Efforts extérieurs de pression en grands déplacements

Résumé :

Un chargement de pression en grands déplacements est un chargement suiveur. En employant des éléments de peau, on est amené à calculer, d'une part, un second membre dont le calcul est proche de celui en petits déplacements, et d'autre part, un terme de rigidité supplémentaire qui n'est, en général, pas symétrique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1 Introduction....3
2 Écriture continue du problème....3
2.1 Éléments de cinématique en grandes transformations....3
2.2 Travail virtuel des efforts extérieurs de pression....3
2.3 Variation du travail virtuel des efforts extérieurs de pression....4
2.4 Adoption d'un paramétrage curviligne de la surface....5
2.5 Cas particulier d'une structure soumise à une pression interne ou externe constante...6
3 Discrétisation....7
3.1 Introduction dans Code_Aster....7
3.2 Discrétisation des termes de géométrie différentielle....7
3.3 Vecteur des forces suiveuses....7
3.4 Matrice des forces suiveuses....8
3.5 Choix de la matrice....8
4 Bibliographie....9

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

La prise en compte de chargements de type pression (mot-clé PRES_REP dans la commande AFFE_CHAR_MECA [U4.44.01]) pose un certain nombre de difficultés en l'absence de l'hypothèse de petits déplacements. En effet, à la différence des charges mortes évoquées dans [R5.03.01], la pression dépend des déplacements puisqu'il s'agit d'un effort dont la direction est normale au domaine ; on parle alors de forces suiveuses, activées par le mot-clé TYPE_CHARGE='SUIV' dans la commande STAT_NON_LINE [U4.51.03]. Néanmoins, le choix de la configuration actuelle comme configuration de référence (lagrangien actualisé) conduit à des expressions simples - moyennant quelques notions de géométrie différentielle - du travail des efforts de pression et de sa variation première par rapport au déplacement, cette dernière étant une forme bilinéaire non symétrique.

2 Écriture continue du problème

2.1 Éléments de cinématique en grandes transformations

On considère un solide Ω soumis à des grandes déformations (voir figure 2-1). Soit $\boldsymbol{F}$ le tenseur gradient de la transformation ϕ faisant passer la configuration initiale Ω_0 à la configuration actuelle déformée Ω_t. On note $\boldsymbol{X}$ la position d'un point dans Ω_0 et $\boldsymbol{x}$ la position de ce même point après déformation dans Ω_t. $\boldsymbol{u}$ est alors le déplacement entre les deux configurations. On a donc :

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{u} \tag{1}$$

Le tenseur gradient de la transformation s'écrit :

$$\boldsymbol{F}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}=\boldsymbol{I}+\nabla\times\boldsymbol{u} \tag{2}$$

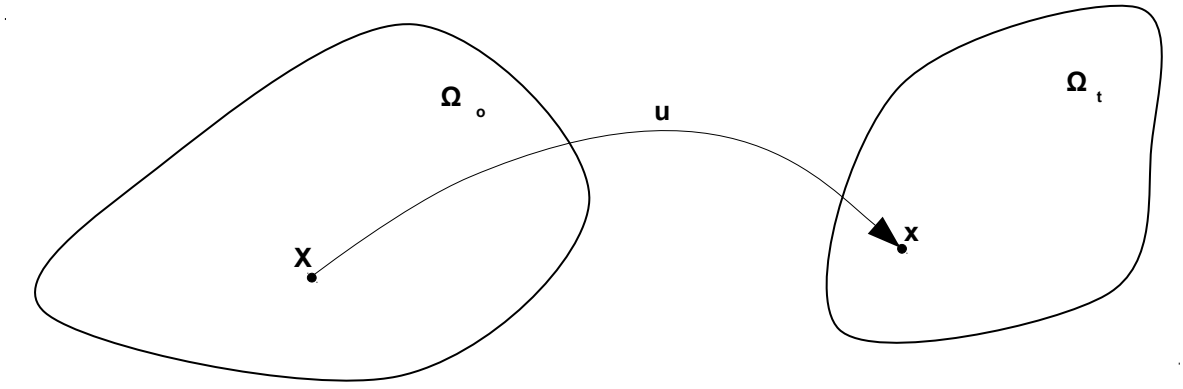


Figure 2-1: Solide en grandes transformations

2.2 Travail virtuel des efforts extérieurs de pression

On considère une pression P normale à la surface dans la configuration de référence. Cette pression s'écrit p dans la configuration actuelle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

