Organisme(s) : EDF/IMA/MMN

Manuel de Descriptif informatique
Fascicule D8.01 : Présentation de la documentation
Document D8.01.03

Charte graphique pour la réalisation des formules mathématiques dans la documentation du *Code_Aster*

Résumé

Après avoir identifié les objets mathématiques généraux minimaux les plus communément employés par la communauté des mécaniciens développant dans *Aster*,

$$\left(- j\omega^3\mathbf{M} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{k}_i(\omega)_n^i \, \mathrm{e}^{j\phi_i} . \mathrm{g}(P)$$

on expose les consignes de frappe des formules mathématiques qui permettent d'une part un rendu papier et écran acceptable

$$\dot{\beta}(T) - \mathrm{div}\left(\lambda(T)\,\mathrm{grad}\,T\right) = \mathrm{f}(t)$$

et qui, d'autre part, répondent aux critères demandés dans les publications internationales traitant de la mécanique du solide.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans la documentation *Aster*, les formules mathématiques sont développées sous l'Editeur d'Equations de *Microsoft* Word5 (version de "MathType Equation Editor" de Design Science Inc).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Esprit et portée

1.1 Contraintes imposées par la projection des documents numériques *Aster* sur un media

Une partie des consignes pour la rédaction des formules dans les documents au formalisme *Aster*, a été gouvernée par la préoccupation de garder une esthétique et une lisibilité acceptables indépendamment du media et de la police de base du texte environnant.
Dans l'état de l'art actuel en matière de représentation physique des formules dans les documents électroniques, en l'absence de DTD (Description de Type de Document au formalisme SGML), celles-ci sont assimilées à des dessins. Elles ne subissent donc pas de reformatage en fonction du média de consultation (papier, écrans cathodiques).
Le livre électronique comporte autant de fichiers externes que de formules (dessins). Le contenu de ces fichiers vient s'afficher à la consultation du livre à l'emplacement qu'il doit avoir dans le texte. Le livre comporte une table mettant en relation le nom du fichier (la formule) et la position dans le livre.

1.2 Normes et recommandations *Aster*

Elles indiquent la manière de représenter typographiquement les types des objets mathématiques les plus fréquemment manipulés par les mécaniciens du solide. Le principe est l'utilisation des enrichissements typographiques *Italique* et **Gras** pour typer ces objets.
Le rédacteur *Aster* usera de ces recommandations qui constituent une représentation minimale acceptable par la communauté des mécaniciens du solide développant dans *Aster* . Elles :

- s'approchent du rendu du formateur TeX,
- s'inspirent des règles requises pour publier dans les revues suivantes :
  - Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.
  - Int. J. Num. Meth. Eng.
  - ASME J. Appl. Mech.
  - Europ. J. Mech. A/Solids.
- tiennent compte des possibilités et des limitations de l'Editeur d'Equations de *Microsoft* Word5.

Ce qui donne par exemple :

$$\left(- j\omega^3\mathbf{M} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{k}_i(\omega)_n^i \, \mathrm{e}^{j\phi_i}.\mathrm{g}(P)$$

(calcul effectué par l'opérateur DYNA_LINE_HARM [U4.54.02 §1])

$$\dot{\beta}(T) - \mathrm{div}\left(\lambda(T)\,\mathrm{grad}\,T\right) = \mathrm{f}(t)$$

(calcul effectué par l'opérateur THER_NON_LINE [U4.33.02 §1])

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2 \text{ ou } 3} \frac{2}{3}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}).\delta_{ij}\right)^2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

(calcul effectué par l'opérande INVARIANT de la procédure POST_RELEVE [U4.74.03]).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Réalisation typographique des formules dans *Aster*

Après avoir identifié les objets mathématiques retenus, on énumère les enrichissements qui s'y appliquent, les polices à employer, les corps, les positions relatives des éléments qui composent les formules (indices, exposants, symboles de relations, etc…).

