WTNV109 - Chargement hydrique et mécanique d'un milieu poreux saturé

Résumé :

On considère un problème tridimensionnel de couplage thermo-hydro-mécanique d'un milieu poreux saturé.

Ce test consiste à étudier l'effet de la mécanique et de l'hydraulique sur la thermique. On étire l'élément en lui imposant un déplacement dans la direction z , on impose une pression hydraulique sur l'ensemble du domaine et on étudie l'effet de ces chargements sur la température du modèle. Il s'agit de regarder le très faible couplage de la poromécanique vers la thermique. On se limite au premier pas de temps.

Les modèles étudiés sont $2D$ plans (DPQ8 et DPTR6) et $3D$ volumique (HEXA20) avec un comportement linéaire pour l'hydraulique et la thermique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

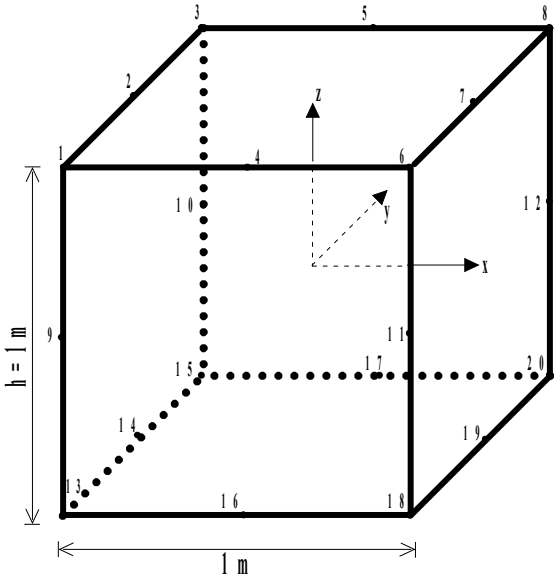
1 Problème de référence

1.1 Présentation

On étudie dans ce cas test le comportement thermo-hydro-mécanique d'un milieu poreux saturé constitué par un seul fluide: l'eau dans sa phase liquide. Il s'agit dans *Code_Aster* d'une modélisation THM. La loi de comportement du fluide associée est de type LIQU_SATU.

1.2 Géométrie

On considère un cube de 1m de coté centré sur le centre de l'axe $(-0,5 \leqslant x \leqslant 0,5\,;-0,5 \leqslant y \leqslant 0,5\,;-0,5 \leqslant z \leqslant 0,5\,;)$.



1.3 Propriétés du matériau

solide	Masse volumique $(kg.m^{-3})$	$2.\times10^{3}$
	Module d'Young drainé $E(Pa)$	$225.\times10^{6}$
	Coefficient de Poisson	$0.$
	Coefficient de dilatation thermique du solide (K^{-1})	$8.\times10^{-6}$
Fluide	Masse volumique $(kg.m^{-3})$	10^{3}
	Chaleur à pression constante $(J.K^{-1})$	2.85×10^{6}
	Coefficient de dilatation thermique du liquide (K^{-1})	10^{-4}
	Dérivée de la conductivité du fluide par rapport à la température	$0.$
Thermique	Conductivité homogénéisée $(W.K^{-1}m^{-1})$	1.7
	Dérivée de la conductivité homogénéisée par rapport à la température	$0.$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Coefficients d'homogénéisation	Coefficient de $Biot$	10^{-12}
	Porosité	0.4
Coefficients homogénéisés	Masse volumique $(kg.m^{-3})$	1.6×10^{3}
	Chaleur à contrainte constante $(J.K^{-1})$	2.85×10^{6}

1.4 Conditions aux limites et chargements

- Élément complet :
  pression du fluide $PRE1=500.0\,Pa$ (pas d'écoulement ni de variation de la masse d'eau)
- Face inférieure :

  déplacements $u_x=0.0\,m\,,u_y=0.0\,m\,,u_z=0.0\,m.$
- Face supérieure :
  déplacement $u_z=10^{-3}\,m$

1.5 Conditions initiales

Les champs de déplacement, pression, température sont initialement tous nuls, la température de référence vaut $T_0=273\,°K$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

La solution de référence est unidimensionnelle car elle ne dépend que de la coordonnée verticale. On raisonnera donc sur un axe linéaire selon z.