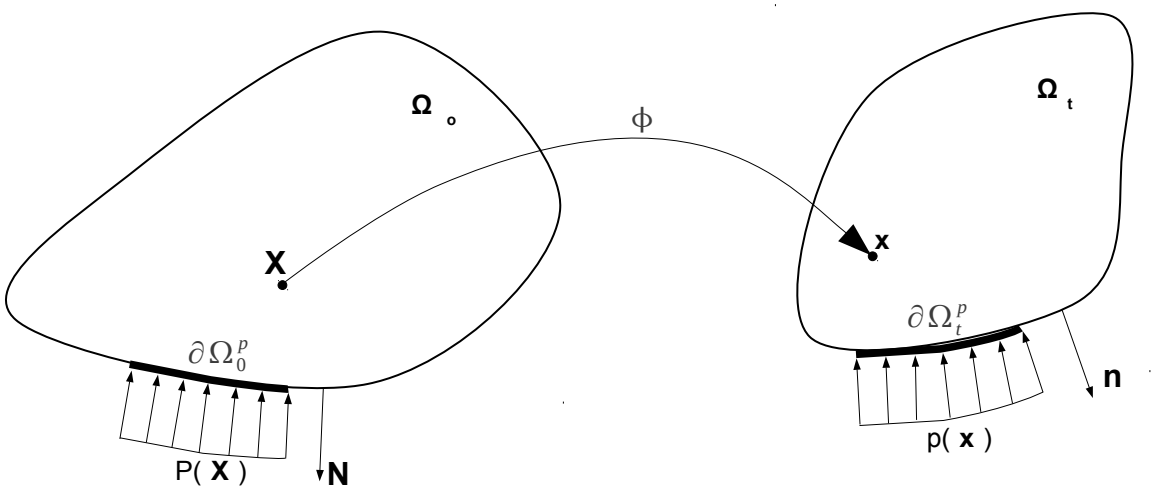


Figure 2-2: Configuration de référence et configuration actuelle

Dans la configuration actuelle, le travail virtuel des efforts extérieurs de pression W^p s'écrit simplement (voir figure 2-2) :

$$W^p(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{v} = \int_{\partial\Omega_t^p(\boldsymbol{u})} -p.\boldsymbol{n}.\delta\boldsymbol{v}.ds \tag{3}$$

De plus, on suppose dorénavant que la valeur de la pression ne dépend pas explicitement du déplacement mais seulement du point matériel d'application :

$$p(\boldsymbol{x}) = P\left(\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X})\right) \tag{4}$$

Le coté suiveur de la force vient de la dépendance de la *normale* au déplacement. Dans ce cas, on peut alors exprimer le travail virtuel des efforts de pression dans la configuration de référence (changement de variable dans l'intégrale) :

$$W^p(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{v} = \int_{\partial\Omega_0^p} -P\det(\boldsymbol{F})\left[\boldsymbol{F}^{-T}.\boldsymbol{N}\right].\delta\boldsymbol{v}\left(\varphi(\boldsymbol{X})\right).dS \tag{5}$$

Sur le plan pratique, on utilisera la formule (3) pour calculer le travail des efforts de pression. Toutefois, la formule (5) est la mieux adaptée à une dérivation par rapport au déplacement, dont on va voir la nécessité au paragraphe suivant.

