WTNP115 – Désaturation d'un milieu poreux sans air sur cellule unitaire

Résumé :

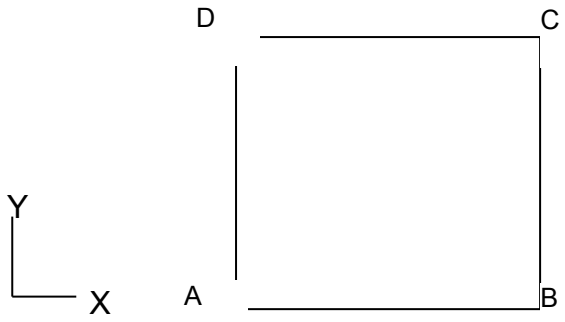
On chauffe un milieu poreux dont les pores sont remplis d'un mélange d'eau et de vapeur d'eau. La saturation initiale en liquide est de 50%, le chargement est un flux thermique uniforme sur les bords du domaine. La modélisation faite par un seul élément correspond à la modélisation d'un problème homogène en espace.

La solution de référence est une solution analytique approchée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Coordonnées des points (m) :

A	0	0	C	100	100
B	100	-0	D	0	100

1.2 Propriétés du matériau

On ne donne ici que les propriétés dont la solution dépend, sachant que le fichier de commandes contient d'autres données de matériau (modules d'élasticité, conductivité thermique …) qui finalement ne jouent aucun rôle dans la solution du problème traité.

Eau liquide	Masse volumique ($kg.m^{-3}$)	10^3
	Chaleur à pression constante ($J.K^{-1}$)	4180
	coefficient de dilatation thermique du liquide (K^{-1})	0.
Vapeur	Capacité calorifique ($J.K^{-1}$)	1900
	Enthalpie initiale (chaleur latente de vaporisation)	2,5E6.
	Masse molaire ($kg.mol^{-1}$)	0,018
Squelette	Capacité calorifique à contrainte constante ($J.K^{-1}$)	1050
Etat initial	Porosité	0,3
	Température (K)	300
	Pression de liquide (Pa)	1E5
	Pression de vapeur (Pa)	3700
	Saturation initiale en liquide	0,5
Constantes	Constante des gaz parfaits	8,315
Coefficients homogénéisés	Masse volumique homogénéisée ($kg.m^{-3}$)	2200
	Isotherme de sorption	$S(P_c) = 0.5 - 10^{-12}(P_c - P_{vp}^0 - P_c^0)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Avec $P_{vp}^{0} = 3700$

$P_{c}^{0} = -10^{5}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargements

Sur tous les bords :

Flux thermique $\mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n} = 10^6$

Flux hydraulique nul

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

2.1.1 Calcul de la pression de vapeur à partir de la température

Nous supposons la courbe de saturation linéaire. Elle s'écrit donc :

$$S = S_0 + S' \Delta P_c \qquad \text{éq 2.1.1-1}$$

[R7.01.11 éq 3.2.1-2] donnent alors :

$$\begin{aligned} \Delta m_{lq} &= \rho_{lq} \phi S \Delta P_c - \rho_{lq}^0 \phi^0 S_{lq}^0 \\ \Delta m_{vp} &= (\rho_{vp} - \rho_{vp}^0)\phi^0 (1 - S_0) - S \rho_{vp}^0 \phi^0 \Delta P_c \end{aligned} \qquad \text{éq 2.1.1-2}$$

On écrit que la masse totale d'eau est conservée (car il n'y a pas de flux d'eau au bord) et on obtient :

$$\begin{aligned} &\Delta m_{lq} + \Delta m_{vp} = 0 \qquad \Rightarrow \\ &(\rho_{lq} - \rho_{vp}) S \Delta P_c + (\rho_{vp} - \rho_{vp}^0)(1 - S_0) = 0 \end{aligned} \qquad \text{éq 2.1.1-3}$$

[R7.01.11 éq 4.4-1] donne par ailleurs

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{p_{vp}}{p_{vp}^0}\right) = &\frac{M_{vp}^{ol}}{RT} \frac{1}{\rho_{lq}} \Delta P_{lq} + \\ &\frac{M_{vp}^{ol}}{R}\left(h_{vp}^0 - h_{lq}^0\right)\left(\frac{1}{T^0} - \frac{1}{T}\right) + \frac{M_{vp}^{ol}}{R}\left(C_{vp}^p - C_{lq}^p\right)\left(\ln\left(\frac{T}{T^0}\right) + \frac{T^0}{T} - 1\right) \end{aligned} \qquad \text{éq 2.1.1-4}$$

