FDLV101 - Deux cylindres séparés par un fluide incompressible

Résumé :

Ce test du domaine des fluides (couplage fluide/structure) valide le calcul de matrice de masse ajoutée dans le cas où l'on a plusieurs structures immergées dans un même fluide.

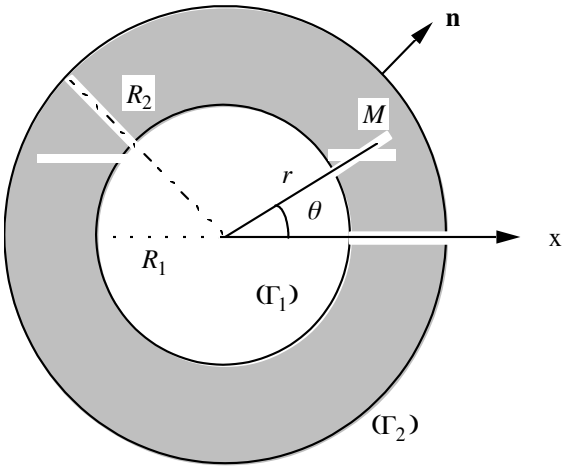
Par une analyse modale, on détermine ainsi les modes couplés des deux structures à cause de la masse de fluide qui les sépare. On adopte une modélisation plane (thermique pour le fluide, et déformation plane pour les cylindres).

On retrouve les modes couplés du système à moins de 0.1% du résultat analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Deux cylindres séparées par du fluide incompressible :

rayon intérieur $R_1 = 1.0\,m$ rayon extérieur $R_2 = 1.1\,m$

1.2 Propriétés de matériaux

Fluide :

Eau : $\rho_0 = 1000.0\,Kg.m^{-3}$

Solide :

Acier : $\rho_S = 7800.0\,Kg.m^{-3}$; $E = 2.\text{E}11\,Pa$; $\nu = 0.3$

Ressort reliant le piston au massif :

On place un élément discret sur maille POI1 au centre du cylindre Γ_1 de raideur $K1$ et deux éléments discrets sur maille POI1 sur le cylindre Γ_2 au niveau de l'axe Ox dont la raideur vaut $K2$.

Éléments discrets du type K_T_D_L : $K1 = (1.\text{E}7, 1.\text{E}7, 1.\text{E}7)\,N/m$
$K2 = (5.\text{E}6, 5.\text{E}6, 5.\text{E}6)\,N/m$

1.3 Conditions aux limites et chargement

On impose une pression (c'est à dire par analogie thermique une température nulle [R4.07.03]) en un nœud quelconque du fluide.

On impose un déplacement nul des cylindres selon Oy.

1.4 Conditions initiales

Sans objet pour le calcul de masse ajoutée et l'analyse modale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Calcul analytique :

On va supposer que les mouvements des cylindres et du fluide sont essentiellement plans. Les effets longitudinaux seront négligés devant les effets transversaux. Le problème est bidimensionnel. Compte tenu de la symétrie, le repère utilisé est un repère cylindrique (r,θ) lié au cylindre central (voir figure ci-dessus). Dans ce système de coordonnées et avec cette géométrie particulière, la dérivée normale $\frac{\partial .}{\partial n}$ est égale à la dérivée $\frac{\partial .}{\partial r}$ par rapport à r.

Dans toute cette partie, la variable p désigne le champ de pression hydrodynamique dans le fluide créé par les vibrations propres des structures, $X_{1/2}$ désigne les modes propres du cylindre 1 ou 2 respectivement.