2.1 Enrichissements et types d'objets mathématiques

Le tableau ci-après résume sur les objets retenus, les réalisations typographiques de base que le rédacteur *Aster* emploiera dans la mesure du possible.

Type d'objet	*Ital*	Rom	**Gras**	Maig	**Polices**
Nombre		x		x	Times
Variable scalaire	x			x	Times ou Symbol (1)
Fonction usuelle		x		x	Times (2)
Fonction à valeur scalaire		x		x	Times ou Symbol
Fonction à valeurs vectorielles ou tensorielles		x	x		Times ou Symbol (3)
Tenseur, Matrice, vecteur(dimension 2 et plus)		x	x		Times ou Symbol (3)
Espace de scalaires ou de vecteurs		x		x	DESCARTES (4)
Espace de fonctions		x		x	Monotype Corsiva (5)
Texte		x		x	Geneva (6)

1) Si une majuscule grecque est employée pour une variable scalaire alors la frapper toujours en Romain.
2) L'Editeur d'Equations de Word5 sait reconnaître le nom d'une quarantaine de fonctions usuelles comme : det, lim, cos, Im etc …
3) Pour la police Symbol, le **Gras** apparaît à l'écran mais pas nettement à l'impression. Exemple : σ (gras), σ (non gras).
4) Corps des réels € , des complexes ç, des entiers ı. On peut éprouver des difficultés à imprimer la police DESCARTES lorsqu'elle est employée dans l'Editeur d'Equations. L'imprimante remplace les caractères DESCARTES par un blanc. Remède inconnu à la date de parution de ce document. S'adresser au Responsable de la Documentation *Aster*.
5) Par exemple : (F), (ici Corps 18) pour noter un espace de fonctions, (P) un problème, (S) un système.
6) Suivant le MacOS et les versions de Word5 et de l'Editeur d'Equations dont on dispose il est possible que le Geneva dans un "texte" de formule sorte sur l'imprimante en `Courier`. Préférer alors l'Helvetica qui ne présente pas cet inconvénient.

Attention

Il résulte de 4 et 5 que les systèmes d'exploitation MacOS des rédacteurs Aster devront être gréés par ces polices.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Exemples pour les fonctions

Dim. des espaces	Ecriture de l'application	Exemples physiques
¤→ ¤	$f(x) = b \equiv f$	$E(T)$ Module d'YOUNG fonction de la température
$¤^n \rightarrow ¤$	$f(\mathbf{T}) = b \equiv f$	$g(\mathbf{s}) = y$
$¤^n \rightarrow ¤^m$	$\mathbf{f}(\mathbf{T}) = \mathbf{V} = \mathbf{f}$	$\mathbf{K}(\mathbf{s})$ Rigidité géométrique
$¤ \rightarrow ¤^m$	$\mathbf{f}(a) = \mathbf{T} = \mathbf{f}$	$\mathbf{A}(T)$ Elasticité fonction de la température

2.3 Corps des éléments constitutifs des formules

Eléments de la formule	Corps	Exemples
Termes normaux(*)	12 pt	$\sum_{p=1}^{(1+B)^2} X_{n_k}^{kp}$
Exposants et indices	9 pt	$\sum_{p=1}^{1+B^2} X_{n_k}^{kp}$
Symboles	18 pt	$\sum_{p=1}^{(1+B)^2} X_{n_k}^{kp}$
Sous symboles	12 pt	$X^{\sum n_k}$

(*) Si on utilise Monotype Corsiva pour un terme normal, préférer le corps 14 pt.

