WTNV139 – Modélisation d'un puits creusé dans une formation isotrope transverse saturée en eau

Résumé :

Ce cas test issu de la littérature (Abousleiman et al. [1]) présente le cas d'un puits creusé incliné dans un milieu saturé en eau. Il s'agit d'une modélisation hydromécanique couplée qui dispose d'une solution analytique. Ce cas test a pour but de tester la bonne prise en compte de l'isotropie transverse du milieu poreux.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

L'objectif de ce cas test est de comparer la solution obtenue avec Code_Aster, en utilisant une modélisation aux éléments finis, avec une solution analytique. Ce cas test et sa solution analytique ont été développés et détaillés par Abousleiman et al.[1]. Nous en présentons ici les principales lignes ainsi que les analogies admissibles avec notre modèle.

1.1 Géométrie du problème

On considère un volume de roche de hauteur $h=1\mathrm{m}$ et de base carrée de $l=15\mathrm{m}$ de coté. Au centre, est creusée une cavité cylindrique de rayon $R=0.1\mathrm{m}$ et d'extension infinie selon son axe z. On remarque qu'on modélise ici un domaine de hauteur $1\mathrm{m}$ ce qui est une hypothèse restrictive (idéalement, il faudrait un domaine bien plus grand mais qui entrainerait de longs temps de calculs). Cette cavité sert à modéliser le puits creusé dans le massif de roche. Ce massif est d'autre part caractérisé par des plans d'isotropie perpendiculaires à l'axe de la cavité cylindrique.

Le puits est d'autre part caractérisé par deux angles par rapport au repère des contraintes principales:

- son azimut $\varphi_y=30\,°$
- son inclinaison $\varphi_z=60\,°$

Ce qui correspond aux angles nautiques :

- $\alpha=30\,°$
- $\beta=-60\,°$

Le repère cartésien associé au massif et au repère des contraintes est noté $(Ox'y'z')$ et celui associé à la cavité est noté $(Oxyz)$. On définit également un système de coordonnées cylindriques (r,θ,z) pour caractériser la cavité cylindrique.

Sur la Figure 1.1-1 on résume les informations décrites ci-dessus :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