Si on néglige la gravité et qu'on considère qu'il n'y a pas de source de chaleur externe, l'équation de la thermique est donnée par l'expression suivante :

$$h_l^m \frac{d\, m_l}{dt} + \frac{\delta\, Q'}{dt} Div\, M_l + divq = 0 \quad (1)$$

Où h_l^m est l'enthalpie massique de l'eau, m_l sa masse, M_l son flux, q le flux de chaleur et Q' la chaleur non convectée.
L'équation de conservation de la masse est la suivante :

$$\frac{d\, m_l}{dt} + Div\, M_l = 0 \quad (2)$$

En l'absence de flux hydrique, l'équation (1) se simplifie pour devenir :

$$\frac{\delta\, Q'}{dt} + divq = 0 \quad (3)$$

Dans cette équation, la quantité Q' représente la chaleur reçue par le système dans une transformation pour laquelle il n'y a pas d'apports de chaleur par entrée de fluide. On choisit une variation de pression faible et des paramètres de manière à ce que la température varie peu et donc que :

$$\frac{d\, Q'}{T} = \frac{d\, Q'}{T_0}$$

dQ' a par conséquent cette expression :

$$dQ' = 3\alpha_0 K_0 T_0 d\,\varepsilon_v + C_0^{\varepsilon} dT - 3\,\alpha_l^m T_0 dp_l$$

avec :

- α_0 le coefficient de dilatation thermique homogénéisée équivalent à celui du solide α_s .
- K_0 le coefficient drainé d'élasticité.
- C_0^{ε} la chaleur a déformation constante qui a pour expression $C_0^{\varepsilon} = C_0^{\sigma} - 9 T_0 K_0 \alpha_0^2$ et C_0^{σ} la chaleur à contrainte constante.
- α_l^m Le coefficient de dilatation thermique relative du liquide par rapport au squelette, il a pour expression : $\alpha_l^m = (b-\phi)\alpha_s + \phi\,\alpha_l$ avec b le coefficient de Biot, ϕ la porosité et α_l le coefficient de dilatation du liquide.
- $d\,\varepsilon_v$ La variation de déformation volumique.
- dp_l La variation de pression de liquide.

Par ailleurs, le flux de chaleur a l'expression suivante : $q = -\lambda_T \partial \frac{T}{\partial z}$ où λ_T est le coefficient de conductivité thermique.
En remplaçant dQ' et q par leur valeur dans l'équation (3) et se limitant à seul pas de temps Δt , on obtient :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$3\alpha_0 K_0 T_0 \Delta\varepsilon_v - 3\alpha_l^m T_0 \Delta p_l + C_0^\varepsilon \Delta T = -\Delta t\, div\, q = \lambda_l \Delta t \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

En considérant des températures et les déplacements initialement nuls, on peut écrire :
$\Delta T = T(t) - T(0) = T$ et $\Delta\varepsilon = \varepsilon(t) - \varepsilon(0) = \varepsilon$ et $\Delta p_l = p_l(t) - p_l(0) = p_l$
Donc au premier pas de temps, on aura :

$$T - a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = b$$

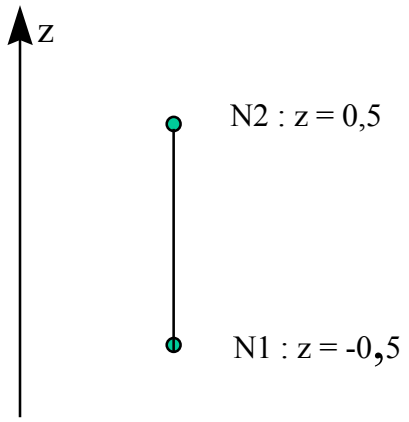
avec $a = \frac{\lambda_l \Delta T}{C_0^\varepsilon}$ et $b = -\frac{3\alpha_0 K_0 T_0 \varepsilon - 3\alpha_l^m T_0 p_l}{C_0^\varepsilon}$

La formulation variationnelle de cette expression (dans le cas unidimensionnel) est alors la suivante :

$$\int_\Omega T.\hat{T}\, dz + a\int_\Omega \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \hat{T}}{\partial z} dz - a\int_{\partial\Omega} \frac{\partial T}{\partial z}\hat{T}\, dz = \int_\Omega b.\hat{T}\, dz \qquad (4)$$

Pour établir la solution analytique on considère un unique élément de degré 1 puisque en modélisation THM la partie thermo-hydraulique est traitée par des éléments linéaires.