Soit le réglage suivant dans la rubrique **Définir...** du menu **Taille** de l'Editeur de formules Mathématiques

Normale	12pt
Indice/Exposant	9pt
Sous-indice/Exposant	7pt
Symbole	18pt
Sous-symbole	12pt

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.4 Positions relatives des éléments d'une formule

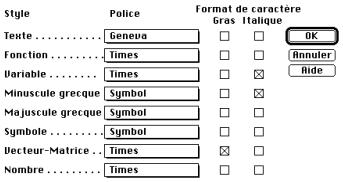
Il faut entendre par là, la position relative des indices et exposants par rapport au terme qu'ils affectent et la position relative des lignes d'équations ou des lignes et colonnes de matrices. On prend les valeurs par défaut de l'éditeur d'équations de Microsoft Word5 exprimées ci-après en % du corps des symboles.

Soit le réglage suivant dans la rubrique **Espacement...** du menu **Format** de l'Editeur de formules mathématiques

Espacement ligne	150%
Espacement lignes matrice	150%
Espacement colonnes	100%
Hauteur de l'exposant	44,53%
Hauteur de l'indice	25%
Hauteur limite	25%

2.5 Feuille de style pour les formules

Rubrique **Définir...** du menu **Style** de l'Editeur de formules mathématiques



2.6 Les espaces de part et d'autre du signe =

On recommande de bien isoler le signe = en disposant suffisamment de blancs de part et d'autre du signe. **But** : rendre bien lisibles les deux membres des équations. On recommande d'ajouter à l'espacement par défaut affecté automatiquement par l'Editeur d'Equations après le signe de relation = un blanc de un quadratin.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.7 Textes dans les formules

Si l'auteur désire accompagner sa formule d'un texte (ce qui est déconseillé) pour, par exemple, expliciter certains termes, ce texte sera en Geneva 10 Romain non gras Style "Texte" de la feuille de style de l'Editeur d'Equations (avec les réserves exprimées en [§2.1]). Dans ce cas, l'ensemble formule + texte forme un seul bloc graphique.

$$\left(- j\omega^3\mathbf{M} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{k}_i(\omega)_n^i \, \mathrm{e}^{j\phi_i} . \mathrm{g}(P)$$

où $\mathbf{C}$ = Matrice d'Amortissement

2.8 Formules hors texte et dans texte

La typographie des termes de formules intégrés dans un paragraphe est la même que dans la formule elle même. Un exemple est donné en [§3.6].

3 Recommandations et conseils

3.1 Notations auteur --> lecteur

En tête de document le rédacteur exposera ses notations, principalement en ce qu'elles diffèrent ou complètent les recommandations *Aster*. Il prendra soin de choisir un symbolisme présent dans l'Editeur d'Equations de Word.

3.2 Notations auteur --> dactylo

Le rédacteur indiquera sur son manuscrit, par un code à lui les instructions d'enrichissement des termes de ses formules mathématiques.

3.3 Le signe "Transposé"

Transposée d'une matrice ou d'un vecteur (et inverse de matrice) comme suit :
$\mathbf{M}^T, \mathbf{M}^{-1}, \mathbf{M}^{-T}, \mathbf{x}^T$. Masse modale pour le mode i : $\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_i$

3.4 Minuscule grecque

Dans la police Symbol on préfèrera le phi minuscule ϕ à φ pour éviter les confusions

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.5 Fonctions et variables

Ne pas confondre la fonction et sa réalisation pour une valeur donnée de sa variable.

Indiquer toujours de quoi dépendent les fonctions la première fois que la fonction apparaît. Exemple :

$$g(\sigma,\alpha) \quad = \quad \sqrt{(\sigma - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma})\mathbf{Id})^2} - \sigma_y(\alpha) \quad \text{(Critère de plasticité)}$$

3.6 Dérivées

Indiquer **où** sont prises les dérivées, du moins lors de leur première apparition. On recommande le formalisme suivant :

soit la fonction $g(\sigma,\alpha)$, sa dérivée partielle par rapport à σ pour $\sigma=\tau$ et $\alpha=\beta$ s'écrit :

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right|_{(\tau,\beta)}$$

ou celui-ci

$$\sigma_{ij,j} + f_i \quad = \quad 0$$

pour une équation d'équilibre.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.7 Convention des indices répétés

Dans une notation indicielle, on utilisera la convention d'EINSTEIN dite **"des indices répétés"**. Cette convention, permet d'alléger l'écriture et de s'affranchir de l'emploi du symbole de sommation $\sum$.