2.3 Variation du travail virtuel des efforts extérieurs de pression

Dans l'optique d'une résolution du problème d'équilibre de la structure par une méthode de Newton, on est amené à exprimer la variation du travail virtuel des efforts extérieurs de pression par rapport au déplacement, de manière similaire à ce qui a été fait pour le travail virtuel des efforts intérieurs dans [R5.03.01]. Le domaine d'intégration étant fixe dans l'expression (5), la dérivation sous le signe somme est licite, (cf. [2]) :

$$\frac{\partial W^p(\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}.\delta\boldsymbol{u}.\delta\boldsymbol{v} = \int_{\partial\Omega_0^p} -P.\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{u}}\left[\det(\boldsymbol{F}).\boldsymbol{F}^{-T}\right].\delta\boldsymbol{u}.\boldsymbol{N}.\delta\boldsymbol{v}.dS \tag{6}$$

Nous décidons de choisir comme configuration de référence la configuration actuelle, pour laquelle $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}$. Ce choix conduit à une expression simple de la dérivée du terme entre crochets :

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{u}}\left[\det(\boldsymbol{F}).\boldsymbol{F}^{-T}\right].\delta\boldsymbol{u} = \mathrm{div}\,(\delta\boldsymbol{u}).\boldsymbol{I} - \nabla^T\times\delta\boldsymbol{u} \tag{7}$$

Finalement, la variation du travail virtuel des efforts extérieurs de pression s'écrit dans la configuration actuelle :

$$\frac{\partial W^p(\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}.\delta\boldsymbol{u}.\delta\boldsymbol{v} = \int_{\partial\Omega_t^p(\boldsymbol{u})} -p.\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{u}}\left[\mathrm{div}\,(\delta\boldsymbol{u}).\boldsymbol{I} - \nabla^T\times\delta\boldsymbol{u}\right].\boldsymbol{n}.\delta\boldsymbol{v}.ds \tag{8}$$

Dans l'expression (8) subsiste une difficulté. En effet, on s'attend à obtenir une grandeur essentiellement surfacique alors que l'intégrande fait apparaître des termes de dérivation normale à la surface. Autrement dit, il

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

faut connaître l'expression des déplacements virtuels non seulement sur la surface du domaine mais aussi à l'intérieur de celui-ci (dans un voisinage de la surface pour pouvoir exprimer les dérivées normales). Cet inconvénient n'est pas anodin puisque dans *Code_Aster*, pour calculer les termes élémentaires dus aux efforts surfaciques, on emploie des éléments de peau pour lesquels une variation normale n'a pas de sens.

2.4 Adoption d'un paramétrage curviligne de la surface

Pour remédier au problème mentionné précédemment, il faut chercher à exprimer la relation (8) à l'aide de grandeurs surfaciques uniquement. Pour cela, on a recours à des éléments de géométrie différentielle, [1], dont on adopte les notations (en particulier, on adopte la convention de sommation des indices répétés où les indices grecs prennent les valeurs 1 et 2 tandis que les indices latins prennent les valeurs 1 à 3).

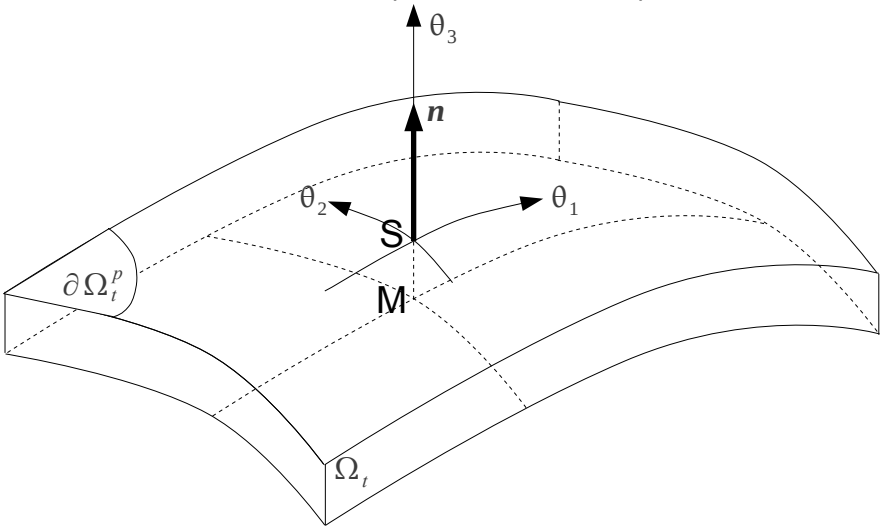


Figure 2-3: Paramétrage curviligne du voisinage de la surface soumise à la pression