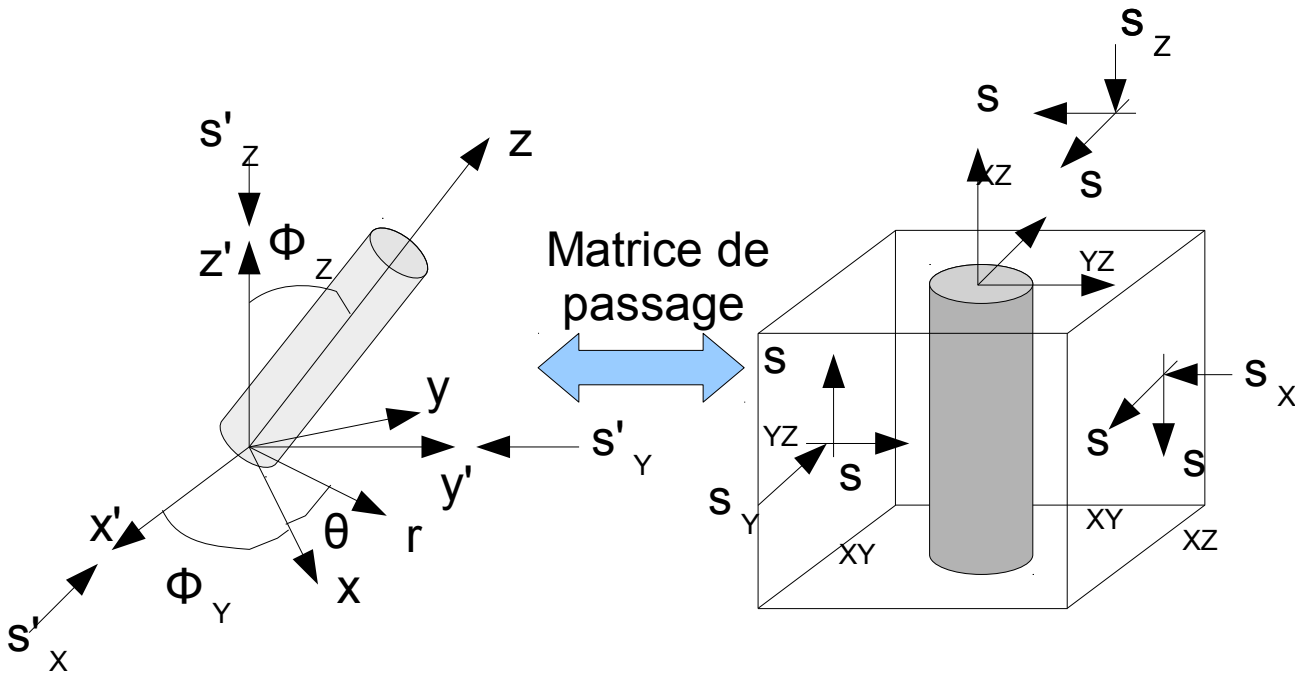


Figure 1.1-1 : Représentation de la géométrie du problème du puits incliné

Il est important de remarquer que les deux géométries décrites ci-dessus sont strictement équivalentes. Cependant on choisit d'adopter la géométrie pour laquelle le puits est vertical, afin de faciliter la modélisation et la conception du maillage. Le repère choisi est donc le repère d'isotropie transverse et non celui des contraintes principales.

Au final, on représentera une partie seulement du modèle tel que :

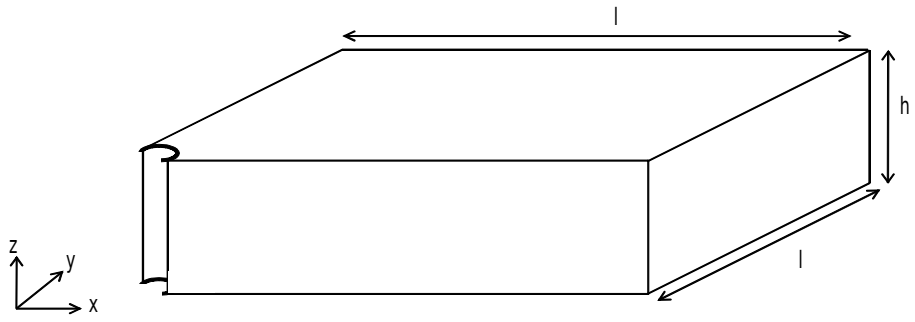


Figure 1.1-2 : Géométrie modélisée

Des conditions de symétries sont donc appliquées.

1.2 Propriétés matériaux

On se réfère aux paramètres définis dans l'article d'Abou Sleiman 1.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On part du rapport d'anisotropie $\frac{E_L}{E_N}=2$ et $\frac{\nu_{TL}}{\nu_{NL}}=2$. On rappelle que les hypothèses d'isotropie transverse impliquent que $\nu_{TL}=\nu_{LT}$; $\nu_{NT}=\nu_{NL}$; $\nu_{LN}=\nu_{TN}$ et $\frac{\nu_{NT}}{\nu_{LN}}=\frac{E_N}{E_L}$.

Par ailleurs et en écrivant les termes de la matrice de Hook, tels que :

$$M_{11}=\frac{E_{L.}(E_N-E_L\nu_{NL}^2)}{(1+\nu_{TL})(E_N-E_{N.}\nu_{TL}-2.\mathrm{E}_{L.}\nu_{NL}^2)}$$

$$M_{12}=\frac{E_L(E_N\nu_{TL}+E_L\nu_{NL}^2)}{(1+\nu_{TL})(E_N-E_{N.}\nu_{TL}-2.\mathrm{E}_{L.}\nu_{NL}^2)}$$

$$M_{13}=\frac{E_L E_N \nu_{NL}}{E_N-E_N\nu_{TL}-2.\mathrm{E}_L\nu_{NL}^2}$$

$$M_{33}=\frac{E_N^2(1-\nu_{TL})}{E_N-E_N\nu_{TL}-2.\mathrm{E}_L\nu_{NL}^2}$$

Les coefficients de Biot sont alors déduits par la relation suivante 1:

$$b_L=1-\frac{M_{11}+M_{12}+M_{13}}{3\mathrm{K}_S}$$

et

$$b_N=1-\frac{2\mathrm{M}_{13}+M_{33}}{3\mathrm{K}_S}$$

Ici, $K_S=27{,}5\,GPa$.