Les modes propres des coques de frontière (Γ_1) et (Γ_2) en l'absence de fluide sont de la forme (n désigne l'ordre du mode) :

$$X_{1n}(r)=\begin{cases}\cos n\theta \text{ ou } \sin n\theta \\ 0\end{cases} \text{ et } X_{2n}(r)=\begin{cases}0 \\ \cos n\theta \text{ ou } \sin n\theta\end{cases}$$

θ est l'angle azimutal. Ces modes sont découplés bien entendu. La première composante correspond au déplacement normal de la coque intérieure, la deuxième à celui de la coque extérieure. Dans le volume fluide, on a donc deux problèmes à résoudre :

$$\Delta p_{1n}=0 \quad \left(\frac{\partial p_{1n}}{\partial n}\right)_{\Gamma_1}=-\rho_f\begin{cases}\cos n\theta \\ \text{ou} \\ \sin n\theta\end{cases} \quad \left(\frac{\partial p_{1n}}{\partial n}\right)_{\Gamma_2}=0 \qquad \text{éq 2.1-1}$$

et :

$$\Delta p_{2n}=0 \quad \left(\frac{\partial p_{2n}}{\partial n}\right)_{\Gamma_1}=0 \quad \left(\frac{\partial p_{2n}}{\partial n}\right)_{\Gamma_2}=-\rho_f\begin{cases}\cos n\theta \\ \text{ou} \\ \sin n\theta\end{cases} \qquad \text{éq 2.1-2}$$

Le champ p_{1n} correspond au champ de pression engendré dans le fluide si la coque centrale Γ_1 vibre seule, le champ p_{2n} est celui créé par la coque externe Γ_2 si elle vibre seule. La linéarité de l'équation de Laplace permet de résoudre indépendamment chaque problème et ensuite de les superposer pour trouver le champ de pression total.

La solution du problème [éq 2.1-1] est, en coordonnées polaires, du type [bib1] :

$$p_{1n}(r,\theta)=\left\{A r^n+B\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}\begin{Bmatrix}\cos n\theta \\ \text{ou} \\ \sin n\theta\end{Bmatrix}$$

On doit avoir $n\neq 0$, car sinon on a la non-conservation du volume du fluide.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux limites :

$$\left(\frac{\partial p_{1n}}{\partial n}\right)_{R_1} = -\rho_f \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{ou} \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \text{ et } \left(\frac{\partial p_{1n}}{\partial n}\right)_{R_2} = 0$$

On trouve alors que le champ de pression pour chacun des deux problèmes s'écrit :

$$p_{1n}(r,\theta) = \frac{\rho_f R_1}{n} \frac{(r/R_1)^n + (R_2/R_1)^n (R_2/r)^n}{(R_2/R_1)^{2n} - 1} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{ou} \\ \sin n\theta \end{Bmatrix}$$

et :

$$p_{2n}(r,\theta) = \frac{\rho_f R_2}{n} \frac{(R_2/R_1)^n (r/R_1)^n + (R_2/r)^n}{(R_2/R_1)^{2n} - 1} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{ou} \\ \sin n\theta \end{Bmatrix}$$

Les coefficients de masse ajoutée modaux m^A_{ijnm} se calculent à partir de la formule suivante [R4.07.03] si $i=1$ ou 2, $j=1$ ou 2, (n,m) appartient à i^2.

$$m^A_{ijnm} = \int_{\Gamma_j} p_{jn} X_{im}(r).n(\Gamma_j)\, d\Gamma_j$$

L'indexation est ici un peu plus complexe que dans la formule présentée en [R4.07.03] : les indices i et j font référence aux coques Γ_1 et Γ_2, et les indices m et n sont associés aux modes de coque. On remarque qu'il y a couplage des modes des différentes coques, externe et interne.

On remarque, d'une part, que le fluide ne couple pas les modes d'indices n différents car les intégrales $\int_\Gamma \cos n\theta \cos m\theta\, d\Gamma$ s'annulent ; d'autre part, le fluide ne couple pas non plus les modes $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ car $\int_{(\Gamma)} \cos n\theta \sin n\theta\, d\Gamma = 0$. Le seul couplage existant est un couplage entre les deux coques pour les modes de même nature.

