WTNP103 - Diffusion d'air dissous dans l'eau (plan)

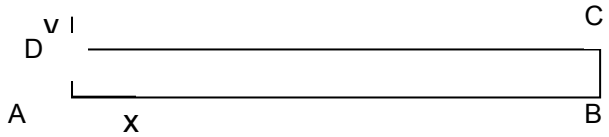
Résumé :

On considère ici un problème à température et saturation constante. Par des conditions aux limites appropriées on impose une pression d'eau et une pression de vapeur constantes. Une pression de gaz est imposée sur un bord du domaine (flux nuls de l'autre coté). Seules les pressions d'air sec et d'air dissous reliées par la loi de Henry évoluent. Ce problème se ramène en une équation pour la pression d'air sec de type « équation de la chaleur ». La solution de référence sera alors un calcul thermique ASTER.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Coordonnées des points (m) :

A	0	0	C	1	0,5
B	1	0	D	0	0,5

1.2 Propriétés du matériau

On ne donne ici que les propriétés dont la solution dépend, sachant que le fichier de commandes contient d'autres données de matériau (modules d'élasticité, conductivité thermique …) qui finalement ne jouent aucun rôle dans la solution du problème traité.

Eau liquide	Masse volumique ($kg.m^{-3}$)	10^3
	Chaleur massique à pression constante ($J.K^{-1}$)	0.
	Viscosité dynamique de l'eau liquide ($Pa.s$)	0.001
	coefficient de dilatation thermique du liquide (K^{-1})	0.
	Perméabilité relative à l'eau	$kr_w(S)=0.5$
Vapeur	Chaleur massique ($J.K^{-1}$)	0.
	Masse molaire($kg.mol^{-1}$)	0,01
Gaz	Chaleur massique ($J.K^{-1}$)	0.
	Masse molaire($kg.mol^{-1}$)	0,01
	Perméabilité relative au gaz	$kr_{gz}(S)=0.5$
	Viscosité du gaz ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)	0.001
Air dissous	Chaleur massique ($J.K^{-1}$)	0.
	Constante de Henry ($Pa.m^{3.}mol^{-1}$)	50000
Etat initial	Porosité	1
	Température (K)	300
	Pression de gaz (Pa)	1.01E5
	Pression de vapeur (Pa)	1000
	Pression capillaire (Pa)	1.E6
	Saturation initiale en liquide	0,4
Constantes	Constante des gaz parfaits	8,32
Coefficients homogénéisés	Masse volumique homogénéisée ($kg.m^{-3}$)	2200

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Isotherme de sorption	$S(P_c)=0.4$
Coefficient de Biot	0
Fick Vapeur ($m^{2.}s^{-1}$)	$FV=0$
Fick air dissous ($m^{2.}s^{-1}$)	$FA=6\ .E-10$
Perméabilité intrinsèque (m^2)	$Kint=1.\mathrm{E}-19$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Sur l'ensemble du domaine, on veut :

$$p_w = cte = p_w^0$$
$$\frac{1}{K_w} = 0 \Rightarrow \rho_w = cte = \rho_w^0$$
$$p_{vp} = cte = p_{vp}^0$$
$$F_{vp} = 0$$
$$S(p_c) = cte = S_0$$
$$T = cte = T^0$$
$$\phi = 1$$
$$M_{as}^{ol} = M_{vp}^{ol} = M_{ad}^{ol}$$

Sur tous les bords : Flux hydrauliques et thermiques nuls.

On va maintenant linéariser p_{vp} en fonction de p_w.

Ecriture de p_{vp} fonction linéaire de p_w :

La section 4.2.3 du document de référence *Aster* [R7.01.11] nous donne la relation : $\frac{dp_{vp}}{p_{vp}} = \frac{M_{vp}^{ol}}{RT}\frac{dp_w}{\rho_w}$.

Si on linéarise cette expression on obtient : $p_{vp} = \frac{p_{vp}^0}{RT}\frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0}p_w + \left[p_{vp}^0 - \frac{p_{vp}^0}{RT}\frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0}p_w^0\right]$ que l'on peut écrire sous la forme :

$$p_{vp} = Ap_w + B \qquad \text{éq 1.3-1}$$

avec $A = \frac{p_{vp}^0}{RT}\frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0}$ et $B = p_{vp}^0 - \frac{p_{vp}^0}{RT}\frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0}p_w^0$

Sur le bord AB : $p_{gz} = 115000$
$pc = 10E6$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

2.1.1 Calcul de la conservation de la masse d'air

La conservation de la masse de gaz s'écrit :

$$\frac{dm_{air}}{dt} + div(\mathbf{M}_{as} + \mathbf{M}_{ad}) = 0 \qquad \text{éq 2.1.1-1}$$

On écrit que la masse totale d'eau et la masse totale d'air sont conservées (car il n'y a pas de flux d'eau ni de gaz au bord) et on obtient :

$$m_{air} = m_{as} + m_{ad} = S_0(\rho_{ad} - \rho_{ad}^0) + (1 - S_0)(\rho_{as} - \rho_{as}^0)$$

donc

$$d(m_{as} + m_{ad}) = S_0 d\rho_{ad} + (1 - S_0) d\rho_{as} \qquad \text{éq 2.1.1-2}$$

$$d\rho_{as} = \frac{M_{as}^{ol}}{RT} dP_{as} \text{ et } d\rho_{ad} = \frac{M_{ad}^{ol}}{K_H} dP_{as}$$

$$\frac{dm_{air}}{dt} = \left[S_0 \frac{M_{as}^{ol}}{K_H} + (1 - S_0) \frac{M_{as}^{ol}}{RT} \right] \frac{dP_{as}}{dt}$$