À partir de cela, on indique ici les propriétés matériaux renseignés dans Code_Aster :

Liquide	Viscosité μ_w (en $Pa.s$)	10^{-3}
	Module de compressibilité $\frac{1}{K_w}$ (en Pa^{-1})	5.10^{-10}
	Densité du liquide ρ_w (en kg/m^3)	1
	Chaleur massique à pression constante	4180
Paramètres élastiques	Module de Young E_L (en MPa)	9474
	Module de Young E_N (en MPa)	0.5×9474
	Coefficient de Poisson ν_{LT}	0,24
	Coefficient de Poisson ν_{LN}	0,24
	Module de Cisaillement G_{ln} (en MPa)	8880

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Paramètres de couplage	Coefficient de Biot b_L	0,81689
	Coefficient de Biot b_N	0,89864
	Masse volumiques homogénéisée initiale r_0 (en kg/m^3)	2410
	Perméabilité intrinsèque K_L^{int} (en m^2/s)	5.10^{-20}
	Perméabilité intrinsèque K_N^{int} (en m^2/s)	5.10^{-20}

Tableau 1.2-1 : Propriétés des matériaux

1.3 Conditions aux limites et initiales du modèle

Dans la suite nous considérons les conditions initiales et aux limites dans le repère lié au puits.

1.3.1 Cas des déplacements

Compte tenu de la symétrie du modèle, on bloquera sur 3 faces correspondant respectivement aux 3 plans $x=0\,;\,y=0$ et $z=0$.

1.3.2 Cas de la pression

La pression de pore initiale dans le massif et pour $r\to+\infty$ est fixée à $p_0=9{,}8\,MPa$. On appliquera donc cette pression sur les 3 faces correspondant respectivement aux 3 plans $x=l\,;\,y=l$ et $z=h$. Suite à la mise en eau du puits, il se développe en paroi une pression uniforme que l'on fixe à $p_w=12\,MPa$ sur le bord de la cavité.

1.3.3 Cas des contraintes

Dans le massif, l'état de contrainte *in situ* associé au repère $(Ox'y'z')$ avant le creusement du puits est caractérisé par l'état initial suivant :

$$\begin{cases} S'_x=-25\,MPa \\ S'_y=-22\,MPa \\ S'_z=-29\,MPa \end{cases}$$

De plus le creusement du puits implique une perturbation de l'état de contrainte *in situ* initial dans le massif. Afin de prendre en compte ce nouvel état de contrainte au voisinage du puits, il faut considérer deux rotations successives pour passer du repère $(Ox'y'z')$ associé au massif, au repère $(Oxyz)$ associé au puits (cf. Figure 1.1-1).

Soient $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$ les matrices de passage décrivant ce changement de repère :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta)\end{pmatrix}$$

Après changement de repère, l'état de contrainte initiale dans le repère $(Oxyz)$ et quand $r\to+\infty$ à appliquer au modèle est le suivant :

$$\begin{cases} S_{xx}=-27{,}81\,MPa\\ S_{yy}=-22{,}75\,MPa\\ S_{zz}=-25{,}44\,MPa\\ S_{xy}=0{,}65\,MPa\\ S_{xz}=2{,}06\,MPa\\ S_{yz}=1{,}125\,MPa \end{cases}$$

Pour les conditions aux limites, on néglige le cisaillement et on applique les conditions en pression sur les 3 faces $x=l\,;\,y=l$ et $z=h$.
En paroi du puits $(r=R)$ et suivant , la contrainte radiale est appliquée : $\sigma_{rr}(r=R\,,t)=-p_w.H(t)$ où $H(t)$ est la fonction échelon de Heaviside.

1.4 Solution de référence

Dans cette partie nous rappelons les équations théoriques utiles pour le calcul de la contrainte radiale, et de la pression de pore.

On résume les conditions aux limites du problème général :

- pour $r\to+\infty$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}=-S_{xx}\\ \sigma_{yy}=-S_{yy}\\ \sigma_{zz}=-S_{zz}\\ \sigma_{xy}=-S_{xy}\\ \sigma_{xz}=-S_{xz}\\ \sigma_{yz}=-S_{yz} \end{cases} \quad \text{et} \quad p=p_0$$

- pour $r=R$

$$\sigma_{rr}=-p_w.H(t)$$
$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{rz}=0$$
$$p=p_w.H(t)$$

Compte tenu de la linéarité du problème, celui ci est en fait le résultat de la superposition de 3 sous problèmes qui permettent une étude tridimensionnelle 1:

- problème 1 : on considère un problème poro-élastique en déformations planes (on ne prend en compte que les contraintes principales selon les axes x et y ainsi que le cisaillement

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

dans la plan (xy) et les perturbations liées à la pression de pore). Les conditions aux limites de ce problème s 'écrivent alors :

