Dualisation des conditions aux limites

Résumé :

On explique le principe des **multiplicateurs de Lagrange** pour **résoudre les systèmes linéaires sous contraintes affines** issues de l'imposition des conditions aux limites de type cinématique. La matrice de rigidité obtenue n'étant plus définie positive, certains algorithmes de résolution deviennent donc inutilisables. On cherche donc une technique pour pouvoir continuer à utiliser l'algorithme de factorisation LDL^T **sans permutation et sans élimination**. La technique proposée est celle des **"doubles Lagrange"** (utilisée dans le code Castem2000). On démontre que cette technique est efficace. On donne quelques indications sur le conditionnement des matrices obtenues par cette technique.

Le problème de la recherche des **modes propres** des **systèmes contraints** est ensuite examiné. On montre qu'une solution possible est d'ajouter les conditions aux limites dualisées à la matrice de "rigidité" et de ne pas toucher à la matrice de "masse".

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Dualisation des conditions aux limites cinématiques, principe des multiplicateurs de Lagrange....3
3 Inconvénients de cette dualisation....7
4 Principe des "doubles Lagrange"....10
5 Avantage supplémentaire....13
6 Remarque sur le conditionnement du système....14
7 Modes propres et paramètres de Lagrange....16
7.1 Introduction....16
7.2 Problème mécanique à résoudre....16
7.3 Système réduit....16
7.4 Système Dualisé....19
7.5 Exemple....21
7.6 Conclusions....23
8 Description des versions du document....23

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce document à la dualisation des conditions aux limites (dites cinématiques). Deux problèmes distincts d'algèbre linéaire sont examinés :

- la résolution des systèmes linéaires : paragraphes 2, 3, 4, 5, 6,
- la recherche des modes propres : paragraphe 7.

2 Dualisation des conditions aux limites cinématiques, principe des multiplicateurs de Lagrange

Dans *Code_Aster* (comme dans les autres codes d'éléments finis), on est amené à résoudre de nombreux systèmes linéaires.

Souvent un tel système peut être considéré comme l'expression algébrique d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique positive $J(u)$ où u appartient à $\mathbb{R}^n$ ou n est le nombre d'inconnues nodales tout en étant contraint par un certain nombre de relations affines $C_i(u)-d_i=0$ (conditions aux limites de type Dirichlet).

C'est à ce problème de minimisation sous contraintes affines que l'on s'intéresse ici. Dans la suite du document, on prendra comme exemple le cas (et le vocabulaire) de la mécanique statique linéaire. On parlera de matrice de rigidité, de vecteur déplacement, … mais la technique proposée reste valable pour les problèmes d'évolution thermique, en linéaire ou non-linéaire.

Soit le problème discrétisé :

$$\text{Pb1} : \left\{ \min_{\mathbf{u} \in V \subset \mathbb{R}^n} J(\mathbf{u}) \right.$$

où :

- $J(\mathbf{u})$ est une forme quadratique (Energie potentielle totale)

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Au},\mathbf{u}) - (\mathbf{b},\mathbf{u})$$

  $\mathbf{A}$ est une matrice symétrique positive $\left((\mathbf{Au},\mathbf{u}) \geq 0 \ \forall \mathbf{u}\right)$ mais pas forcément définie ($\mathbf{Au}=0$ est possible pour $\mathbf{u} \neq 0$)

- V est l'espace des déplacements cinématiquement admissibles
  (c'est un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$).

Ce problème discret est résolu numériquement en exprimant que la "dérivée" de $J(\mathbf{u})$ dans V est nulle. On est alors ramené à résoudre un système linéaire d'équations.
Le problème est de "dériver" $J(\mathbf{u})$ dans $V \subset \mathbb{R}^n$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En général, pour des raisons pratiques, l'expression de $J(\mathbf{u})$ est calculée dans la base de tous les déplacements nodaux (sans tenir compte des contraintes) : $\mathbf{u}$ appartient alors à $\mathbb{R}^n$ où n est le nombre total d'inconnues nodales.

Si V est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(n-p)$ des déplacements nodaux de base, la dérivation de $J(\mathbf{u})$ dans V se fait très simplement : il suffit d'"oublier" dans les matrices A et b les lignes et colonnes correspondants aux ddl supprimés $(u_i=0)$.

Si les degrés de liberté contraints ne sont pas mis à zéro mais affectés à une valeur donnée : $u_i=d_i$, il faut modifier $\mathbf{b}$.

Enfin si les contraintes "mixent" les ddl entre eux (relations linéaires entre inconnues) il faut modifier $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$.

Le principe des multiplicateurs de Lagrange permet de résoudre le problème sans toucher aux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$. Le prix à payer est une augmentation du nombre d'inconnues dans le système à résoudre.

Au lieu de résoudre le problème dans l'espace V de dimension $n-p$, on le résout dans l'espace $\mathbb{R}^{n+p}$, les inconnues supplémentaires notées λ_i étant appelées multiplicateurs de Lagrange.

Principe et justification

Reprenons le problème précédent en explicitant l'espace V

Problème 1 :

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{u}\in V} J(\mathbf{u}) \\ J(\mathbf{u})=\frac{1}{2}(\mathbf{Au},\mathbf{u})-(\mathbf{b},\mathbf{u}) \\ V=\{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n / C_i(\mathbf{u})=d_i,\ \forall i=1,p\} \end{cases}$$

Les C_i sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, les d_i sont des constantes données. On suppose de plus que les p formes C_i sont indépendantes entre elles : la dimension de l'espace engendré par les C_i est p .

On peut montrer (Cf. [Annexe 1]) que ce problème est équivalent au suivant :

Problème 2 :

$$\begin{cases} \text{trouver } \mathbf{u}\in\mathbf{V} \text{ où} \\ \mathbf{V}=\{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n / C_i(\mathbf{u})=d_i,\ \forall i=1,p\} \\ \text{tel que } (\mathbf{Au}-\mathbf{b})(\mathbf{v})=0\ \forall\ v\in\mathbf{V_0} \text{ où} \\ \mathbf{V_0}=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } C_i(\mathbf{v})=0\ \forall i=1,p\} \end{cases}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Réécrivons le problème 2 autrement :

Problème 3 :

trouver $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall i \quad \mathbf{C_i u}-\mathbf{d_i}=0 \qquad \textbf{éq 2-1}$$

$$\forall \mathbf{v}\in V_0, \mathbf{C_i v}=0 \qquad \textbf{éq 2-2}$$

$$\forall \mathbf{v}\in \mathbf{V_0}, (\mathbf{Au}-\mathbf{b})\mathbf{v}=0 \qquad \textbf{éq 2-3}$$

Les équations [éq 2-2] et [éq 2-3] montrent (en identifiant $\mathbb{R}^n$ et son dual) que :

$(\forall i)\mathbf{C_i}$ est orthogonal à $\mathbf{V_0}$
$(\mathbf{Au}-\mathbf{b})$ est orthogonal à $\mathbf{V_0}$

$\mathbf{V_0}$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à $\{\mathbf{C_i}(i=1,p)\}$ ($\mathbf{V_0}$ est de dimension $(n-p)$ car les p conditions $\mathbf{C_i}$ sont supposées indépendantes).
Puisque la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe de 2 sous espaces orthogonaux est unique, on en déduit que $(\mathbf{Au}-\mathbf{b})$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les C_i.