Soit (θ^1, θ^2) un paramétrage admissible de la surface. Pour décrire le volume constitué d'un voisinage de cette surface, on lui adjoint une troisième variable, θ^3, qui mesure la progression suivant la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ en (θ^1, θ^2). On a ainsi (voir figure 2-3) :

$$\boldsymbol{OM}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \boldsymbol{OS}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 . \boldsymbol{n}(\theta^1, \theta^2) \tag{9}$$

Avec ce choix de paramétrage, la base naturelle covariante $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$ s'écrit :

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial \theta^i} \tag{10}$$

Tandis que le tenseur métrique $\boldsymbol{g}$ vaut :

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i . \boldsymbol{g}_j = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dans ce paramétrage curviligne, l'intégrande (8) a pour expression :

$$-p . g_{ij} . n^i . \left[\delta u^k|_k . \delta v^j - \delta u^j|_k . \delta v^k \right] \tag{12}$$

Ce terme se simplifie considérablement. En effet, on peut déjà noter que lorsque $j = k$, le terme entre crochet est nul. En outre, dans le système curviligne adopté, les composantes contravariantes de $\boldsymbol{n}$ sont :

$$n^1 = 0, n^2 = 0, n^3 = 1 \tag{13}$$

Enfin, en tenant compte de la forme particulière de $\mathbf{g}$ (c'est-à-dire $g_{13} = 0$, $g_{23} = 0$ et $g_{33} = 1$), la variation du travail s'écrit simplement :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial W^p(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}.\delta \boldsymbol{u}.\delta \boldsymbol{v}=\int_{\partial\Omega_t^p(\boldsymbol{u})} -p.\left[\delta u^{\alpha}|_{\alpha}.\delta v^3-\delta u^3|_{\alpha}.\delta v^{\alpha}\right].ds \tag{14}$$

Sur cette expression, on constate que seuls interviennent des opérateurs différentiels surfaciques (dérivation covariante par rapport à θ^1 et θ^2 seulement), ce qui est bien le but recherché. En introduisant la base contravariante $\left(\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3=\boldsymbol{n}\right)$, appelée aussi base duale et qui s'exprime à partir de la base covariante par:

$$\boldsymbol{g}^i=\left[\boldsymbol{g}^{-1}\right]^{ij}.\boldsymbol{g}_j \tag{15}$$

On peut s'affranchir des composantes curvilignes :

$$\frac{\partial W^p(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}.\delta \boldsymbol{u}.\delta \boldsymbol{v}=\int_{\partial\Omega_t^p(\boldsymbol{u})} -p.\left[\left(\frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial \theta^{\alpha}}.\boldsymbol{g}^{\alpha}\right).(\delta \boldsymbol{v}.\boldsymbol{n})-\left(\frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial \theta^{\alpha}}.\boldsymbol{n}\right).(\delta \boldsymbol{v}.\boldsymbol{g}^{\alpha})\right].ds \tag{16}$$

C'est dorénavant l'expression (16) qui sera utilisée pour calculer la variation du travail virtuel des efforts de pression.

2.5 Cas particulier d'une structure soumise à une pression interne ou externe constante

Dans le cas particulier d'une pression constante dans une cavité (voir figure 2-4), on montre que les efforts de pression dérivent d'un potentiel Ξ qui n'est autre que le produit de la pression par le volume de la cavité. Ce résultat s'étend au cas d'une structure plongée dans un fluide à pression constante.