- pour $r \to +\infty$

$$\sigma_{xx} = -S_{xx}$$
$$\sigma_{yy} = -S_{yy}$$
$$\sigma_{xy} = -S_{xy}$$

$$\sigma_{zz} = -\nu_{LN}(S_{xx}+S_{yy}) - (\alpha_{LN} - 2\nu_{LN}\alpha_{LT})\, p_0 - (\beta_3^s - 2\nu_{LN}\beta_1^s) T_0$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$$

$$p = p_0$$

- pour $r = R$

$$\sigma_{rr} = -p_w . H(t)$$

$$p = p_w . H(t)$$

- problème 2 : on ne considère que la contrainte verticale orientée selon z . Les conditions aux limites de ce problème s'écrivent alors :

- pour $r \to +\infty$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = p = 0$$

$$\sigma_{zz} = -S_{zz} + (\nu_{LN}(S_{xx}+S_{yy}) + (\alpha_{LN} - 2\nu_{LN}\alpha_{LT})\, p_0)$$

β_3^s et β_1^s sont définis dans la suite de ce document.

- pour $r = R$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = p = 0$$

- problème 3 : on ne considère que les cisaillements contenus dans les plans (xz) et (yz) . Les conditions aux limites de ce problème s 'écrivent alors :

- pour $r \to +\infty$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = p = 0$$
$$\sigma_{xz} = -S_{xz}$$
$$\sigma_{yz} = -S_{yz}$$

- pour $r = R$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = p = 0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans la suite de ce document on va développer la solution du problème 1.

1.4.1 Présentation du problème analytique

L'expression de la contrainte radiale, de la pression de pore et de la température, pour le problème en déformations planes (problème 1 ci-dessus) est également le résultat de la superposition de 3 modes de chargement dont les conditions aux limites sont données ci-après :

- Mode 1 : prise en compte de la partie hydrostatique des contraintes aux limites (en $r=R$)

$$\sigma_{rr}^{(1)}=\sigma_0-p_w$$

$$p^{(1)}=0$$

- Mode 2 : prise en compte des perturbations liées à la pression de pore et à la température (en $r=R$)

$$\sigma_{rr}^{(2)}=0$$

$$p^{(2)}=p_w-p_0$$

- Mode 3 : prise en compte de la partie déviatorique des contraintes aux limites (en $r=R$)

$$\sigma_{rr}^{(3)}=-S_0\cos(2(\theta-\theta_r))$$

$$p^{(3)}=0$$

avec :

$\sigma_0=\frac{(S_{xx}+S_{yy})}{2}$ la contrainte moyenne, $S_0=0.5\sqrt{((S_{xx}-S_{yy})^2+4S_{xy}^2)}$ la contrainte déviatorique et

$$\theta_r=0.5\arctan\left(\frac{2S_{xy}}{S_{xx}-S_{yy}}\right)$$

- La solution générale pour le calcul de la contrainte radiale est donc donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_{rr}=-\sigma_0+S_0\cos(2(\theta-\theta_r))+\sigma_{rr}^{(1)}+\sigma_{rr}^{(2)}+\sigma_{rr}^{(3)}$$

avec :

$$\sigma_{rr}^{(1)}=(\sigma_0-p_w)\frac{R^2}{r^2}$$

$$\sigma_{rr}^{(2)}=L^{-1}\left[\frac{1}{s}\left(b_L\left(1-\frac{M_{12}}{M_{11}}\right)\left[F_1\psi(\xi)+F_2\psi(\omega)\right]+\beta_1^s\left(1-\frac{M_{12}}{M_{11}}\right)\left[(T_w-T_0)\right]\psi(\omega)\right)\right]$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sigma_{rr}^{(3)}=L^{-1}\left[\frac{S_0}{s}\cos(2(\theta-\theta_r))\left(A_1C_1\left(\frac{1}{\xi r}K_1(\xi r)+\frac{1}{(\xi r)^2}K_2(\xi r)\right)-A_2C_2\frac{R^2}{r^2}-3A_3C_3\frac{R^4}{r^4}\right)\right]$$

Les quantités utilisées sont définis à la fin de cette section.