Il existe donc une famille de scalaires λ_i appelés multiplicateurs de Lagrange tels que :

$$(\mathbf{Au}-\mathbf{b})+\sum_i \lambda_i \mathbf{C_i}=0$$

Cette égalité est vraie dans $\mathbb{R}^n$

Le problème 3 devient alors :

Problème 4 :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } \mathbf{u}\in\mathbb{R}^n \ , \ \lambda_i\in\mathbb{R},(i=1,p)\\ (\forall i=1,p)\mathbf{C_i u}-\mathbf{d_i}=0\\ (\mathbf{Au}-\mathbf{b})+\sum_i \lambda_i \mathbf{C_i}=0\end{array}\right.$$

La réciproque ($Pb4\Rightarrow Pb3$) est évidente : s'il existe des λ_i tels que :

$$(\mathbf{Au}-\mathbf{b})+\sum_i \lambda_i \mathbf{C_i}=0 \quad \text{alors} \quad \forall \mathbf{v}\in V_0 (\mathbf{Au}-\mathbf{b})\mathbf{v}=-\sum_i \lambda_i \mathbf{C_i}.\mathbf{v}=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le problème 4 est le problème cherché. On dira que c'est le problème avec conditions cinématiques dualisées. Matriciellement on peut l'écrire :

$$\begin{aligned}&\mathbf{KX}=\mathbf{F}\\&\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{d}\end{bmatrix}\\&\quad(\mathbf{K})\quad(\mathbf{X})\quad(\mathbf{F})\end{aligned} \qquad \textbf{éq 2-4}$$

où :

$$\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{n};\lambda\in\mathbb{R}^{p};\mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n+p}$$
$$\mathbf{A}\in\mathbf{A}_{n,n};\mathbf{C}\in\mathbf{A}_{p,n};\mathbf{K}\in\mathbf{A}_{n+p,n+p}$$

On s'aperçoit que ce système peut être obtenu en cherchant à rendre extrémale la fonctionnelle :

$$L(\mathbf{u},\lambda)=\frac{1}{2}(\mathbf{Au},\mathbf{u})-(\mathbf{b},\mathbf{u})+\lambda(\mathbf{Cu}-\mathbf{d}) \qquad \textbf{éq 2-5}$$

Cette fonctionnelle est appelée le Lagrangien du problème initial. L'intérêt principal de cette méthode est de s'affranchir des contraintes : $\mathbf{u}$ et λ sont cherchés dans $\mathbb{R}^{n}$ et $\mathbb{R}^{p}$ ($\mathbf{X}$ dans $\mathbb{R}^{n+p}$).

Les coefficients λ_i sont appelés coefficients de Lagrange du problème (on dira parfois les "Lagrange").

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Inconvénients de cette dualisation

On voit d'après l'expression du Lagrangien que la matrice $\mathbf{K}$ n'est plus positive (ce qui était le cas de $\mathbf{A}$). En effet :

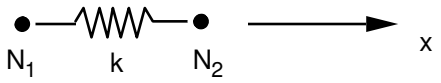
$$\exists \mathbf{u_0} / \mathbf{C}\,\mathbf{u_0} \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda_0 / \mathrm{L}\left(\mathbf{u_0}, \lambda_0\right) ... = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}\mathbf{u_0}, \mathbf{u_0}\right) + \lambda_0 \mathbf{C}\mathbf{u_0} < 0$$

La perte de la positivité de la matrice $\mathbf{K}$ entraîne que la résolution du système $\mathbf{KX}=\mathbf{F}$ ne peut plus se faire en général par les algorithmes classiques de gradient ou, par la factorisation de Cholesky. L'algorithme de factorisation LDL^T sans permutation des lignes et colonnes n'est plus garanti non plus : c'est ce dernier algorithme que l'on veut pouvoir continuer à utiliser.

Illustrons le problème sur l'exemple suivant :

Exemple 1 :

un ressort de raideur k relie 2 nœuds N_1 et N_2



2 inconnues : u_1 , u_2 ; 2 forces modales : f_1 , f_2 $(\mathrm{n}=2)$

$$A = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

1 contrainte : $\alpha u_1 + \beta u_2 = \gamma$ $(\mathrm{p}=1)$

Le problème dualisé s'écrit : $\mathbf{KX}=\mathbf{F}$

avec :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k & \alpha \\ -k & k & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \lambda \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Rappel de la condition nécessaire et suffisante pour que l'algorithme $LDL^T - SP$ (sans permutation) fonctionne :

> Notons $\mathbf{K_i}$ la sous matrice de $\mathbf{K}$ formée des i premières lignes et colonnes de $\mathbf{K}$.
> (Si $\mathbf{K}$ est d'ordre n , $\mathbf{K_n}=\mathbf{K}$, $\mathbf{K_1}=[\mathrm{k}_{11}]$).
> Il n'y aura pas de pivot nul dans l'algorithme $LDL^T - SP$ si et seulement si ($\mathbf{K_i}$ est inversible pour tout i compris entre 1 et n).
> On notera cette condition : `cond1`

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La matrice $\mathbf{K}$ ci-dessus est écrite avec comme numérotation des inconnues, l'ordre des composantes de $\mathbf{X}$:

- $\mathbf{X}=(u_1, u_2, \lambda)$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k & -k & \alpha \\ -k & k & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K_2}=\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$ ne vérifie pas la condition `cond1`.

Sur l'exemple 1 essayons de nouvelles numérotations :

- $\mathbf{X}=(\lambda, u_1, u_2)$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & k & -k \\ \beta & -k & k \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K_1}$ ne vérifie pas la condition `cond1`.

- $\mathbf{X}=(u_1, \lambda, u_2)$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k & \alpha & -k \\ \alpha & 0 & \beta \\ -k & \beta & k \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \det \mathbf{K_1} &= k \\ \det \mathbf{K_2} &= \alpha^2 \\ \det \mathbf{K_3} &= -k(\alpha+\beta)^2 \end{aligned}$$

- k est supposé strictement positif (raideur du ressort)
- $\mathbf{K_3}$ n'est inversible que si $\alpha+\beta\neq 0$. Le cas $\alpha+\beta=0$ correspond en effet à un "mauvais" blocage physique : la condition : $u_1-u_2=\text{cte}$ ne bloque pas les "mouvements de corps rigide" pour $\mathbf{A}$ (sans énergie).

Pour que le problème global ait une solution unique, il faut en effet que les conditions $\mathbf{C_i u}=\mathbf{d_i}$ engendrent un espace de déplacements admissibles qui ne contienne aucun des mouvements de corps rigide de $\mathbf{A}$.
Avec les notations du [§1] on écrira :

$$\ker \mathbf{A} \cap \mathbf{V_0} = (0)$$

On supposera dans la suite du document que cette condition est vérifiée. C'est-à-dire que les contraintes $\mathbf{C_i}$ bloquent au moins les mouvements de corps rigide de $\mathbf{A}$ (elles peuvent être plus nombreuses bien sûr). Lorsque cette condition est vérifiée et que les conditions $\mathbf{C_i}$ sont indépendantes entre elles, on dira que le problème est physiquement bien posé.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $\mathbf{K_2}$ n'est inversible que si $\alpha \neq 0$
  On voit donc que la numérotation (u_1, λ, u_2) vérifie la condition cond1 si $\alpha \neq 0$.
  Si le blocage $\alpha u_1 + \beta u_2 = \gamma$ se réduit à :

$$u_1 = \delta \quad (\alpha, \beta) = (1,0) \rightarrow \text{cela marche}$$
$$u_2 = \delta \quad (\alpha, \beta) = (0,1) \rightarrow \text{cela ne marche pas}$$

La symétrie du problème montre que pour pouvoir traiter le problème $(\alpha, \beta) = (0,1)$ il faut numéroter $X = (u_2, \lambda, u_1)$.

De cet exemple très simple, on peut tirer quelques conclusions générales (toutes négatives) :

- si on numérote tous les λ_i après les u_i , si $\mathbf{A}$ est singulière, la condition cond1 ne sera pas vérifiée pour $\mathbf{K_i} = \mathbf{A}$,
- soit une condition $\mathbf{Cu} = \mathbf{d}$ et λ le multiplicateur de Lagrange associé. L'équation $\mathbf{Cu} = \mathbf{d}$ ne fait pas en général intervenir toutes les inconnues $\mathbf{u_i}$: l'équation contraint certains degrés de liberté. Si λ est numéroté avant les ddl qu'il contraint la condition cond1 ne sera pas vérifiée. En effet regardons la sous matrice $\mathbf{K_j}$ où j est le numéro de l'équation donnant λ .

$$\mathbf{K_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_{j-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- Soit une structure physique qui, par malchance, est "retenue par son dernier ddl physique" c'est-à-dire telle que si on ne bloque pas ce ddl, la matrice est singulière, et telle que si on le bloque la matrice est inversible. L'utilisation d'un degré de liberté de Lagrange λ pour ce blocage est impossible. En effet, si on numérote λ avant le dernier degré de liberté physique, il y aura un pivot nul au niveau de λ , et si on le numérote après (donc en tout dernier degré de liberté), la matrice $\mathbf{K_{n-1}}$ ne sera pas inversible puisque le blocage n'est pas encore pris en compte. On verra au [§4] que la technique des "double lagrange" permet de résoudre ce problème.