Principe : un indice répété deux fois, une fois en haut, une fois en bas, ou plus simplement deux fois en bas, indique automatiquement une sommation (1, ..., n).

Exemple : $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \mathbf{e}_i = \mathbf{v}^i \mathbf{e}_i$

$\mathbf{v}$, vecteur
v^i , composantes
$\mathbf{e}_i$, vecteur de base

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} = \sigma_k^k = \sigma_1^1 + \sigma_2^2 + \sigma_3^3$$

$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}$ = trace du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$
= $\mathrm{Id}.\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\delta^{ij} = \sigma_k^k$

$$\sigma.\varepsilon = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma^{ij}.\varepsilon_{ij} = \sigma^{ij}.\varepsilon_{ij} \text{ ou plus simplement } \sigma_{ij}.\varepsilon_{ij} .$$

3.8 Indices grecs et indices latins

On conseille l'utilisation les indice grecs (α, β, etc…) pour un parcours dans l'intervalle {1, 2} et les indices latins (i, j, k, etc …) dans l'intervalle {1, 2, 3}.

3.9 Alignement et aplomb des équations

Adopter une disposition telle que les termes similaires soient sur un même aplomb.

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\mathbf{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{U}) - z_3\ \mathbf{K}_{\gamma\delta}\left(\mathbf{U}_3^0\right)\right) + \mathbf{A}_{\alpha\beta ij}\left(\mathbf{E}_{\mu\nu}(\mathbf{U})\cdot\varepsilon_{ij}^Z\left(\chi^{\mu\nu}\right) + \mathbf{K}_{\mu\nu}\left(\mathbf{U}_3^0\right)\cdot\varepsilon_{ij}^2\left(\xi^{\mu\nu}\right) + \varepsilon_{ij}^Z\left(\mathbf{U}_{dil}^2\right) - \alpha_{kl}\left(T^0 - T^{réf}\right)\ \delta_{ik}\delta_{jl}\right) + o(\eta)$$

$$\sigma_{33} = \mathbf{A}_{33\gamma\delta}\left(\mathbf{E}_{\gamma\delta}(\mathbf{U}) - z_3\cdot\mathbf{K}_{\gamma\delta}\left(\mathbf{U}_3^0\right)\right) + \mathbf{A}_{33ij}\left(\mathbf{E}_{\mu\nu}(\mathbf{U})\cdot\varepsilon_{ij}^Z\left(\chi^{\mu\nu}\right) + \mathbf{K}_{\mu\nu}\left(\mathbf{U}_3^0\right)\cdot\varepsilon_{ij}^Z\left(\xi^{\mu\nu}\right) + \varepsilon_{ij}^Z\left(\mathbf{U}_{dil}^2\right) - \alpha_{kl}\left(T^0 - T^{réf}\right)\ \delta_{ik}\delta_{jl}\right) + o(\eta)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Exemples

Ces exemples sont extraits du formulaire de thermo-élasticité isotrope.

$$\sigma_{ij}^{D} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$$\sigma_{VM}^{éq} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma^{D}.\sigma^{D}} = \sqrt{\frac{3\sigma.\sigma - (\mathrm{tr}\,\sigma)^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{I,J}(\sigma_I - \sigma_J)^2}$$

$$\sigma^{D}.\sigma^{D} = \frac{2}{3}\left(\sigma_{VM}^{éq}\right)^2$$

4.1 Potentiel thermodynamique, densité d'énergie libre 3D

$$F(\varepsilon,T) = \frac{1}{2}\lambda(\mathrm{tr}\,\varepsilon)^2 + \mu\varepsilon_{ij}.\varepsilon_{ij} - 3K\alpha\left(T - T^{réf}\right)\mathrm{tr}\,\varepsilon - \frac{1}{2}\frac{C}{T}\left(T - T^{réf}\right)^2$$