Soit un élément linéaire :



On rappelle les conditions aux limites : $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ aux 2 extrémités (z=0,5 et z = -0,5)

La température sur la base des fonctions de formes s'écrit de la manière suivante :

$$T(z,t) = \sum_{i=1}^{i=2} T^i(t)\lambda_i(z)$$

avec

$$\lambda_1(z) = 0{,}5(1+2z)$$

et

$$\lambda_2(z) = 0{,}5(1-2z)$$

On introduit alors les matrices suivantes :

$$[A] = [A_{ij}]\,;\, A_{ij} = \int_{-0,5}^{0,5} \lambda_i \lambda_j\, dz$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$[B]=[B_{ij}]\ ;\ B_{ij}=\int_{-0,5}^{0,5}\frac{\partial \lambda_i}{\partial z}\frac{\partial \lambda_j}{\partial z}dz$$

ce qui conduit à :

et

$$[A]=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\qquad [B]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

On note ensuite classiquement :

$$\{T\}=\begin{Bmatrix}T^1\\ T^2\end{Bmatrix}$$

et

$$\{\frac{\partial T}{\partial t}\}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial T^1}{\partial t}\\ \frac{\partial T^2}{\partial t}\end{Bmatrix}$$

L'équation (4) devient alors

$$[A]\{T\}+a[B]\{T\}-a[A]\{\frac{\partial T}{\partial t}\}=[A]\{b\}$$

avec les conditions aux limites imposées (déplacement nul en bas et flux de températures nuls aux deux extrémités), on a :

$$\{b\}=\begin{Bmatrix}0\\ b\end{Bmatrix}\ et\ \{\frac{\partial T}{\partial t}\}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Ce qui au final nous donne

$$\begin{Bmatrix}T^1\\ T^2\end{Bmatrix}+a[A]^{-1}[B]\begin{Bmatrix}T^1\\ T^2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ b\end{Bmatrix}$$

Finalement on obtient :

$$\begin{bmatrix}1+6a & -6a\\ -6a & 1+6a\end{bmatrix}\{T\}=\begin{Bmatrix}T^1\\ T^2\end{Bmatrix}$$

2.2 Grandeurs et résultats de référence

Pour un temps court de 100s, on aura

$$\begin{Bmatrix}T^1\\ T^2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2.10^{-14}\\ 1{,}045.10^{-7}\end{Bmatrix}$$

On considérera T^1 nul.

2.3 Incertitude sur la solution

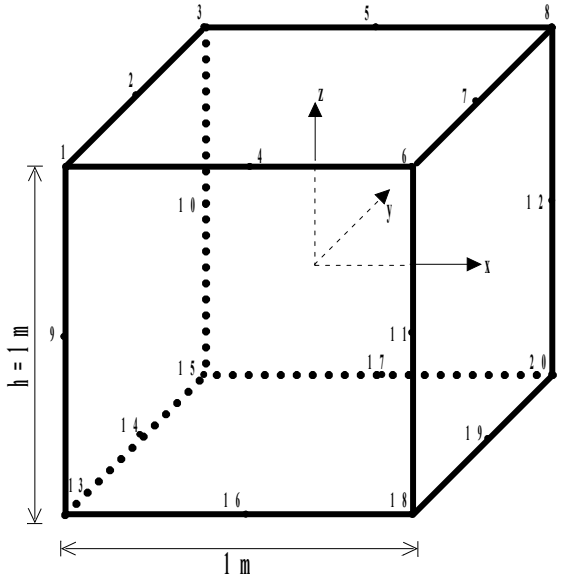
Aucune

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique 3D_THM



3.2 Caractéristiques du maillage

1 maille HEXA20.

3.3 Grandeurs testés et résultats

Discrétisation en temps: un seul pas de temps de $100\,s$. Le schéma en temps est implicite $(\theta=1)$.
Les résultats correspondent parfaitement à la solution analytique.