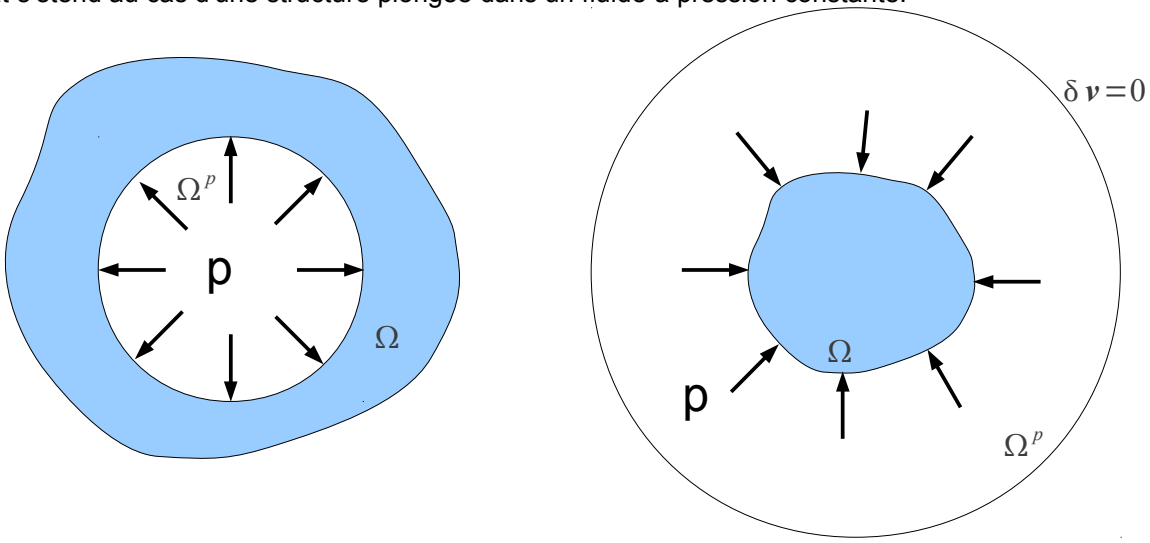


Figure 2-4: Structure sous pression interne ou externe constante

On écrit ce potentiel :

$$\Xi=p.\int_{\partial\Omega_t^p} d\Omega_t=p.\int_{\partial\Omega_0^p} \det \boldsymbol{F}.d\Omega_0 \tag{17}$$

A nouveau, on choisit comme configuration de référence la configuration actuelle. La variation de Ξ conduit alors bien au travail virtuel des efforts extérieurs de pression :

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \boldsymbol{u}}.\delta \boldsymbol{v}=p.\int_{\Omega_t^p} \operatorname{div}(\delta \boldsymbol{v}).d\Omega_t=-\int_{\partial\Omega_t^p} p.\delta \boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}.ds=W_p.\delta \boldsymbol{v} \tag{18}$$

Dans ce cas particulier, la variation du travail virtuel est aussi la seconde variation du potentiel Ξ, c'est-à-dire une forme bilinéaire **symétrique** :

$$\frac{\partial W^p(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}.\delta \boldsymbol{u}.\delta \boldsymbol{v}=\frac{\partial^2 \Xi(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^2}.\delta \boldsymbol{u}.\delta \boldsymbol{v} \tag{19}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Discrétisation

3.1 Introduction dans *Code_Aster*

Dans *Code_Aster*, des éléments finis de peau (éléments surfaciques plongés dans un espace tridimensionnel) sont employés pour discrétiser les déplacements réels et virtuels intervenant dans des expressions surfaciques telles que (3) et (16). Ces dernières permettent d'exprimer respectivement le vecteur second membre et la matrice de rigidité dus à la pression, dont l'emploi par l'algorithme de STAT_NON_LINE est précisé en [R5.03.01]
On développe donc quatre options :

1. RIGI_MECA_PRSU_R : matrice de rigidité pour une pression suiveuse comme constante réelle
2. RIGI_MECA_PRSU_F : matrice de rigidité pour une pression suiveuse comme fonction réelle
3. CHAR_MECA_PRSU_R : vecteur second membre pour une pression suiveuse comme constante réelle
4. CHAR_MECA_PRSU_F : vecteur second membre pour une pression suiveuse comme fonction réelle

Ces options sont développées pour les éléments 3D, D_PLAN et AXIS. On peut appliquer une pression suiveuse normale mais pas de cisaillement tangent suiveur. La pression peut être une fonction réelle du temps ou une constante réelle.

