HSNV120 - Traction hyperélastique d'un barreau sous chargement thermique

Résumé :

Ce test thermomécanique quasi-statique consiste à chauffer uniformément un barreau parallélépipédique, le soumettre à une traction importante pour finalement le laisser revenir dans un état déchargé. On valide ainsi la cinématique des grandes déformations hyperélastiques (commande STAT_NON_LINE, mot-clé COMPORTEMENT) pour une relation dec comportement élastique non-linéaire (ELAS_VMIS_LINE et ELAS_VMIS_TRAC) avec chargement thermique.

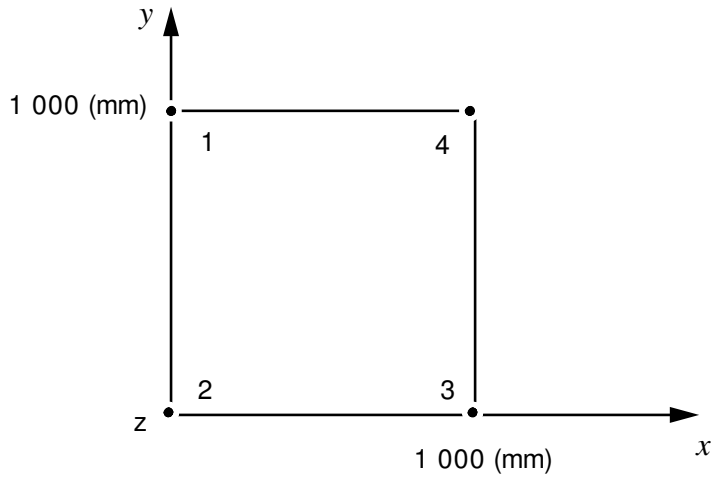
Le barreau est modélisé par un élément volumique (HEXA20, modélisation A) ou bien quadrangulaire (QUAD8, hypothèse des contraintes planes, modélisation B).

Les résultats obtenus par *Aster* ne diffèrent pas de la solution théorique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

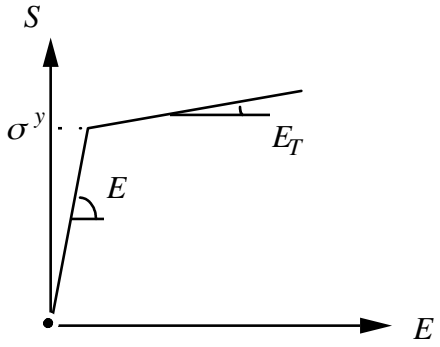
1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés de matériaux

Le matériau obéit à une loi de comportement hyperélastique non linéaire isotrope à écrouissage linéaire isotrope.

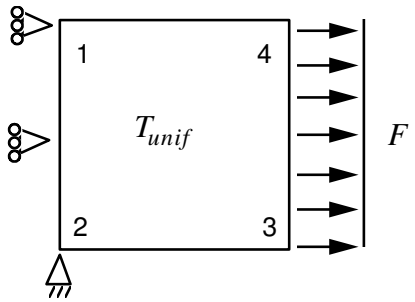


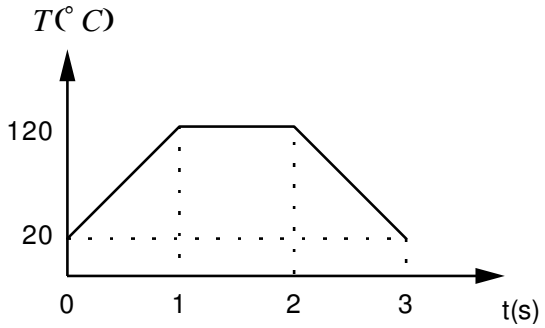
$E = 2.10^5$ MPa
$E_T = 2.10^3$ MPa
$\sigma^y = 10^3$ MPa
$\nu = 0,3$
$\alpha = 10^{-4}$ K^{-1}