Pour finir ce paragraphe nous pouvons faire la remarque suivante : Si $\mathbf{K}$ est inversible, on sait qu'il existe une numérotation des inconnues permettant de factoriser $\mathbf{K}$ par LDL^T. Cette numérotation est par exemple celle résultant de l'algorithme LDL^T avec permutation (pivot maximal par exemple). Mais cette renumérotation ne concerne que les lignes de la matrice ; il y a donc perte de la symétrie de $\mathbf{K}$. Il suffit de considérer l'exemple suivant :

Exemple 2 :

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{A} = [0] \\ C = [1] \end{matrix}\right\} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}$ est inversible, mais il n'existe aucune permutation commune des lignes et colonnes $\mathbf{K}$ de permettant une résolution par LDL^T .

Toutes ces remarques montrent que la dualisation proposée dans ce paragraphe ne permet pas d'utiliser $LDL^T - SP$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Principe des "doubles Lagrange"

La méthode proposée ici est celle mise en œuvre dans le code CASTEM 2000 (communication personnelle de Th. CHARRAS et P. VERPEAUX). Une présentation intuitive pourrait en être la suivante :

On voit que le problème dualisé [éq 2-4] a des termes nuls sur la diagonale : ceux correspondants aux degrés de liberté de Lagrange. Cette propriété se remarque aussi sur le Lagrangien [éq 2-5] : il n'y a pas de termes quadratiques en λ .

Cette nullité des termes diagonaux empêche certaines permutations de lignes et colonnes : on ne peut placer un Lagrange avant les degrés de liberté physiques qu'il contraint.

L'idée est alors de décomposer chaque coefficient de Lagrange λ en 2 parties égales λ^1 et λ^2. L'équation $\mathbf{Cu}=\mathbf{d}$ est alors remplacée par :

$$\mathbf{Cu}-\alpha\left(\lambda^1-\lambda^2\right)=\mathbf{d}$$
$$\mathbf{Cu}+\alpha\left(\lambda^1-\lambda^2\right)=\mathbf{d}$$

où α est une constante non nulle.

Montrons l'équivalence de l'ancien problème et du nouveau :

Problème 1 : "simple Lagrange"

$$\text{trouver } \begin{cases}\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n\\ \lambda\in\mathbb{R}^p\end{cases} \text{ tels que } (S):\begin{cases}\mathbf{Au}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\lambda=\mathbf{b}\\ \mathbf{Cu}=\mathbf{d}\end{cases}$$

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda^1=\lambda^2\\ \lambda=\lambda^1+\lambda^2\\ \mathbf{Au}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\lambda=\mathbf{b}\\ \mathbf{Cu}=\mathbf{d}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{Au}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\lambda^1+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\lambda^2=\mathbf{b}\\ \mathbf{Cu}-\alpha\lambda^1+\alpha\lambda^2=\mathbf{d}\\ \mathbf{Cu}+\alpha\lambda^1-\alpha\lambda^2=\mathbf{d}\end{cases}$$

α est une constante $\neq 0$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D'où le problème équivalent au précédent :

Problème 2 : "double Lagrange"

$$\text{trouver } \begin{cases}\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n\\ \lambda^1,\lambda^2\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\end{cases} \text{ tels que } (\mathrm{S}'):\begin{cases}\mathbf{Au}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\lambda^1+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\lambda^2=\mathbf{b}\\ \mathbf{Cu}-\alpha\lambda^I+\alpha\lambda^2=\mathbf{d}\\ \mathbf{Cu}+\alpha\lambda^I-\alpha\lambda^2=\mathbf{d}\end{cases}$$

Le nouveau problème peut s'écrire :

$$\mathbf{K'X'}=\mathbf{F'}$$

avec :

$$\begin{cases}\mathbf{X}'=(\mathbf{u},\lambda_1,\lambda_2)\\ \mathbf{F'}=(\mathbf{b},\mathbf{d},\mathbf{d})\end{cases}$$

$$\mathbf{K'}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C} & -\alpha\mathbf{I} & \alpha\mathbf{I}\\ \mathbf{C} & \alpha\mathbf{I} & -\alpha\mathbf{I}\end{bmatrix}$$

Le problème correspond à rendre extrémale la fonctionnelle :

$$L'(\mathbf{u},\lambda^1,\lambda^2)=\frac{1}{2}(\mathbf{Au},\mathbf{u})-(\mathbf{b},\mathbf{u})+(\lambda^1,\mathbf{Cu}-\mathbf{d})$$
$$+(\lambda^2,\mathbf{Cu}-\mathbf{d})-\frac{\alpha}{2}(\lambda^1-\lambda^2,\lambda^1-\lambda^2)$$

On peut montrer (Cf Annexe 2) que si on observe une certaine règle de numérotation des inconnues, et en choisissant la constante $\alpha>0$, la matrice $\mathbf{K'}$ vérifie la condition `cond1`.

Cette règle est la suivante :

Soit une relation de blocage $\mathbf{Cu}-\mathbf{d}=0$, il lui correspond 2 multiplicateurs de Lagrange λ^1 et λ^2 . Cette relation fait intervenir un certain nombre de degrés de liberté physiques.

Règle R_0 :

Pour chaque relation de blocage, il faut placer λ^1 avant le premier degré de liberté physique contraint et λ^2 après le dernier degré de liberté physique contraint.

Pour diminuer l'occupation mémoire de la matrice $\mathbf{K}$, il faut chercher à minimiser la largeur de bande. C'est ce que l'on fait dans *Code_Aster* en "encadrant" les relations "au plus près" : λ^1 est placé juste avant le premier degré de liberté contraint, λ^2 est placé juste après le dernier ddl contraint.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Illustration :

Soit un problème à 4 degrés de liberté physiques : u_1, u_2, u_3, u_4 .
Ce système est soumis à 2 conditions :

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{13}u_3 = b_1 \\ a_{22}u_2 + a_{24}u_4 = b_2 \end{cases}$$

appelons λ_1^1, λ_1^2 les 2 degrés de liberté de Lagrange associés à la 1ère condition et λ_2^1, λ_2^2 ceux associés à la 2ème condition.

En supposant que les degrés de liberté physiques aient été numérotés dans l'ordre : u_1, u_2, u_3, u_4 , la numérotation totale des degrés de liberté retenue par *Aster* est alors :

$$\lambda_1^1, u_1, \lambda_2^1, u_2, u_3, \lambda_1^2, u_4, \lambda_2^2$$

λ_1^1 et λ_1^2 encadrent "au plus près" les degrés de liberté contraints (u_1 et u_3)
λ_2^1 et λ_1^2 encadrent "au plus près" les degrés de liberté contraints (u_2 et u_4)

La technique des "doubles Lagrange" associée à la règle R_0 permet donc de résoudre tout système linéaire physiquement bien posé avec l'algorithme de LDL^T sans permutation. La démonstration suppose néanmoins que la **matrice $\mathbf{A}$ soit symétrique et positive** (pas forcément définie).

Remarque :

Les hypothèses : $\mathbf{A}$ symétrique et $\mathbf{A}$ positive sont nécessaires pour utiliser LDL^T (ou LU) sans permutation comme le montrent les deux contre-exemples suivants :

- $\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est symétrique mais non positive,
- $\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ est positive mais non symétrique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Avantage supplémentaire

On va montrer dans ce paragraphe que la technique des "doubles Lagrange" peut permettre de résoudre économiquement une série de problèmes qui ne différeraient que par leurs conditions aux limites cinématiques (par exemple une zone de contact variable).

Remarque :

Cette possibilité n'est pas utilisée actuellement dans le code.

Soit un système avec contraintes $\mathbf{KX}=\mathbf{F}$:
Écrivons ce système en faisant ressortir une contrainte particulière (ce calcul reste évidemment valable lorsqu'il y a plusieurs contraintes) $\mathbf{Cu}-\mathbf{d}=0$. Pour simplifier l'écriture, on choisit $\alpha=1$.