3.2 Discrétisation des termes de géométrie différentielle

Les deux premiers vecteurs de la base covariante $\left\{\boldsymbol{G}_{\alpha=1,2}\right\}$ se calcule à partir du déplacement et des dérivées des fonctions de forme $\left[\boldsymbol{B}_{\alpha}\right]$:

$$\left\{\boldsymbol{G}_{\alpha}\right\}=\left[\boldsymbol{B}_{\alpha}\right].\left\{\boldsymbol{u}\right\} \tag{20}$$

La normale $\left\{\boldsymbol{N}\right\}$ est calculé comme le produit vectoriel de ces deux premiers vecteurs $\left\{\boldsymbol{G}_{\alpha=1,2}\right\}$:

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{g}_1\wedge\boldsymbol{g}_2}{\left\|\boldsymbol{g}_1\wedge\boldsymbol{g}_2\right\|} \tag{21}$$

On peut aussi calculer le tenseur métrique $\left[\boldsymbol{G}_{\alpha\beta}\right]$:

$$\left[\boldsymbol{G}_{\alpha\beta}\right]=\left\{\boldsymbol{G}_{\alpha}\right\}\left\langle\boldsymbol{G}_{\beta}\right\rangle \tag{22}$$

E t son jacobien :

$$J=\det\left[\boldsymbol{G}_{\alpha\beta}\right] \tag{23}$$

On peut calculer la matrice métrique contravariante :

$$\left[\boldsymbol{G}^{\delta\gamma}\right]=\left[\boldsymbol{G}_{\alpha\beta}\right]^{-1} \tag{24}$$

Et finalement extraire la base contravariante $\left\{\boldsymbol{G}^{\delta}\right\}$:

$$\left\{\boldsymbol{G}^{\delta}\right\}=\left[\boldsymbol{G}^{\delta\gamma}\right]\left\{\boldsymbol{G}_{\alpha}\right\} \tag{25}$$

3.3 Vecteur des forces suiveuses

Le calcul du travail virtuel des efforts de pression (3) est en fait identique à celui effectué en petits déplacements, moyennant une réactualisation préalable de la géométrie. On part de l'expression des travaux virtuels :

$$W^{p}\left(\boldsymbol{u}\right).\delta\boldsymbol{v}=\int_{\partial\Omega_t^{p}\left(\boldsymbol{u}\right)}-p.\boldsymbol{n}.\delta\boldsymbol{v}.ds \tag{26}$$

Sous forme discrétisée :

$$W_{p}\left(\boldsymbol{u}\right).\delta\boldsymbol{v}=\left\langle\delta\boldsymbol{V}\right\rangle\left\{F^{p}\left(\boldsymbol{u}\right)\right\} \tag{27}$$

La variation des déplacements s'écrit à partir des fonctions de forme :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\delta \boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{\varphi} \rangle . \{ \delta \boldsymbol{V} \} \tag{28}$$

On a discrétisé tous les termes de géométrie différentielle dans le paragraphe précédent, il ne nous reste plus qu'à discrétiser l'intégrale en utilisant un schéma de Gauss avec les poids $\omega_{i_{pg}}$:

$$\int_{\partial \Omega_t^p(\boldsymbol{u})} A.\, ds = \sum_{i_{pg}} A_{\xi_{pg}} . \omega_{i_{pg}} \tag{29}$$