- La solution générale pour le calcul de la pression de pore est donc donnée par l'expression suivante :

$$p=p_0+p^{(2)}+p^{(3)}$$

avec :

$$p^{(2)}=L^{-1}\left[\frac{1}{s}\left[F_1\Phi(\xi)+F_2\Phi(\omega)\right]\right]$$

$$p^{(3)}=L^{-1}\left[\frac{S_0}{s}\cos(2(\theta-\theta_r))\left(A_1C_2\frac{R^2}{r^2}+\frac{c_f}{2G_{\mathrm{LT}}\kappa}C_1K_2(\xi r)\right)\right]$$

Les quantités utilisées sont définis à la fin de cette section.

D'autre part on définit K_n comme étant les fonctions modifiées de Bessel de deuxième espèce d'ordre n (où n est un entier) telles que :

$$K_n(x)=\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{-1}{4}x^2\right)^k\right]+(-1)^{n+1}\ln\left[\frac{1}{2}x\right]I_n(x)\\ +(-1)^n\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\chi(k+1)+\chi(n+k+1))\frac{\left[\frac{1}{4}x^2\right]^k}{k!(n+k)!}\right]\end{array}$$

où $I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{x\cos\theta}\cos(n\theta)d\theta$ sont les fonctions modifiées de Bessel de première espèce d'ordre n (où n est un entier) et χ la fonction digamma.

On peut donc définir les quantités suivantes :

$$\Phi(x)=\frac{K_0(xr)}{K_0(xR)}$$

$$\Psi(x)=\frac{K_1(xr)}{xrK_0(xR)}-\frac{RK_1(xr)}{xr^2K_0(xR)}$$

$$F_1=(p_w-p_0)-\frac{c_{hf}}{1-\frac{c_f}{c_h}}(T_w-T_0)$$

$$F_2=\frac{c_{hf}}{1-\frac{c_f}{c_h}}(T_w-T_0)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$c_f = \frac{\kappa M M_{11}}{M_{11} + b_L^2 M}$$

$$\kappa = \frac{K_L^{\text{int}}(\varphi)}{\mu_w}$$

$$c_{hf} = \frac{c_f}{\kappa}\left[\beta^{sf} - \frac{b_L \beta_1^S}{M_{11}}\right]$$

$$C_1 = \frac{4}{2A_1(B_3 - B_2) - A_2 B_1}$$

$$C_1 = \frac{4}{2A_1(B_3 - B_2) - A_2 B_1}$$

$$C_3 = \frac{2A_1(B_3 + B_2) + 3A_2 B_1}{3(2A_1(B_3 - B_2) - A_2 B_1)}$$

$$A_1 = \frac{b_L M}{M_{11} + b_L^2 M}$$

$$A_2 = \frac{M_{11} + M_{12} + 2 b_L^2 M}{M_{11} + b_L^2 M}$$

$$B_1 = \frac{M_{11}}{2 G_{LT} b_L} K_2(\xi R)$$

$$B_2 = \frac{1}{\xi R} K_1(\xi R) + \frac{6}{(\xi R)^2} K_2(\xi R)$$

$$B_3 = 2\left(\frac{1}{\xi R} K_1(\xi R) + \frac{3}{(\xi R)^2} K_2(\xi R)\right)$$

$\xi = \sqrt{\frac{s}{c_f}}$ et $\omega = \sqrt{\frac{s}{c_h}}$ où s représente la variable de Laplace.

1.4.2 Méthode de résolution de la solution analytique

Comme nous avons pu le constater précédemment, les solutions pour les modes 2 et 3 sont exprimés dans l'espace de Laplace. Compte tenu de la complexité de l'inversion de la solution vers l'espace temporel, nous avons recours à un algorithme d'inversion dit de *Stehfest-Graver.* Cette méthode est reconnue pour sa stabilité numérique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le principe de la méthode consiste à approximer la fonction à inverser $\tilde{f}(s)$ à l'aide d'une delta-série en utilisant la formule suivante :

$$f(t) \simeq \frac{\ln(2)}{t} \sum_{i=1}^{N} V_i \tilde{f}\left(i \frac{\ln(2)}{t}\right)$$

où $V_i = (-1)^{i+(N/2)} \dfrac{\sum_{k=E((i+1)/2)}^{min(i,N/2)} k^{N/2} (2k)!}{\left(\frac{N}{2}-k\right)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!}$

avec $E(x)$ la fonction partie entière et N le nombre de termes de la série. Il est en général compris entre 10 et 20. Dans notre cas nous avons choisi $N=18$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Modélisation A

2.1 Caractéristiques de la modélisation A

Modélisation 3D_HMS. Le maillage est composé de 1806 HEXA8 et de 204 PENTA6.
Le temps de simulation est de $t=86,4\,s$ (soit $t=0,001\ jours$) effectué en 10 pas de temps.