Calcul des vitesses :

$$\frac{\mathbf{M_{as}}}{\rho_{as}} = \lambda_{gz}(-\nabla P_{as}) \qquad \text{éq 2.1.1-3}$$

puisque $F_{vp} = 0$ et $\nabla P_{vp} = 0$

et

$$\mathbf{M_{ad}} = \rho_{ad}\lambda_{lq}(-\nabla P_{lq}) - F_{ad}\nabla C_{ad} \quad \text{avec} \quad C_{ad} = \rho_{ad}$$

Comme $\nabla P_{lq} = \nabla P_w + \nabla P_{ad} = \nabla P_{ad} = \frac{RT}{K_H}\nabla P_{as}$

$$\mathbf{M_{ad}} = \rho_{ad}\lambda_{lq}\frac{RT}{K_H}(-\nabla P_{as}) - \frac{M_{ad}^{ol}}{K_H}.F_{ad}\nabla P_{as}$$

[éq 2.1.1-1] peut alors se simplifier sous la forme suivante :

$$C\frac{dP_{as}}{dt} = Ldiv(\nabla P_{as})$$

avec
$$\begin{cases} C = S_0 \frac{M_{as}^{ol}}{K_H} + (1 - S_0)\frac{M_{as}^{ol}}{RT} \\ L = \rho_{as}^0 \lambda_{gz} + \frac{RT}{K_H}\rho_{ad}^0\lambda_{lq} + \frac{M_{as}^{ol}}{K_H}.F_{ad} \end{cases}$$

Equation de la chaleur dont on connaît le résultat.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Résultats de référence

Avec les valeurs numériques précédentes, on trouve :

$$P_{as} = 10^5 \Rightarrow P_{ad}^0 = \frac{RT}{K_H} P_{as}^0 = 4992$$

$$\rho_{as}^0 = \frac{M_{as}^{ol}}{RT} P_{as}^0 = 0.4 \text{ et } \rho_{ad}^0 = \frac{M_{ad}^{ol}}{RT} P_{ad}^0 = 0.02$$

$$\rho_{vp}^0 = \rho_{vp} = 4.10^{-3}$$

Les constantes de l'équation de la chaleur sont alors :

$$C = 2{,}4810^{-6}$$
$$L = 1{,}4.10^{-16}$$

2.3 Incertitudes

Les incertitudes sont assez grandes parce que la solution analytique est une solution approchée du fait de la linéarisation des équations.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

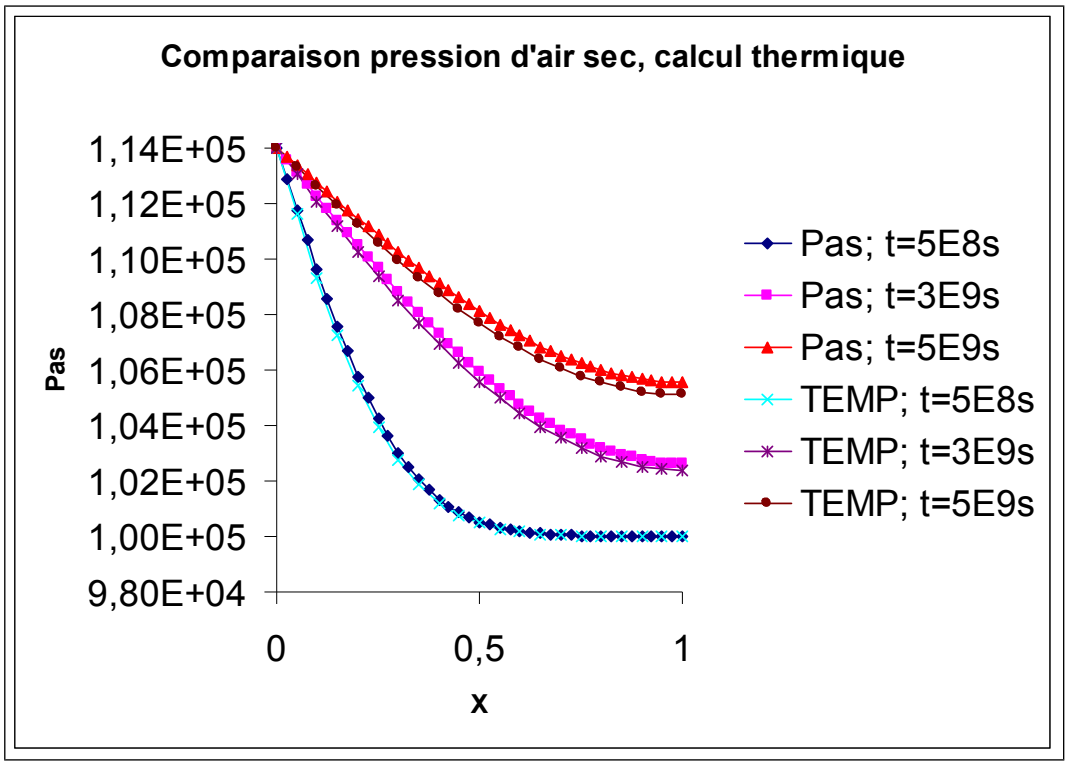
3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation A

Modélisation en déformations planes. 20 éléments QUAD8.

3.2 Grandeurs testées et résultats

$X(m)$	Temps (s)	$PRE2$ Aster	$PRE2$ calcul thermique	Erreur relative
0,2	3,00E+009	1.128E4	1.120E4	0.73%
0,2	5,00E+009	1.127E4	1.224E4	0.24%



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Synthèse des résultats

Les résultats sont en très bon accord avec la solution semi-analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)