Le couplage des équations [éq 2.1.1-3] et [éq 2.1.1-4], auquel il faut ajouter l'équation des gaz parfaits pour la vapeur, est un système fortement non linéaire que nous résoudrons en petite perturbation, ce qui permet de le linéariser.
Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{aligned} &\Delta P_{vp}\left[(\rho_{lq} - \rho_{vp}^0) S + \frac{(1 - S_0) M_{vp}^{ol}}{RT^0}\right] - (\rho_{lq} - \rho_{vp}^0) S \Delta P_{lq} = (1 - S_0) p_{vp}^0 \frac{M_{vp}^{ol}}{R} \frac{\Delta T}{T^{0^2}} \\ &\frac{\Delta P_{vp}}{p_{vp}^0} - \frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_{lq} RT^0} \Delta P_{lq} = \frac{M_{vp}^{ol}}{R}\left(h_{vp}^0 - h_{lq}^0\right) \frac{\Delta T}{T^{0^2}} \end{aligned} \qquad \text{éq 2.1.1-5}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.1.2 Calcul de la température

[R7.01.11 éq 3.2.4.3-1] donne :

$$\Delta Q = -3\alpha_{gz}^{m} T \Delta p_{vp} + C_{\varepsilon}^{0} \Delta T \qquad \text{éq 2.1.2-1}$$

(puisque les autres coefficients de dilatation sont nuls).
[éq 3.2.4.3-2] donne :

$$\alpha_{gz}^{m} = \frac{\phi(1 - S_{lq})}{3T} \qquad \text{éq 2.1.2-2}$$

On obtient donc :

$$\Delta Q' = -\phi(1 - S_{lq})\Delta p_{vp} + C_{\varepsilon}^{0} \Delta T \qquad \text{éq 2.1.2-3}$$

Dans ce problème, ΔQ n'est rien d'autre que la chaleur apportée par unité de volume.

En appelant Vol le volume total de la pièce et $Surf$ sa surface latérale et Δt le temps d'application des flux :

$$\Delta Q = \Delta t \frac{Surf}{Vol} \mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n} \qquad \text{éq 2.1.2-4}$$

2.1.3 Système à résoudre

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \left(\rho_{lq} - \rho_{vp}^{0}\right)S + \dfrac{(1 - S_0)M_{vp}^{ol}}{RT^0} & -\left(\rho_{lq} - \rho_{vp}^{0}\right)S & -(1 - S_0)p_{vp}^{0}\dfrac{M_{vp}^{ol}}{RT^{0\,2}} \\ \hline \dfrac{1}{p_{vp}^{0}} & -\dfrac{M_{vp}^{ol}}{\rho_{lq}RT^0} & -\dfrac{M_{vp}^{ol}}{R}\dfrac{\left(h_{vp}^{0} - h_{lq}^{0}\right)}{T^{0\,2}} \\ \hline 0 & -\phi(1 - S_{lq}) & C_{\varepsilon}^{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \Delta P_{vp} \\ \Delta P_{lq} \\ \Delta T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \Delta t \dfrac{Surf}{Vol}\mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n} \end{array}\right]$$

éq 2.1.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Résultats de référence

On donne la valeur de la température, de la pression de liquide et de la pression de vapeur, solution du système [éq 2.1.3-1] avec les données résumées au paragraphes [§1.2] et rappelées ci dessous. Pour le calcul des capacités calorifiques, on utilise les relations suivantes :

$$(1-\phi^0)\rho_s = r_0 - \rho_{lq}^0 S_l^0 \phi^0 - (1-S_l^0)\phi^0 \rho_{vp}^0$$
$$C_\sigma^0 = (1-\phi)\rho_s C_\sigma^s + \rho_{lq} S_l \phi C_{lq}^p + (1-S_l)\phi\rho_{vp} C_{vp}^p$$

$C_\varepsilon^0 = C_\sigma^0$, cette dernière relation étant vraie parce que le coefficient de dilatation des grains est nul.

S_0	S'	T^0	p_{vp}^0	h_{vp}^0	ρ_{vp}^0 (calculé)	ρ_{lq}
5,00E-01	-1,00E-12	3,00E+02	3,70E+03	2,50E+06	2,67E-02	1,00E+03

r_0	ϕ^0	ρ_s (calculé)	C_σ^s	C_{lq}^p I	C_{vp}^p	C_ε^0 (calculé)
2,20E+03	3,00E-01	2,93E+03	1,05E+03	4,18E+03	1,90E+03	2,78E+06

$\mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n}$	Δt	$Surf$	Vol
1,00E+06	1000	400	1,00E+04

Après résolution, on obtient les résultats suivants :

ΔP_{vp}	3.E+03
P_{lq}	-1E+07
ΔT	14

2.3 Incertitudes

Les incertitudes sont assez grandes parce que la solution analytique est une solution approchée du fait de la linéarisation des équations.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation A

Modélisation en déformations planes. Un élément $Q8$
Discrétisation en temps : un seul pas de temps : $10^3 s$.

3.2 Valeurs testées

Nœud	Type de valeur	Instant (s)	Référence (analytique)	*Aster*	Différence (%)
$NO1$	DEPL/TEMP	10^3	14	14,4	2.7%
$NO1$	DEPL/PRE1	10^3	-1.10^7	$-1.3\ 10^7$	30%
$NO1$	VARI_ELNO/V4		$3.\ 10^3$	$3.9\ 10^3$	30%

On trouve donc des résultats relativement proches des résultats analytiques. L'incertitude demeurant assez large du fait de la linéarisation des équations.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)