A chaque mode n, on associe une matrice d'ordre 4 symétrique. Une sous-matrice correspondant à la projection sur le mode n s'écrit :

$$M^A_1 = \begin{pmatrix} m^A_{11nn} & m^A_{12nn} \\ m^A_{21nn} & m^A_{22nn} \end{pmatrix}$$

La matrice globale s'écrit : $\begin{bmatrix} M^A_1 & 0 \\ 0 & M^A_2 \end{bmatrix}$ avec $M^A_1 = M^A_2$

avec $m^A_{11nn} = L R_1 \int_0^{2\pi} p_1(R_1,\theta) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \text{ou} \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} d\theta$

Soit :

$$m^A_{11nn} = \frac{\pi}{n} \rho_f R_1^2 L \frac{(R_2/R_1)^{2n} + 1}{(R_2/R_1)^{2n} - 1} \qquad \text{éq 2.1-3}$$

on obtiendra :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$m^A_{22nn} = \frac{\pi}{n} \rho_f R_2^2 L \frac{(R_2/R_1)^{2n}+1}{(R_2/R_1)^{2n}-1} \quad \text{éq 2.1-4}$$

et :

$$m^A_{21nn} = m^A_{12nn} = -\frac{\pi}{n} \rho_f R_1 R_2 L \frac{2(R_2/R_1)}{(R_2/R_1)^{2n}-1} \quad \text{éq 2.1-5}$$

L désigne ici la hauteur des coques cylindres dans la direction longitudinale.

Dans notre cas, on ne considère que les modes d'ordre $n=1$ des coques : ils correspondent respectivement aux modes de translation de chacune des coques suivant un axe passant par le centre du tube central : on prend ceux correspondant à l'axe Ox arbitrairement : les coefficients de masse ajoutée linéique s'écrivent :

$$m^A_{11} = \pi \rho_f R_1^2 \frac{(R_2/R_1)^2+1}{(R_2/R_1)^2-1}$$

$$m^A_{22} = \pi \rho_f R_2^2 \frac{(R_2/R_1)^2+1}{(R_2/R_1)^2-1}$$

$$m^A_{21} = m^A_{12} = -\pi \rho_f R_1 R_2 \frac{2(R_2/R_1)}{(R_2/R_1)^2-1}$$

L'équation du mouvement généralisé des deux coques couplées s'écrit :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$$

Les pulsations propres du système couplé sont données par l'équation de degré 4 :

$$det\left[\begin{pmatrix} m_1+m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_2+m_{22} \end{pmatrix} \Omega^2 - \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Application numérique :

$K_1 = 10^7\, N/m \quad K_2 = 10^7\, N/m$
$m_{11} = 33\,060\, kg/m$
$m_{22} = 40\,004\, kg/m$
$m_{12} = -36\,200\, kg/m$

On obtient deux fréquences propres :