Soit
- λ^1 le premier degré de liberté de Lagrange associé à la contrainte
- λ^2 le deuxième degré de liberté de Lagrange associé à la contrainte
- $\mathbf{U}=\mathbf{X}-\left(\lambda^1,\lambda^2\right)$
- $\tilde{\mathbf{K}}$ = matrice $\mathbf{K}$ projetée sur $\mathbf{U}$; $\mathbf{b}$ = vecteur $\mathbf{F}$ projeté sur $\mathbf{U}$

Le système s'écrit avec ces variables :

$$\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{C}^{\mathbf{T}} & \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\\ \mathbf{C} & -1 & 1\\ \mathbf{C} & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \lambda^1\\ \lambda^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{d}\\ \mathbf{d}\end{bmatrix}$$

Changeons le coefficient $\left(\lambda^2,\lambda^2\right)$: $-1\rightarrow 3$ et écrivons le nouveau système :

$$(S)\begin{cases}\tilde{\mathbf{K}}\,\mathbf{U}+\left(\lambda^1+\lambda^2\right)\mathbf{C}^{\mathbf{T}}=\mathbf{b} & \left(\lambda^1+\lambda^2\right)=0 & \textbf{éq 5-1}\\ \mathbf{CU}-\lambda^1+\lambda^2=\mathbf{d} & \mathbf{CU}-\lambda^1+\lambda^2=\mathbf{d} & \textbf{éq 5-2}\\ \mathbf{CU}+\lambda^1+3\lambda^2=\mathbf{d} & \tilde{\mathbf{K}}\,\mathbf{U}=\mathbf{b} & \textbf{éq 5-3}\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

Ce dernier système est découplé : on peut résoudre [éq 5-3] pour obtenir $\mathbf{U}$ puis calculer λ^1 et λ^2 .

On remarque que la résolution de [éq 5-3] correspond au problème initial sans la contrainte $\mathbf{Cu}-\mathbf{d}=0$. Les valeurs de λ^1 et λ^2 n'ont alors plus la même signification physique. En d'autres termes, le système (S) a la même solution en $\mathbf{U}$ que le sous-système $\tilde{\mathbf{K}}\,\mathbf{U}=\mathbf{b}$; les 2 inconnues supplémentaires λ^1 et λ^2 ne perturbent pas la solution en $\mathbf{U}$. Le système total peut paraître de taille supérieure $(+2)$ à ce qui est nécessaire, mais informatiquement, cela peut être très commode

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En effet, imaginons maintenant que nous sachions à l'avance que certaines relations cinématiques sont susceptibles d'être relâchées. Numérotons les λ^2 associés à ces relations en fin de système. Nous pouvons alors trianguler partiellement une fois pour toutes le système en s'arrêtant avant ces ddl. La partie de la matrice triangulée est la plus importante en volume : tous les degrés de liberté physiques et tous les λ^1. Lorsqu'un problème concret se pose, c'est-à-dire lorsque l'on connaît la liste des relations linéaires actives, il suffit de mettre à jour les dernières lignes de la matrice ($-\alpha$ si la relation est active, $+3\alpha$ si elle ne l'est pas). On peut alors terminer la triangulation et résoudre le problème économiquement.

6 Remarque sur le conditionnement du système

Lorsque l'on regarde l'expression de la matrice que l'on va finalement factoriser $\mathbf{K'}$ (Cf. [§3]), on voit que ses différentes sous-matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\alpha\mathbf{I}$ peuvent être d'ordre de grandeur très différents. On sait qu'en général cette situation n'est pas favorable numériquement (précision limitée des ordinateurs).

Il faut remarquer que les équations de liaison $\mathbf{Cu}-\mathbf{d}=0$ peuvent être multipliées par une constante arbitraire (β) sans changer le problème. De plus, nous avons vu que les matrices $\alpha\mathbf{I}$ étaient également arbitraires $(\alpha>0)$. Nous disposons donc de deux paramètres permettant de "régler" le conditionnement de la matrice.

Nous ne ferons pas de démonstration générale mais nous nous contentons d'examiner le cas le plus trivial qui soit : un ressort, un ddl, une liaison.

La matrice $\mathbf{K'}$ s'écrit si k est la rigidité du ressort :

$$\mathrm{K'}=\begin{bmatrix} k & \beta & \beta \\ \beta & -\alpha & +\alpha \\ \beta & \alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

Le conditionnement de cette matrice est lié à la dispersion de ses valeurs propres m_i :

Calculons le polynôme caractéristique de $\mathbf{K'}$:

$$P(\mu)=(\mu+2\alpha)(-\mu^2+k\mu+2\beta^2)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -2\alpha && <0 \\ \Leftrightarrow \mu_2 &= \frac{+k+\sqrt{k^2+8\beta^2}}{2} && >0 \\ \mu_3 &= \frac{+k-\sqrt{k^2+8\beta^2}}{2} && <0 \end{aligned}$$

k est la valeur propre du système non contraint. Cette valeur propre est l'ordre de grandeur recherché pour μ_1, μ_2, μ_3.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On remarque que $\mu_1<0, \mu_3<0$ et $\mu_2, >0$ c'est-à-dire que les 2 valeurs propres ajoutées par les coefficients de Lagrange sont <0 (c'est d'ailleurs à cause de cela que LDL^T-SP n'est pas garanti sans précautions).

On cherche à obtenir des valeurs propres d'un même ordre de grandeur :

$$|\mu_1|\simeq|\mu_2|\simeq|\mu_3|$$

$$|\mu_2\mu_3|\simeq|\mu_1|^2\Rightarrow 2\beta^2\simeq 4\alpha^2 \qquad \textbf{éq 6-1}$$

Si $\beta<<k$ alors $\mu_3\simeq 0 \quad \mu_2\simeq k$: ce n'est pas le résultat cherché.
Si $\beta>>k$, alors $|\mu_2|\simeq|\mu_3|\simeq\sqrt{2}\,\beta\simeq|\mu_1|$

Les trois valeurs propres sont alors en valeur absolue de l'ordre de β qui est une constante arbitraire très grande devant k . Cette solution n'est pas celle que l'on retiendra car la valeur k est dans le cas général (à grand nombre de degrés de liberté) d'un ordre de grandeur comparable aux autres valeurs propres du système.

On choisira plutôt :

$$\beta=\alpha\simeq k\Rightarrow \quad \begin{aligned}\mu_1&\simeq -2k\\ \mu_2&\simeq 2k\\ \mu_3&\simeq -k\end{aligned}$$

Pratiquement dans *Code_Aster*, on choisit une valeur de α unique pour tout le système. Cette valeur est la moyenne des valeurs extrémales des termes diagonaux associés aux degrés de liberté physiques : $\left(\min\left(a_{ii}\right)+\max\left(a_{ii}\right)\right)/2$. De plus, on prend $\beta=\alpha$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modes propres et paramètres de Lagrange

7.1 Introduction

Ce paragraphe veut répondre aux deux questions suivantes :

Q1 : Quel est le système de valeurs (et vecteurs) propres **réduit** à résoudre lorsqu'un modèle mécanique est soumis à des contraintes cinématiques **linéaires homogènes** ?

Q2 : Quel est le modèle dualisé (avec paramètres de Lagrange) équivalent ou précédent ?

7.2 Problème mécanique à résoudre

On suppose un système mécanique déjà discrétisé par éléments finis.

Les inconnues nodales sont notées $\mathbf{U}=\left(u_i\right)\left(i=1,n\right)$.

Les déplacements nodaux ne sont pas tous indépendants : il existe $p\left(<n\right)$ relations linéaires homogènes entre ces déplacements : $B_j(\mathbf{U})=0\left(j=1,p\right)$.
Ces relations linéaires sont indépendantes entre elles, c'est-à-dire que le rang de la matrice $\mathbf{B}$ contenant les coefficients des p relations linéaires est p.

Soit $\mathbf{K}$ la matrice de rigidité du système mécanique sans contraintes.
Soit $\mathbf{M}$ la matrice de masse du système mécanique sans contraintes.

Quel est le système aux valeurs propres à résoudre pour trouver les modes propres de la structure contrainte ?

7.3 Système réduit

Remarquons que si l'on écrit les relations linéaires cinématiques sous la forme :

$$\mathbf{BU}=0 \qquad \textbf{éq 7.3-1}$$

où : $\mathbf{B}$ est une matrice $p\times n$
$\mathbf{U}$ est le vecteur des inconnues nodales $\in\mathbb{R}^n$

alors :

$$\mathbf{B}\,\dot{\mathbf{U}}=0 \qquad \textbf{éq 7.3-2}$$

et la relation est aussi valable pour les vitesses.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

De plus, si $\mathbf{B}$ est de rang p, alors il existe une sous-matrice **carrée** de $\mathbf{B}$ de rang p. Notons $\mathbf{B_1}$ cette sous-matrice.