$$F(\varepsilon,T) = \frac{K}{2}(\mathrm{tr}\,\varepsilon)^2 + \mu\varepsilon_{ij}^{D}.\varepsilon_{ij}^{D} - 3K\alpha\left(T - T^{réf}\right)\mathrm{tr}\,\varepsilon - \frac{1}{2}\frac{C}{T}\left(T - T^{réf}\right)^2$$

Stabilité : potentiel défini positif :

$$\mu > 0 \;;\; 3K = 3\lambda + 2\mu > 0 \;\Leftrightarrow\; E > 0 \;;\; -1 > \nu > 0{,}5$$

4.2 Potentiel complémentaire, densité d'enthalpie libre 3D

$$F^{*}(\sigma,T) = \frac{-\nu}{2E}(\mathrm{tr}\,\sigma)^2 + \frac{1+\nu}{2E}\sigma_{ij}.\sigma_{ij} + \frac{\alpha}{2}\left(T - T^{réf}\right)\mathrm{tr}\,\sigma + \frac{1}{2}\frac{C}{T}\left(T - T^{réf}\right)^2$$

$$F^{*}(\sigma,T) = \frac{1}{18K}(\mathrm{tr}\,\sigma)^2 + \frac{1}{4\mu}\sigma_{ij}^{D}.\sigma_{ij}^{D} + \frac{\alpha}{2}\left(T - T^{réf}\right)\mathrm{tr}\,\sigma + \frac{1}{2}\frac{C}{T}\left(T - T^{réf}\right)^2$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Coefficients de rigidité élastique 3D

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right|_{(\varepsilon,T)} = \sigma^{ij} = \lambda^{ijkl}\varepsilon_{kl} + \left(T - T^{réf}\right)D^{ij} = \left(\lambda\delta^{ij}\delta^{kl} + 2\mu\delta^{ik}\delta^{jl}\right)\varepsilon_{kl} - 3K\alpha\left(T - T^{réf}\right)\delta^{ij}$$

4.4 Relations contraintes-déformations 3D

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 3K\alpha\left(T - T^{réf}\right)\delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\operatorname{tr}\varepsilon\delta_{ij}\right] - \frac{\alpha E}{1-2\nu}\left(T - T^{réf}\right)\delta_{ij}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\end{bmatrix} - 3\alpha K\left(T - T^{réf}\right)\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.5 Relations déformations-contraintes 3D

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} + \alpha\left(T - T^{réf}\right)\delta_{ij}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\end{bmatrix} = \frac{1}{E}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0\\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\end{bmatrix} + \alpha\left(T - T^{réf}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

4.6 Contraintes planes élastiques 2D

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\begin{array}{cc:c} 1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1-\nu \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix} - \frac{\alpha E}{1-\nu}\left(T - T^{réf}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{\alpha\beta} &= \lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}_{COPL}\varepsilon_{\gamma\delta} + \left(T - T^{réf}\right)D^{\alpha\beta}_{COPL}\\ &= \frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \frac{1-\nu}{2}\left(\delta^{\beta\gamma}\delta^{\alpha\delta} + \delta^{\beta\delta}\delta^{\alpha\gamma}\right)\right]\varepsilon_{\gamma\delta} - \frac{\alpha E}{1-\nu}\left(T - T^{réf}\right)\delta^{\alpha\beta}\end{aligned}$$

4.7 Potentiel complémentaire 2D

$$F^*_{DEPL}(\sigma) = \frac{1-\nu^2}{2E}\left(\mathrm{tr}_{2D}\,\sigma\right)^2 + \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}.\sigma_{22}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Page intentionnellement blanche.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)