille dans la suite le calcul de $K_l=\int_{s_l}{}^tB_l D^s B_l\,ds_l$

Dans la cas isotrope, on a :

$$D=D^s=\begin{bmatrix} D1 & D2 & D2 & 0 & & \\ D2 & D1 & D2 & 0 & & \\ D2 & D2 & D1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & D3 & & \\ & & 0 & & D3 & 0 \\ & & & & 0 & D3 \end{bmatrix}$$

avec $D1=\dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

$D2=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2u)}$

$D3=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$

On peut écrire :

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\\ \gamma_{r\theta}\\ \gamma_{z\theta}\end{Bmatrix}=B_l\begin{Bmatrix}u_r^s\\ u_z^s\\ u_\theta^s\end{Bmatrix}=B_l'^t\left\{\frac{u_r}{r},\frac{u_z}{r},\frac{u_\theta}{r},\frac{\partial u_r}{\partial r},\frac{\partial u_z}{\partial r},\frac{\partial u_\theta}{\partial r},\frac{\partial u_r}{\partial z},\frac{\partial u_z}{\partial z},\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right\}$$

$$\text{avec } B'_l=\begin{array}{c} \leftarrow \text{fcts de forme} \rightarrow \leftarrow \text{dérivées des fcts de forme} \rightarrow \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

En désignant par $\left\{W_J\right\}_{J=1\text{ à }n}$ les fonctions de forme de l'élément considéré, on a :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$U = \begin{matrix} \frac{u_r}{r} \\ \frac{u_z}{r} \\ \frac{u_\theta}{r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{matrix} = \begin{matrix} \cdots & \frac{W_J}{r} & \overbrace{0}^{\text{noeud } J} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{W_J}{r} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \frac{W_J}{r} & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial W_J}{\partial r} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{\partial W_J}{\partial r} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial W_J}{\partial r} & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial W_J}{\partial z} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{\partial W_J}{\partial z} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \underbrace{0}_{\text{bloc } P_J} & \frac{\partial W_J}{\partial z} & \cdots \end{matrix} \begin{Bmatrix} . \\ . \\ . \\ u_r(J) \\ u_z(J) \\ u_\theta(J) \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix}$$

On note $(P)=(P_1,\ldots,P_N)$ où $N$ est le nombre de nœuds de l'élément.

Alors $K_l = \int_{s_l} {}^t P\, {}^t B_l' D B_l' P\, ds_l$

$K_l$ est symétrique et formée de blocs $(K_l)^{I,J}\ 3\times 3$ :

$$(K_l)^{I,J} = \int_{s_l} {}^t P_I\, {}^t B_l' D B_l' P_J\, ds_l$$

Le calcul des blocs $(K_l)^{I,J}$ est explicité ci-dessous :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$ {}^{t}B_l^{'}DB_l^{'}=\begin{bmatrix} D1+1^2 D3 & 0 & -l(D1+D3) & D2 & 0 & lD3 & 0 & D2 & 0 \\ 0 & l^2 D3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & lD3 \\ -l(D1+D3) & 0 & l^2 D1+D3 & -lD2 & 0 & -D3 & 0 & -lD2 & 0 \\ D2 & 0 & -lD2 & D1 & 0 & 0 & 0 & D2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D3 & 0 & D3 & 0 & 0 \\ lD3 & 0 & -D3 & 0 & 0 & D3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D3 & 0 & D3 & 0 & 0 \\ D2 & 0 & -lD2 & D2 & 0 & 0 & 0 & D1 & 0 \\ 0 & lD3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D3 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{t}P_I\,{}^{t}B_l^{'}DB_l^{'}P_J=\left(K_{ij}^{l}\right)_{3\times 3}^{I,J}=\begin{bmatrix} K_{11}^{I,J} & K_{12}^{I,J} & K_{13}^{I,J} \\ K_{21}^{I,J} & K_{22}^{I,J} & K_{23}^{I,J} \\ K_{31}^{I,J} & K_{32}^{I,J} & K_{33}^{I,J} \end{bmatrix} \quad \text{avec} $$

$$ K_{11}^{I,J}=\left(\frac{D1+l^2 D3}{r^2}\right)W_I W_J+D1\frac{\partial W_I}{\partial r}\frac{\partial W_J}{\partial r}+D3\frac{\partial W_I}{\partial z}\frac{\partial W_J}{\partial z}+\frac{D2}{r}\left(W_I\frac{\partial W_J}{\partial r}+W_J\frac{\partial W_I}{\partial r}\right) $$

$$ K_{22}^{I,J}=\left(\frac{l^2 D3}{r^2}\right)W_I W_J+D3\frac{\partial W_I}{\partial r}\frac{\partial W_J}{\partial r}+D1\frac{\partial W_I}{\partial z}\frac{\partial W_J}{\partial z} $$