Faisons alors une partition des inconnues de $\mathbf{U}$ en $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$ tels que :

$$\mathbf{BU}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\mathbf{B_1} \quad \mathbf{B_2}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{U_1}\\ \mathbf{U_2}\end{bmatrix}=0$$
$$\mathbf{U_1}\in\mathbb{R}^{p}$$
$$\mathbf{U_2}\in\mathbb{R}^{n-p}$$
$$\mathbf{B_1}=\text{matrice } p\times p$$
$$\mathbf{B_2}=\text{matrice } p\times(n-p)$$

Les relations linéaires peuvent alors s'écrire :

$$\mathbf{B_1 U_1}+\mathbf{B_2 U_2}=0$$

ce qui permet d'exprimer les inconnues $\mathbf{U_1}$ en fonction de $\mathbf{U_2}$ puisque $\mathbf{B_1}$ est inversible.

$$\mathbf{U_1}=-\mathbf{B_1^{-1}B_2 U_2} \qquad \textbf{éq 7.3-3}$$

Matrice de rigidité réduite :

L'énergie de déformation élastique de la structure discrétisée non contrainte est $W_{def}=\frac{1}{2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{KU}$. Si l'on partitionne la matrice $\mathbf{K}$ de la même manière que l'on a partitionné $\mathbf{U}$, on obtient :

$$K=\begin{bmatrix}\mathbf{K_1} & \mathbf{K_{12}}\\ \mathbf{K_{12}^{T}} & \mathbf{K_2}\end{bmatrix}$$

alors :

$$2W_{def}=\mathbf{U_1^{T}K_1U_1}+\mathbf{U_2^{T}K_2U_2}+\mathbf{U_2^{T}K_{12}U_1}+\mathbf{U_1^{T}K_{12}^{T}U_2}$$

Introduisons alors les contraintes linéaires [éq 7.3-3] :

$$\begin{aligned}2W_{def}&=\mathbf{U_2^{T}B_2^{T}B_1^{-T}K_1B_1^{-1}B_2U_2}+\mathbf{U_2^{T}K_2U_2}\\&\quad-\mathbf{U_2^{T}K_{12}B_1^{-1}B_2U_2}-\mathbf{U_2^{T}B_2^{T}B_1^{-T}K_{12}^{T}U_2}\\&=\mathbf{U_2^{T}\tilde{K}_2U_2}\end{aligned}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec :

$$\tilde{\mathbf{K}}_2=\mathbf{K}_2+\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{K}_1\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_2-\mathbf{K}_{12}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{K}_{12}^{\mathrm{T}} \qquad \textbf{éq 7.3-4}$$

On voit donc que l'on a exprimé l'énergie de déformation de la structure réduite comme une forme bilinéaire de $\mathbf{U}_2$. Les inconnues nodales de $\mathbf{U}_1$ **ont été éliminées**. Les inconnues nodales U_2 **ne sont plus contraintes**.

Matrice de masse réduite :

Adoptons la même partition pour la matrice de masse $\mathbf{M}$. Nous pouvons écrire la relation [éq 7.3-2] :

$$\mathbf{B}_1\dot{\mathbf{U}}_1+\mathbf{B}_2\dot{\mathbf{U}}_2=0$$

Le même calcul que précédemment nous conduit alors à :

$$2\mathrm{W}_{cin}=\dot{\mathbf{U}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{M}}_2\dot{\mathbf{U}}_2$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{M}}_2=\mathbf{M}_2+\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{M}_1\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_2-\mathbf{M}_{12}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{M}_{12}^{\mathrm{T}} \qquad \textbf{éq 7.3-5}$$

Conclusion :

Le système à résoudre pour trouver les modes (et les fréquences) propres de la structure contrainte est :

Trouver les $(n-p)(\mathbf{X}_\mathrm{i},\ \omega_\mathrm{i}^2)\in\mathbb{R}^{n-p}\times\mathbb{R}$ tels que $(\tilde{\mathbf{K}}_2-\omega_\mathrm{i}^2\tilde{\mathbf{M}}_2)\mathbf{X}_\mathrm{i}=0$ avec $\tilde{\mathbf{K}}_2$ et $\tilde{\mathbf{M}}_2$ définies par [éq 7.3-4] et [éq 7.3-5].

Application aux degrés de liberté bloqués :

Dans ce cas :

$$\begin{cases}\mathbf{B}_1=\mathbf{I}\\ \mathbf{B}_2=0\end{cases}$$

d'où : $\tilde{\mathbf{K}}_2=\mathbf{K}_2$ et $\tilde{\mathbf{M}}_2=\mathbf{M}_2$

c'est-à-dire qu'il suffit "d'oublier" dans $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ les lignes et colonnes correspondant aux degrés de liberté bloqués.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.4 Système Dualisé

Nous avons vu au [§5] que la prise en compte des coefficients de Lagrange (doubles) dans une matrice $\mathbf{A}$ conduisait à la matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \beta\mathbf{B}^{\mathbf{T}} & \beta\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\\ \beta\mathbf{B} & -\alpha\mathbf{I} & +\alpha\mathbf{I}\\ \beta\mathbf{B} & \alpha\mathbf{I} & -\alpha\mathbf{I}\end{bmatrix}$$

où :

- $\mathbf{B}$ est la matrice des conditions cinématiques : $\mathbf{BU}=0$,
- $\alpha\in\mathbb{R}^{+}$ arbitraire $\alpha\neq 0$,
- $\beta\in\mathbb{R}$ arbitraire $\beta\neq 0$,

Appliquons la dualisation des conditions aux limites aux matrices $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$, en partitionnant les degrés de liberté en $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$ comme au [§7.3]. Nous obtenons le problème aux valeurs propres suivant :

$$(S)\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{K_1} & \mathbf{K_{12}} & \beta_k\mathbf{B_1^T} & \beta_k\mathbf{B_1^T}\\ \mathbf{K_{12}} & \mathbf{K_2} & \beta_k\mathbf{B_2^T} & \beta_k\mathbf{B_2^T}\\ \beta_k\mathbf{B_1} & \beta_k\mathbf{B_2} & -\alpha_k\mathbf{I} & +\alpha_k\mathbf{I}\\ \beta_k\mathbf{B_1} & \beta_k\mathbf{B_2} & \alpha_k\mathbf{I} & -\alpha_k\mathbf{I}\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}\mathbf{M_1} & \mathbf{M_{12}} & \beta_m\mathbf{B_1^T} & \beta_m\mathbf{B_1^T}\\ \mathbf{M_{12}} & \mathbf{M_2} & \beta_m\mathbf{B_2^T} & \beta_m\mathbf{B_2^T}\\ \beta_m\mathbf{B_1} & \beta_m\mathbf{B_2} & -\alpha_m\mathbf{I} & \alpha_m\mathbf{I}\\ \beta_m\mathbf{B_1} & \beta_m\mathbf{B_2} & \alpha_m\mathbf{I} & -\alpha_m\mathbf{I}\end{bmatrix}\right\}\mathbf{X}=0$$

pour une pulsation propre ω et un vecteur propre $\mathbf{X}$ de ce système, on peut écrire :

$$\bar{\mathbf{K}}_1\mathbf{X}_1+\bar{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{X}_2+\beta\mathbf{B}_1^{\mathbf{T}}(\lambda_1+\lambda_2)=0 \qquad \textbf{éq 7.4-1}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{X}_1+\bar{\mathbf{K}}_2\mathbf{X}_2+\beta\mathbf{B}_2^{\mathbf{T}}(\lambda_1+\lambda_2)=0 \qquad \textbf{éq 7.4-2}$$

$$\beta(\mathbf{B}_1\mathbf{X}_1+\mathbf{B}_2\mathbf{X}_2)-\alpha(\lambda_1-\lambda_2)=0 \qquad \textbf{éq 7.4-3}$$

$$\beta(\mathbf{B}_1\mathbf{X}_1+\mathbf{B}_2\mathbf{X}_2)+\alpha(\lambda_1-\lambda_2)=0 \qquad \textbf{éq 7.4-4}$$

avec : $\bar{\mathbf{K}}_i=\mathbf{K}_i-\omega^2\mathbf{M}_i$; $\beta=\beta_k-\omega^2\beta_m$; $\alpha=\alpha_k-\omega^2\alpha_m$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le système (S) est d'ordre $(n+2p)$ si $\begin{cases} n & = \text{nombre de ddls physiques} \\ p & = \text{nombre de relations cinématiques} \end{cases}$.