$f_1 = 1.696\, Hz \quad f_2 = 4.128\, Hz$

2.2 Résultats de référence

Analytique

2.3 Références bibliographiques

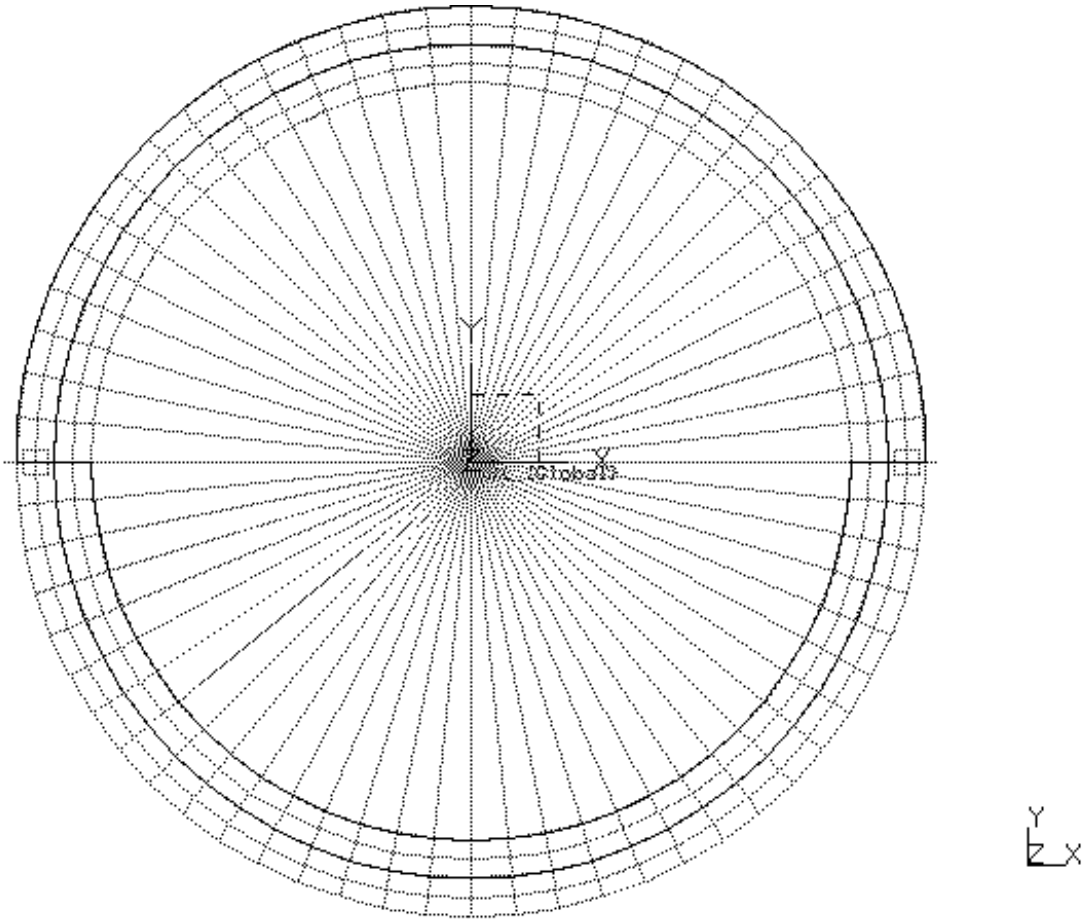
R.J GIBERT. Vibrations des Structures . Interactions avec des fluides. Eyrolles (1988).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Formulation thermique plane pour le fluide (QUAD4 et SEG2)
Formulation déformation plane et discrète pour le solide (TRIA3, QUAD4 et POI1)



Cette modélisation est prévue pour déterminer les modes d'ordre $n=1$ des cylindres. Les modes de coques d'ordre supérieur ne peuvent pas être simulés par ce type de modèle, mais par une modélisation de type COQUE_CYL [U4.22.01].

Découpage = 64 mailles QUAD4 sur le pourtour des cylindres
64 mailles TRIA3 sur l'intérieur du cylindre intérieur
64 mailles SEG2 sur l'interface fluide/cylindres
2 mailles QUAD4 suivant l'épaisseur du fluide
2 mailles QUAD4 suivant l'épaisseur du cylindre extérieur

Conditions aux limites :

```
DDL_IMPO=_F  (GROUP_NO= ACCROCHE,  DY= 0.  )
DDL_IMPO=_F  (GROUP_NO= ACCREXT,   DY=0.   )
TEMP_IMPO=_F (GROUP_NO= TEMPIMPO,  TEMP= 0.)
```


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 356 QUAD4

Nombre de mailles et types : 64 TRIA3, 128 SEG2, 3 POI1

3.3 Valeurs testées

Identification	Référence (Hz)	% tolérance
Ordre du mode propre i : 1	1.696	0.1 %
Ordre du mode propre i : 2	4.128	0.1 %

3.4 Remarques

Calculs de modes effectués par :

```
CALC_MODES
              OPTION='PLUS_PETITE',
              CALC_FREQ=_F(NMAX_FREQ=2)
```


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)