Les schémas d'intégration utilisés sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Maille géométrique	Schéma de Gauss (voir [R3.01.01])
3D	
TRIA3	FPG3
TRIA6	FPG4
QUAD4	FPG4
QUAD8	FPG9
QUAD9	FPG9
D_PLAN	
SEG2	FPG2
SEG3	FPG4
AXIS	
SEG2	FPG2
SEG3	FPG4

Dans *Code_Aster*, la pression p donnée par AFFE_CHAR_MECA est localisée aux nœuds, on doit donc par interpoler la pression p des nœuds $p^{i_{\text{no}}}$ vers le point de Gauss $p_{\xi_{pg}}$:

$$p_{\xi_{pg}} = \sum_{i_{\text{no}}} N^{i_{\text{no}}}_{\xi_{pg}} . p^{i_{\text{no}}} \tag{30}$$

Finalement :

$$\{ F^p(\boldsymbol{u}) \} = - \sum_{i_{pg}} p_{\xi_{pg}} . \omega_{i_{pg}} . n_{\xi_{pg}} . J_{\xi_{pg}} . \{ \boldsymbol{\varphi}_{\xi_{pg}} \} \tag{31}$$

3.4 Matrice des forces suiveuses

Le calcul de la variation du travail virtuel des efforts de pression (16) vaut :

$$\frac{\partial W^p(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} . \delta \boldsymbol{u} . \delta \boldsymbol{v} = \int_{\partial \Omega_t^p(\boldsymbol{u})} - p . \left[\left(\frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial \theta^\alpha} . \boldsymbol{g}^\alpha \right) . (\delta \boldsymbol{v} . \boldsymbol{n}) - \left(\frac{\partial \delta \boldsymbol{u}}{\partial \theta^\alpha} . \boldsymbol{n} \right) . (\delta \boldsymbol{v} . \boldsymbol{g}^\alpha) \right] . ds \tag{32}$$

Il permet d'extraire la matrice tangente des forces suiveuses :

$$\frac{\partial W^p(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} . \delta \boldsymbol{u} . \delta \boldsymbol{v} = \langle \delta \boldsymbol{V} \rangle \left[- \boldsymbol{K}^p(\boldsymbol{u}) \right] \{ \delta \boldsymbol{U} \} \tag{33}$$

Le signe moins vient du fait que la contribution de la matrice est au premier membre.

Finalement :

$$\left[\boldsymbol{K}^p(\boldsymbol{u}) \right] = \sum_{i_{pg}} p_{\xi_{pg}} . \omega_{i_{pg}} . J_{\xi_{pg}} . \left[\boldsymbol{B}_{\xi_{pg}} \right]^T . \left(\left\{ \boldsymbol{G}^{\delta}{}_{\xi_{pg}} \right\} . \langle \boldsymbol{n}_{\xi_{pg}} \rangle - \{ \boldsymbol{n}_{\xi_{pg}} \} . \langle \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{\delta}}{}_{\xi_{pg}} \rangle \right) . \left[\boldsymbol{\varphi}_{\xi_{pg}} \right] \tag{34}$$

3.5 Choix de la matrice

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En général, la matrice n'est **pas symétrique** (sauf cas particulier d'une structure soumise à une pression interne ou externe constante, cf. §2.5). On constate également en pratique, que pour de fortes variations de la géométrie (en utilisant un comportement hyper-élastique en grandes déformations comme ELAS_HYPER), le fait de symétriser cette matrice n'est pas une bonne stratégie (échec de la convergence). On décide donc de garder cette matrice non-symétrique, malgré le (léger) surcoût induit par la factorisation d'une telle matrice.

4 Bibliographie

[1] « Foundations of solid mechanics », Fung Y. C., Prentice Hall. 1965, pp 31-57.

[2] « Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode thêta », Mialon P., EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches - Série C - n° 3. 1988, pp 1-28.

Historique des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3	E.Lorentz	Texte initial
11	**M.Abbas**	Utilisation systématique de la matrice non-symétrique, harmonisation des notations, notes sur la discrétisation, nouvelles figures

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)