Le polynôme caractéristique en ω^2 est **a priori** de degré $n+2p$. Son terme de plus haut degré vaut : $\prod_{i=1}^{n}\left(-m_i\right)\cdot\left(+\alpha_m\right)^{2p}$ si m_i est le $i^{ème}$ terme diagonal de $\mathbf{M}$.

- on voit donc **que si** $\alpha_m \neq 0$, le terme de plus haut degré est $\neq 0$ (car les m_i sont >0) et donc le système dualisé (S) la plus de valeurs propres que le système réduit : $(n-p)$. Les deux systèmes ne sont donc pas équivalents. C'est ce que l'on constate sur l'exemple du [§7.5],

- choisissons $\alpha_n = \beta_n = 0$:

  [éq 7.4-3] et [éq 7.4-4] $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \mathbf{X_1} = -\mathbf{B_1^{-1}}\mathbf{B_2}\mathbf{X_2} \end{cases}$$

  [éq 7.4-1] $\Rightarrow$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-1}{2\beta}\mathbf{B_1^{-T}}\left(-\bar{\mathbf{K}}_1\mathbf{B_1^{-1}}\mathbf{B_2}+\bar{\mathbf{K}}_{12}\right)\mathbf{X_2}$$

  [éq 7.4-2] $\Rightarrow$

$$-\bar{\mathbf{K}}_{12}\mathbf{B_1^{-1}}\mathbf{B_2}\mathbf{X_2}+\bar{\mathbf{K}}_2\mathbf{X_2}-\mathbf{B_2^T}\mathbf{B_1^{-T}}\left(-\bar{\mathbf{K}}_1\mathbf{B_1^{-1}}\mathbf{B_2}+\bar{\mathbf{K}}_{12}\right)\mathbf{X_2}=0$$

$$\Leftrightarrow(\tilde{\mathbf{K}}_2-\omega^2\tilde{\mathbf{M}}_2)\mathbf{X_2}=0$$

  avec :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}_2 = -\mathbf{K_{12}^T}\mathbf{B_1^{-1}}\mathbf{B_2}+\mathbf{K_2}+\mathbf{B_2^T}\mathbf{B_1^{-T}}\mathbf{K_1}\mathbf{B_1^{-1}}\mathbf{B_2}-\mathbf{B_2^T}\mathbf{B_1^{-T}}\mathbf{K_{12}} \\ \tilde{\mathbf{M}}_2 = -\mathbf{M_{12}^T}\mathbf{B_1^{-1}}\mathbf{B_2}+\mathbf{M_2}+\mathbf{B_2^T}\mathbf{B_1^{-T}}\mathbf{M_1}\mathbf{B_1^{-1}}\mathbf{B_2}-\mathbf{B_2^T}\mathbf{B_1^{-T}}\mathbf{M_{12}} \end{cases}$$

  On constate que les définitions de $\tilde{\mathbf{K}}_2$ et $\tilde{\mathbf{M}}_2$ sont identiques à celles des équations [éq7.3-4] et [éq 7.3-5].

  On voit donc que tout vecteur propre $\mathbf{X}$ du système dualisé est aussi vecteur propre du système réduit (avec la même pulsation propre) si on le projette sur l'espace U_2.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Réciproquement, tout vecteur propre $\mathbf{X_2}$ du problème réduit peut être prolongé en un vecteur propre du système dualisé $\mathbf{X^T}=\left[\mathbf{X_1^T},\mathbf{X_2^T},\lambda_1^T,\lambda_2^T\right]$.

avec :

$$\begin{cases}\mathbf{X_1}=-\mathbf{B_1^{-1}B_2X_2}\\ \lambda_1=-\dfrac{1}{2\beta}\mathbf{B_1^{-T}}(-\bar{\mathbf{K}}_1\mathbf{B_1^{-1}B_2}+\bar{\mathbf{K}}_{12})\mathbf{X_2}\\ \lambda_2=-\dfrac{1}{2\beta}\mathbf{B_1^{-T}}(-\bar{\mathbf{K}}_1\mathbf{B_1^{-1}B_2}+\bar{\mathbf{K}}_{12})\mathbf{X_2}\end{cases}$$

Les deux systèmes sont donc équivalents, ils ont les mêmes modes propres et les mêmes valeurs propres.

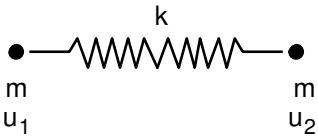
Le système dualisé, bien que de dimension supérieure au système réduit, n'a pas plus de valeurs propres que le système réduit (la dimension de l'espace propre est la même).

Conclusion :

Le système dualisé est équivalent au système réduit dès que l'on choisit $\alpha_m=\beta_m=0$, c'est-à-dire si on prend la matrice de rigidité dualisée mais que l'on ne modifie pas la matrice de masse. C'est ce qui est fait dans Aster.

7.5 Exemple

Soit le système :



$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\qquad \mathbf{M}=\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}$$

on lui ajoute la contrainte $\alpha\,\mathbf{u_1}+\beta\,\mathbf{u_2}=0(\alpha\neq 0)$; Soit $\gamma=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Le système réduit est alors :

- $\mathbf{K_1}=k\,;\mathbf{K_2}=k\,;\mathbf{K_{12}}=-k\,;\mathbf{M_1}=m\,;\mathbf{M_2}=m\,;\mathbf{M_{12}}=0$
- $\mathbf{B_1}=\alpha\,;\mathbf{B_2}=\beta$

$$\Rightarrow\tilde{\mathbf{K}}_2=k(1+\gamma)^2;\tilde{\mathbf{M}}_2=m(1+\gamma^2)$$

$$\Rightarrow\omega^2=\frac{k}{m}\frac{(1+\gamma)^2}{1+\gamma^2};\mathbf{X_2}=1$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On constate que la valeur propre ω^2 dépend du rapport $\gamma=\frac{\beta}{\alpha}$.

Si $\gamma=0$, $\omega^2=\frac{k}{m}$

Si $\gamma=1, \omega^2=\frac{2k}{m}$

Si $g\to\infty$, $\omega^2\to\frac{k}{m}$

Choisissons $(\alpha=\beta=1)$ pour simplifier et écrivons le système dualisé :

$$\left\{\begin{bmatrix} k & -k & \beta_k & \beta_k \\ -k & k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & -\alpha_k & \alpha_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & -\alpha_k \end{bmatrix} -\lambda \begin{bmatrix} m & 0 & \beta_m & \beta_m \\ 0 & m & \beta_m & \beta_m \\ \beta_m & \beta_m & -\alpha_m & \alpha_m \\ \beta_m & \beta_m & \alpha_m & -\alpha_m \end{bmatrix}\right\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = 0$$

les valeurs propres de ce système sont :

$$\omega^2=\left\{\frac{\beta_k}{\beta_m}, \frac{\beta_k}{\beta_m}, \frac{\beta_k}{\beta_m}, \frac{2k}{m}\right\}$$

On constate que l'on retrouve la valeur propre réelle (la quatrième), mais que l'on trouve 3 valeurs propres parasites dues à la non nullité de α_m et β_m .

Si on choisit $\alpha_m=\beta_m=0$, le calcul montre que le polynôme caractéristique est de degré 1 et que sa seule solution est :

$$\begin{cases} \omega^2=\frac{2k}{m} \\ \mathbf{X}=\{-1\,,\,+1\} \end{cases}$$

qui est la solution cherchée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.6 Conclusions

- Si $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ sont les matrices de rigidité et de masse d'un système non-contraint.
- Si les contraintes linéaires peuvent être écrites sous la forme :

$$\left[\mathbf{B}_1\,\mathbf{B}_2\right]\begin{bmatrix}\mathbf{U}_1\\ \mathbf{U}_2\end{bmatrix}=0 \text{ avec } \mathbf{B}_1 \text{ inversible}$$

- Alors les modes propres de la structure contrainte sont ceux du système réduit :

$$\left(\tilde{\mathbf{K}}_2-\omega^2\tilde{\mathbf{M}}_2\right)\mathbf{X}_2=0$$

avec :

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{K}}_2=-\mathbf{K}_{12}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_2+\mathbf{K}_2+\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{K}_1\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{K}_{12}\\ \tilde{\mathbf{M}}_2=-\mathbf{M}_{12}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_2+\mathbf{M}_2+\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{M}_1\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1^{-\mathrm{T}}\mathbf{M}_{12}\end{cases}$$

- Le système dualisé (doubles Lagrange) qui s'écrit :

$$(\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}-\omega^2\tilde{\tilde{\mathbf{M}}})\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}=0$$

avec :

$$\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_{12} & \lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{K}}}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{K}_{12}^{\mathrm{T}} & \mathbf{K}_2 & \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & -\mathbf{I} & \mathbf{I}\\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{I} & -\mathbf{I}\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{M}}}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_{12} & 0 & 0\\ \mathbf{M}_{12}^{\mathrm{T}} & \mathbf{M}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

a alors les mêmes solutions que le système réduit.