$$ K_{33}^{I,J}=\left(\frac{l^2 D1+D3}{r^2}\right)W_I W_J+D3\left(\frac{\partial W_I}{\partial r}\frac{\partial W_J}{\partial r}+\frac{\partial W_I}{\partial z}\frac{\partial W_J}{\partial z}\right)-\frac{D3}{r}\left(W_I\frac{\partial W_J}{\partial r}+\frac{\partial W_I}{\partial r}W_J\right) $$

$$ K_{12}^{I,J}=D2\frac{\partial W_I}{\partial r}\frac{\partial W_J}{\partial z}+D3\frac{\partial W_I}{\partial z}\frac{\partial W_J}{\partial r}+\frac{D2}{r}W_I\frac{\partial W_J}{\partial z} $$

$$ K_{21}^{I,J}=D3\frac{\partial W_I}{\partial r}\frac{\partial W_J}{\partial z}+D2\frac{\partial W_I}{\partial z}\frac{\partial W_J}{\partial r}+\frac{D2}{r}W_J\frac{\partial W_I}{\partial z} $$

$$ K_{13}^{I,J}=-\frac{l}{r^2}(D1+D3)W_I W_J-\frac{l}{r}D2W_J\frac{\partial W_I}{\partial r}+\frac{l}{r}D3W_I\frac{\partial W_J}{\partial r} $$

$$ K_{31}^{I,J}=-\frac{l}{r^2}(D1+D3)W_I W_J-\frac{l}{r}D2W_I\frac{\partial W_J}{\partial r}+\frac{l}{r}D3W_J\frac{\partial W_I}{\partial r} $$

$$ K_{23}^{I,J}=-\frac{l}{r}D2\frac{\partial W_I}{\partial z}W_J+\frac{l}{r}D3W_I\frac{\partial W_J}{\partial z} $$

$$ K_{32}^{I,J}=-\frac{l}{r}D2W_I\frac{\partial W_J}{\partial z}+\frac{l}{r}D3\frac{\partial W_I}{\partial z}W_J $$

Les blocs $K^{I,J}$ ne sont pas symétriques sauf pour $I=J$ (sur la diagonale de $K$ ). On remarque en fait que les blocs $K^{I,J}$ peuvent s'écrire pour tout harmonique ( $l=0$ compris).



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} K_{11}^{I,J} = K0_{11}^{I,J} + l^2 \dfrac{D3}{r^2} W_I W_J \\ K_{22}^{I,J} = K0_{22}^{I,J} + l^2 \dfrac{D3}{r^2} W_I W_J \\ K_{33}^{I,J} = K0_{33}^{I,J} + l^2 \dfrac{D1}{r^2} W_I W_J \\ K_{12}^{I,J} = K0_{12}^{I,J} \\ K_{21}^{I,J} = K0_{21}^{I,J} \\ K_{13}^{I,J} = -lK0_{13}^{I,J} \\ K_{31}^{I,J} = -lK0_{31}^{I,J} \\ K_{23}^{I,J} = -lK0_{23}^{I,J} \\ K_{32}^{I,J} = -lK0_{32}^{I,J} \end{cases}$$

où les blocs $K0^{I,J}$ sont indépendants de l'harmonique $l$ .

# 4 Chargements

On suppose que le chargement a été décomposé suivant la même base que les déplacements, soit :

$$\mathbf{f} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \begin{pmatrix} \cos l\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos l\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin l\theta \end{pmatrix} \mathbf{F}_l^s + \begin{pmatrix} \sin l\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin l\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos l\theta \end{pmatrix} \mathbf{F}_l^a \right]$$

Il n'y a pas couplage pour une même harmonique entre les parties symétrique et antisymétrique du chargement du fait de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques $\sin l\theta$ et $\cos l\theta$ , ceci pour tous les types de chargement. Ceci veut dire en particulier que les forces nodales équivalentes sont les mêmes pour les harmoniques symétrique et antisymétrique si les amplitudes $F_l^s$ et $F_l^a$ sont les mêmes.

Pour la nature des chargements admissibles avec la modélisation Fourier, on renvoie à la notice d'utilisation [U2.01.07].



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Conclusion et Perspectives

Actuellement, on suppose que la décomposition du chargement a été faite au préalable par l'utilisateur, c'est-à-dire que $\left\{F_l^s, F_l^a\right\}_{l\geq 0}$ est connu. Cette décomposition pourrait être réalisée par un opérateur de *Code_Aster* qui projetterait le chargement sur les modes de Fourier.

Pour l'instant, seul le cas non anisotrope est implanté, c'est-à-dire qu'il n'y a jamais couplage des modes. L'extension à l'anisotropie peut constituer un développement ultérieur.

# 6 Bibliographie

1 DUVAUT G. : "Mécanique des milieux continus" p282

2 ASKA HS. : "Structures axisymétriques en séries de Fourier", mai 1982, ISD

# 7 Description des versions du document

| Version Aster | Auteur(s) Organisme(s) | Description des modifications |
|---|---|---|
| 5 | X.Desroches EDF-R&D/AMA | Texte initial |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)