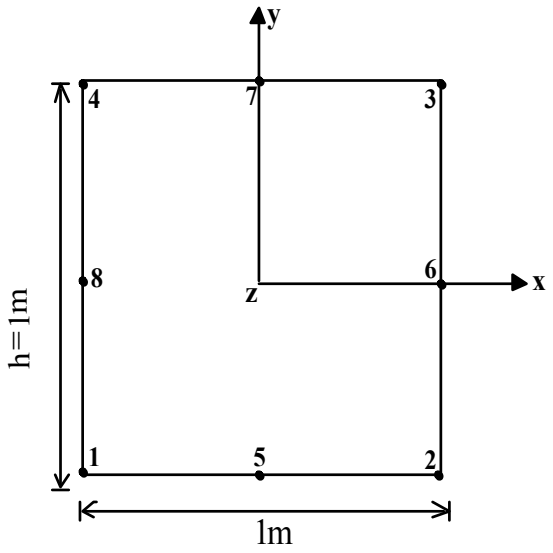
Nœud	Type de valeur	Instant (s)	Référence (analytique)	Tolérance $(\%)$
N1 , N3	*TEMP*	10^2	-1.045×10^{-7}	0,1
N6 , N8	*TEMP*	10^2	-1.045×10^{-7}	0,1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation plane: D_PLAN_THM



4.2 Caractéristiques du maillage

1 maille QUAD8.

4.3 Grandeurs testés et résultats

Discrétisation en temps : un seul pas de temps de 100s. Le schéma en temps est implicite $(\vartheta=1)$.
Les résultats correspondent parfaitement à la solution analytique.

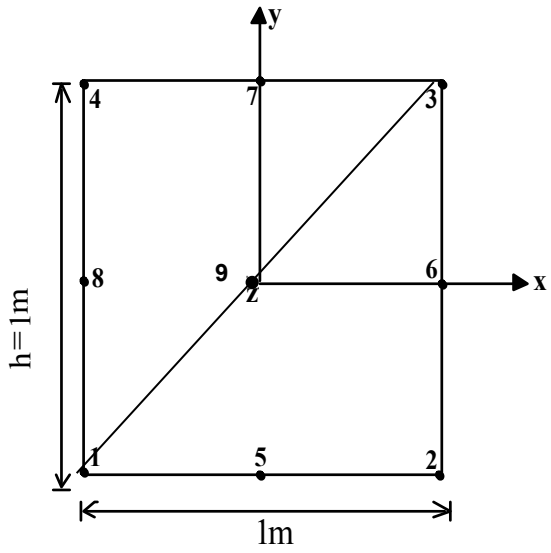
Nœud	Type de valeur	Instant (s)	Référence (analytique)	Tolérance (%)
N3	*TEMP*	10^2	-1.045×10^{-7}	0,1
N4	*TEMP*	10^2	-1.045×10^{-7}	0,1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation plane :D_PLAN_THM



5.2 Caractéristiques du maillage

2 mailles TRIA6.

5.3 Grandeurs testés et résultats

Discrétisation en temps : un seul pas de temps : $10^2 s$. Le schéma en temps est implicite $(\vartheta = 1)$. Les résultats correspondent parfaitement à la solution analytique.

Nœud	Type de valeur	Instant (s)	Référence (analytique)	Tolérance $(\%)$
N3	*TEMP*	10^2	-1.045×10^{-7}	0,1
N4	*TEMP*	10^2	-1.045×10^{-7}	0,1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique 3D_THM.

6.2 Caractéristiques du maillage

2 maille PENTA15.

6.3 Grandeurs testés et résultats

Discrétisation en temps: un seul pas de temps : $10^2 s$. Le schéma en temps est implicite $(\theta=1)$. Les résultats correspondent parfaitement à la solution analytique.

Nœud	Type de valeur	Instant (s)	Référence (analytique)	Tolérance $(\%)$
N3	*TEMP*	10^2	-1.045×10^{-7}	0,1
N4	*TEMP*	10^2	-1.045×10^{-7}	0,1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

Les résultats sont en cohérence avec la solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)