8 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
5	*J.PELLET (EDF-R&D/AMA)*	

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 1

Soit le problème 1

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbf{V}} J(\mathbf{u}) \\ J(\mathbf{u})=\frac{1}{2}(\mathbf{Au},\mathbf{u})-(\mathbf{b},\mathbf{u}) \\ \mathbf{V} \text{ sous espace affine de } \mathbb{R}^n=\left\{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathbf{C_i u}-\mathbf{d_i}=0, \forall i=1,p\right\} \\ \mathbf{A} \text{ et } \mathbf{b} \text{ sont définis sur } \mathbb{R}^n \\ \mathbf{A} \text{ matrice symétrique positive d'ordre } n \text{ .} \end{cases}$$

Problème 2

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}\in\mathbf{V} \text{ tel que : } \left(\left(\mathbf{Au},\mathbf{v_0}\right)-\left(\mathbf{b},\mathbf{v_0}\right)=0 \quad \forall \mathbf{v_0}\in\mathbf{V_0}\right) \\ \mathbf{V}=\left\{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathbf{C_i u}-\mathbf{d_i}=\mathbf{0},\ \forall i=1,p\right\} \\ \mathbf{V_0}=\left\{\mathbf{v_0}\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathbf{C_i u}=0,\ \forall i=1,p\right\} \end{cases}$$

On va montrer que les deux problèmes précédents sont équivalents.
Remarquons tout d'abord que le problème 2 est équivalent au problème 2'.

Problème 2'

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}\in\mathbf{V} \text{ tel que : } ((\mathbf{Au},\mathbf{v}-\mathbf{u})-(\mathbf{b},\mathbf{v}-\mathbf{u})=0 \quad \forall \mathbf{v}\in V) \\ \mathbf{V}=\left\{u\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathbf{C_i u}-\mathbf{d_i}=0,\ \forall i=1,p\right\} \end{cases}$$

Il y a en effet bijection entre l'ensemble des $\left\{\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{u}\in\ \mathbf{V},\mathbf{v}\in\mathbf{V}\right\}$ et l'ensemble $\mathbf{V_0}$.

Montrons que le problème 2' est équivalent au problème 1 :

Soit $\mathbf{u}$ solution de 2'

Alors, $\forall\, \mathbf{v}\in\mathbf{V}$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v})-J(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{Av},\mathbf{v})-(\mathbf{b},\mathbf{v})-\frac{1}{2}(\mathbf{Au},\mathbf{u})+(\mathbf{b},\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{Av},\mathbf{v})-(\mathbf{Au},\mathbf{v}-\mathbf{u})-\frac{1}{2}(\mathbf{Au},\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2}((\mathbf{Av},\mathbf{v})-2(\mathbf{Au},\mathbf{v})+(\mathbf{Au},\mathbf{u}))=\frac{1}{2}(\mathbf{A}(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}))\geq 0 \end{aligned}$$

n

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Calculons tout d'abord la dérivée de $J(\mathbf{u})$:

$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \forall \mathbf{v_0} \in \mathbf{V_0},$

$$J'(\mathbf{u})\cdot\mathbf{v_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(\mathbf{u}+\varepsilon\,\mathbf{v_0}) - J(\mathbf{u})}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v_0}) + \frac{\varepsilon}{2} (\mathbf{A}\mathbf{v_0}, \mathbf{v_0}) - (\mathbf{b}, \mathbf{v_0}) \right] = (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b})\,\mathbf{v_0}$$

Soit $\mathbf{u}$ la solution de Pb1

$\forall \mathbf{V} \in \mathbf{V}$, posons $\mathbf{v_0} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$; $\mathbf{v_0} \in \mathbf{V_0}$.

$$\forall \varepsilon \quad \frac{J(u+\varepsilon\,\mathbf{v_0}) - J(\mathbf{u})}{\varepsilon} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (J'(\mathbf{u})\cdot\mathbf{v_0} \geq 0 \ , \ \forall \mathbf{v_0} \in \mathbf{V_0})$$

On voit que $J'(\mathbf{u})$ qui est une forme linéaire sur $\mathbf{V_0}$ doit être systématiquement positive. Ceci n'est possible que si cette forme est identiquement nulle.

On en conclut que :

$$J'(\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = 0 \ , \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$ n

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 2

Définitions, notations

$\mathbf{A}$ est la matrice de rigidité sans contrainte $(n' n)$ (symétrique et positive)
$\mathbf{C}$ est la matrice de blocage : $\mathbf{Cu}-d=0$ (C matrice $n' p(p<n)$)
$\mathbf{u}$ est le vecteur des degrés de liberté physiques $\in R^n$
λ^1 est le vecteur des premiers degrés de liberté de Lagrange $\in \mathbb{R}^p$
λ^2 est le vecteur des deuxièmes degrés de liberté de Lagrange $\in \mathbb{R}^p$

$$\mathbf{x}=(\mathbf{u},\lambda^1,\lambda^2)\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p$$

On note :

- $\mathbf{U}$ l'ensemble des degrés de liberté physiques,
- Λ^1 l'ensemble des premiers degrés de liberté de Lagrange,
- $\mathbf{\Lambda^2}$ l'ensemble des deuxièmes degrés de liberté de Lagrange.

$\alpha\in\mathbb{R}^+$

$\mathbf{K}$ matrice d'ordre $2\,p+n$ symétrique

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C^T} & \mathbf{C^T}\\ \mathbf{C} & -\alpha\,\mathbf{l} & \alpha\,\mathbf{l}\\ \mathbf{C} & \alpha\,\mathbf{l} & -\alpha\,\mathbf{l}\end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{K}$ écrite ci-dessus correspond à une certaine numérotation des inconnues :

$$\mathbf{x}=(\mathbf{u},\lambda^1,\lambda^2)$$

La véritable matrice $\mathbf{K}$ dont on cherche à montrer qu'elle est factorisable par LDL^T sans permutation n'est pas écrite avec cette numérotation. La seule règle de numérotation prise en compte est la suivante :

Règle $R0$ **:**
Les deux degrés de liberté de Lagrange associés à une équation de liaison $\mathbf{C_i U}-\mathbf{d_i}=0$ encadrent les ddl physiques contraints par cette équation.

Par la suite, pour simplifier l'écriture, on prendra $\alpha=1$.

On cherche à montrer que toute sous matrice $\mathbf{K_i}$ de $\mathbf{K}$ est inversible.
Soit une sous matrice $\mathbf{K_i}$ donnée. Elle correspond à un partage des degrés de liberté : ceux de rang $\leq i$, ceux de rang $\geq i$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Nous noterons :

$\tilde{U}$ le sous ensemble de U correspondant aux degrés de liberté de rang $\leq i$.

$\tilde{\tilde{U}}$ le sous ensemble de U correspondant aux degrés de liberté de rang $> i$.

L_1 est l'ensemble des couples $\left(\lambda_1^1, \lambda_1^2\right)$ tels que $\text{rang}\left(\lambda_1^1\right) < \text{rang}\left(\lambda_1^2\right) \leq i$
$L_1^1 = \left\{\lambda_1^1\right\}$; $L_1^2 = \left\{\lambda_1^2\right\}$

L_3 est l'ensemble des couples $\left(\lambda_3^1, \lambda_3^2\right)$ tels que $i < \text{rang}\left(\lambda_3^1\right) < \text{rang}\left(\lambda_3^2\right)$
$L_3^1 = \left\{\lambda_3^1\right\}$; $L_3^2 = \left\{\lambda_3^2\right\}$

L_2 est l'ensemble des couples $\left(\lambda_2^1, \lambda_2^2\right)$ tels que $\text{rang}\left(\lambda_2^1\right) \leq i < \text{rang}\left(\lambda_2^2\right)$
$L_2^1 = \left\{\lambda_2^1\right\}$; $L_2^2 = \left\{\lambda_2^2\right\}$

On a $L = \underset{\substack{i=1,3 \\ j=1,2}}{\cup} L_i^j$.