2.2 Résultats

La 2.2-1représente les contraintes radiales pour un angle $\theta=90°$, soit suivant l'axe y. Les résultats de modélisation et analytiques sont représentées. Si l'allure globale est la même il y a cependant des différences qui sont logiques : tout d'abord pour des raisons de temps de calculs le maillage est ici grossier notamment dans l'épaisseur h. Par ailleurs nous sommes assez loin d'une géométrie infinie et les contraintes de cisaillement au bord ne sont pas appliquées. Enfin le formalisme en contrainte effective/contrainte totale proposé par Abousleiman est légèrement différent du notre et la comparaison nécessite certains ajustements.

Sachant cela, on peut considérer que cet accord est tout à fait acceptable.

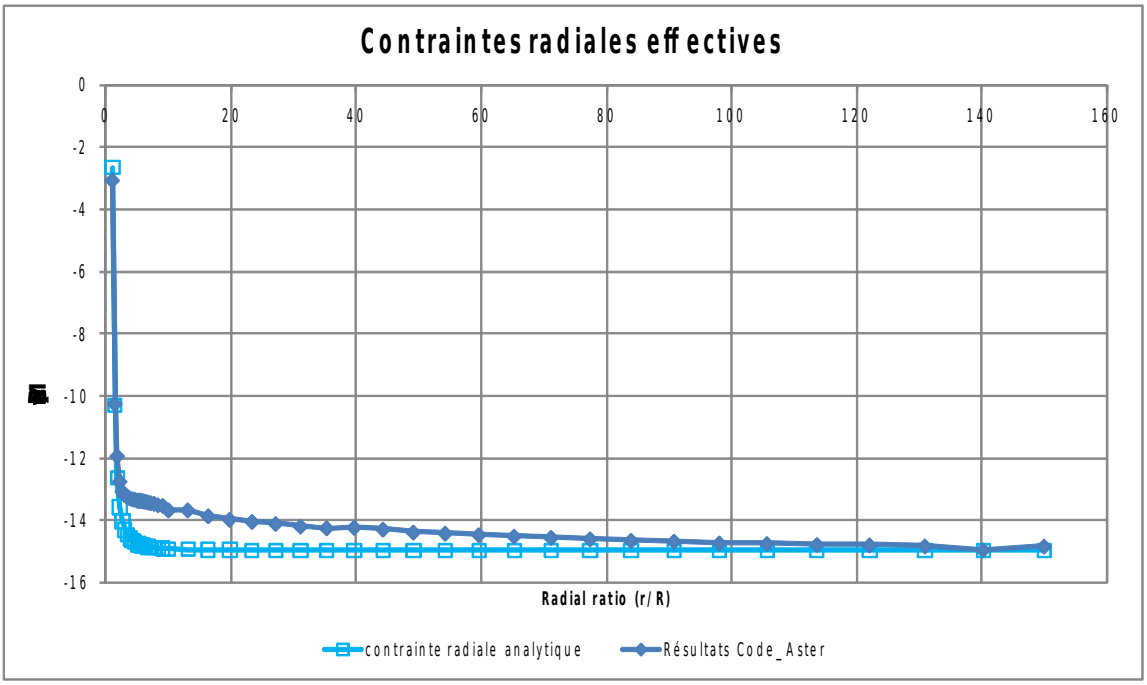


Figure 2.2-1 : Géométrie modélisée

2.3 Valeurs testées

Conformément à 1, on regarde les contraintes radiales au temps $t=86,4\,s$ (soit $t=0,001\ jours$).

$N°$ NŒUD	$COOR_X$	$COOR_Y$	$COOR_Z$	Référence $PRE1\,(MPa)$	Aster $PRE1\,(MPa)$	Tolérance admise $(\%)$
2286	0	0.14	0.5	10.5	9.93	10

$N°$ NŒUD	$COOR_$	$COOR_$	$COOR_Z$	Référence $\sigma_r\,(MPa)$	Aster $SIYY\,(MPa)$	Tolérance $(\%)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2286	0	0.14	0.5	10.3	10.25	10
2582	0	13.1	0.5	14.9	14.8	10

3 Synthèse des résultats

Les résultats sont cohérents avec la solution analytique.

4 Références

1. Abousleiman, Y. Ekbote, S. « Solution for the inclined Borehole in a Porothermoelastic Transversly Isotropic Medium ». Journal of Applied Mechanics. Vol. 72 (2005)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)