La matrice C peut se découper en 3 parties correspondant au découpage (L_1, L_2, L_3)

$\mathbf{C_1}$
$\mathbf{C_2}$
$\mathbf{C_3}$

Chaque matrice $\mathbf{C_i}$ peut se découper en 2 parties correspondant au découpage $\left(\tilde{U}, \tilde{\tilde{U}}\right)$

$\tilde{C}_i$	$\tilde{\tilde{C}}_i$

La matrice A peut se découper en 4 parties correspondant au découpage $\left(\tilde{U}, \tilde{\tilde{U}}\right)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}} & \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} \end{bmatrix}$$

A l'aide de ces notations, le problème à résoudre est de montrer que la matrice K_i est inversible.

$$\mathbf{K_i} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} & 0 & \tilde{\mathbf{C}}_1 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} & 0 & \tilde{\mathbf{C}}_1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{C}}_2 \\ \tilde{\mathbf{C}}_1^{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{C}}_1^{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{C}}_2^{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette matrice correspond au vecteur $\mathbf{X_i}=\begin{bmatrix}\lambda_1^1\\ \lambda_1^2\\ \lambda_2^1\\ \tilde{\mathbf{U}}\end{bmatrix}$

Il faut montrer que : $\mathbf{K_i}.\mathbf{X_i}=0\Rightarrow\mathbf{X_i}=0$

Le problème est équivalent à :

Problème 1 :

$$(S)=\begin{cases}-\lambda_1^1+\lambda_1^2+\tilde{\mathbf{C}}_1\tilde{\mathbf{u}}=0\\ \lambda_1^1-\lambda_1^2+\tilde{\mathbf{C}}_1\tilde{\mathbf{u}}=0\\ -\lambda_2^1+\tilde{\mathbf{C}}_2\tilde{\mathbf{u}}=0\\ \tilde{\mathbf{C}}_1^{\mathbf{T}}\left(\lambda_1^1+\lambda_1^2\right)+\tilde{\mathbf{C}}_2^{\mathbf{T}}\lambda_2^1+\tilde{\mathbf{A}}.\tilde{\mathbf{u}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tilde{\mathbf{u}}=0\\ \lambda_1^1=\lambda_1^2=0\\ \lambda_2^1=0\end{cases}$$

Cas général :
On suppose que $\tilde{\mathbf{U}}\neq\emptyset$; $\mathbf{L_1}\neq\emptyset$; $\mathbf{L_2}\neq\emptyset$

$(S)\Rightarrow$

$$\lambda_1^1=\lambda_1^2 \qquad \textbf{éq An2-1}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_1\tilde{\mathbf{u}}=0 \qquad \textbf{éq An2-2}$$

$$\lambda_2^1=\tilde{\mathbf{C}}_2\tilde{\mathbf{u}} \qquad \textbf{éq An2-3}$$

$$2\tilde{\mathbf{C}}_1^{\mathbf{T}}\lambda_1^1+\left(\tilde{\mathbf{C}}_2^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{C}}_2+\tilde{\mathbf{A}}\right)\tilde{\mathbf{u}}=0 \qquad \textbf{éq An2-4}$$

De [éq An2-4], on déduit :

$$2\tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{C}}_1^{\mathbf{T}}\mathbf{l}_1^1+\tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\left(\tilde{\mathbf{C}}_2^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{C}}_2+\tilde{\mathbf{A}}\right)\tilde{\mathbf{u}}=0$$

De [éq An2-2], on obtient :

$$\tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{C}}_1^{\mathbf{T}}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\left(\tilde{\mathbf{C}}_2^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{C}}_2+\tilde{\mathbf{A}}\right)\tilde{\mathbf{u}}=0$$
$$\Rightarrow\tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{C}}_2^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{C}}_2\tilde{\mathbf{u}}+\tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}}=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Or $\tilde{\mathbf{A}}$ est symétrique positive (sous matrice d'une matrice positive) et $\tilde{\mathbf{C}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{C}}_2$ est aussi une matrice symétrique positive, donc cette somme ne peut être nulle que si les deux termes sont nuls.

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{C}}_2^{\mathrm{T}}.\tilde{\mathbf{C}}_2\,\tilde{\mathbf{u}}=0 \\ \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{A}}\,\tilde{\mathbf{u}}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{C}}_2\,\tilde{\mathbf{u}}=0 \Rightarrow \lambda_2^1=0 \qquad \textbf{éq An2-5}$$

$\tilde{\mathbf{A}}$ est une matrice positive, on veut montrer que :

$$\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{A}}\,\tilde{\mathbf{u}}=0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}}=0 \qquad \textbf{éq An2-6}$$

Il nous reste à démontrer que : $\tilde{\mathbf{u}}=0 \text{ et } \lambda_1^1=0$

- $\tilde{\mathbf{u}}=0$

  Prolongeons $\tilde{\mathbf{u}}$ sur $\mathbb{R}^n$ par $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}=0 \quad \mathbf{u}=\left(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}\right)$:

  $$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{A}}\,\tilde{\mathbf{u}}=0 \Rightarrow \mathbf{u}\in\ker\mathbf{A}$$

  $$\mathbf{C}\mathbf{u}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1\mathbf{u}\\ \mathbf{C}_2\mathbf{u}\\ \mathbf{C}_3\mathbf{u}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{C}}_1\tilde{\mathbf{u}}\\ \tilde{\mathbf{C}}_2\tilde{\mathbf{u}}\\ \tilde{\mathbf{C}}_3\tilde{\mathbf{u}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

  En effet $\tilde{\mathbf{C}}_3=0$ car sinon, il existerait des ddl de $\tilde{\mathbf{u}}$ conntraints par des équations non encore prises en compte (de rang $>i$) ce qui est contraire à R_0 .

  Le prolongement $\mathbf{u}$ de $\tilde{\mathbf{u}}$ est donc dans les noyaux de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$. On va montrer qu'il est alors nul. Reprenons le problème avec les "simples Lagrange".

  $$\left(S_2\right)=\begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{u}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\lambda=\mathbf{b}\\ \mathbf{C}\mathbf{u}=\mathbf{d}\end{cases}$$

  Si $\mathbf{u_0}\neq 0$ est tel que $\mathbf{A}\mathbf{u_0}=0$ et $\mathbf{C}\mathbf{u_0}=0$.
  Si u_1 est solution de S_2, on voit qu'alors $\mathbf{u_1}+\mu\,\mathbf{u_0}$ est aussi solution. Ce qui est impossible car nous supposons notre problème physiquement bien posé.
  On en conclut que $\mathbf{u}=0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}}=0$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $\lambda_1^1=0$

[éq An2-4] donne :

$$\tilde{\mathbf{C}}_1^{\mathbf{T}}\lambda_1^1=0 \qquad \textbf{éq An2-7}$$

De la même façon que la règle $\mathbf{R_0}$ imposant $\tilde{\mathbf{C}}_3=0$, on voit que $\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}_1=0$.

[éq An2-6] donne :

$$\mathbf{C}_1^{\mathbf{T}}\lambda_1^1=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{C}}_1^T\lambda_1^1\\ \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}_1^T l_1^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0 \qquad \textbf{éq An2-8}$$

Raisonnons par l'absurde : si $\lambda_1^1\neq 0$ est tel que $\mathbf{C}_1^{\mathbf{T}}\lambda_1^1=0$, c'est qu'il existe une combinaison linéaire des lignes de $\mathbf{C}_1$ qui est nulle, ce qui est contradictoire avec le fait que les lignes de $\mathbf{C}_1$ sont indépendantes les unes des autres (problème physique bien posé).

Donc $\lambda_1^1=0$.

Cas particulier :

Lorsque l'un (ou plus) des ensembles $\tilde{\mathbf{u}}$, L_1 , L_2 est vide, le système (S) se simplifie. On peut vérifier que les raisonnements que l'on a fait dans le cas général, permettent de démontrer des résultats analogues.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)