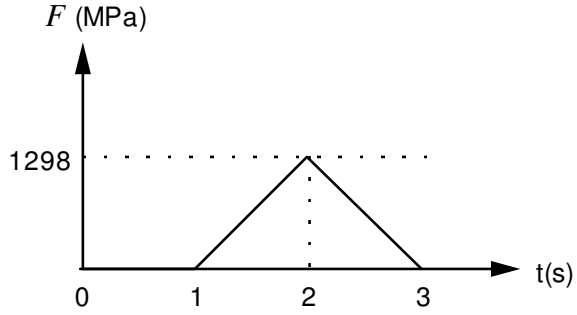
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargements

Le barreau bloqué dans la direction Ox sur la face [1,2] est soumis à une température uniforme T et un effort de traction F réparti sur la face [3,4]. Les séquences de chargement sont les suivantes :







Température de référence : $T_{réf}=20\,°C$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On cherche le champ de déplacement U sous la forme :

$$\mathbf{U}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ux \\ vy \\ vz \end{pmatrix}$$

Le gradient de la transformation, la déformation et sa part mécanique sont alors :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1+u & 0 & 0 \\ 0 & 1+v & 0 \\ 0 & 0 & 1+v \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\,\mathbf{F} - \mathbf{1}\right) = \begin{pmatrix} \frac{u(u+2)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v(v+2)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v(v+2)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E^m} = \mathbf{E} - \alpha\,\Delta T\,\mathbf{1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} a = \frac{u(u+2)}{2} - \alpha\,\Delta T \\ b = \frac{v(v+2)}{2} - \alpha\,\Delta T \end{cases}$$

Remarque :

$|(E^m)_{eq} = |a-b| = a-b$ (on suppose que $a > b$)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La relation de comportement s'écrit :

$$\begin{cases} S_{xx} = K(a+2b) + \frac{2}{3}G(a-b) \\ S_{yy} = S_{zz} = K(a+2b) - \frac{1}{3}G(a-b) \end{cases}$$

avec :

$$3K = \frac{E}{1-2\nu}$$ module de compressibilité

Pour déterminer G en tenant compte de l'écrouissage linéaire, on introduit :

- le module de cisaillement : $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$
- le module d'écrouissage : $R' = \frac{E\,E_T}{E-E_T}$,

La "pseudo variable interne" p vaut alors :

$$p = \frac{2\mu\left(\mathbf{E^m}\right)_{eq} - \sigma^y}{R'+3\mu} = \frac{2\mu(a-b) - \sigma^y}{R'+3\mu}$$

Finalement, G s'écrit :

$$G = \frac{\sigma^y + R'\,p}{a-b}$$

En tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{cases} S_{xx} = \frac{F}{1+u} & \text{(charge morte)} \\ S_{yy} = 0 & \text{(bord libre)} \end{cases}$$

Le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} K(a+2b) + \frac{2}{3}\left[\sigma^y + R'\frac{2\mu(a-b) - \sigma^y}{R'+3\mu}\right] = \frac{F}{1+u} \\ K(a+2b) - \frac{1}{3}\left[\sigma^y + R'\frac{2\mu(a-b) - \sigma^y}{R'+3\mu}\right] = 0 \end{cases}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Il s'écrit aussi :

$$\begin{cases} 3K(a+2b) &= \dfrac{F}{1+u} \\ 2\mu(a-b) &= \dfrac{F}{1+u}\left(1+\dfrac{3\mu}{R'}\right)-\sigma^y\dfrac{3\mu}{R'} \end{cases}$$

A F fixé, il s'agit donc d'un système non linéaire en u et v, puisque a est quadratique en u et b quadratique en v.

Néanmoins, on peut choisir de fixer u (donc a) et résoudre un système linéaire en F et b (duquel on déduit p et v) :

- $a = \dfrac{u(u+2)}{2}-\alpha\,\Delta T$
- $\begin{cases} \dfrac{1}{1+u}F-6Kb &= 3Ka \\ \left(1+\dfrac{3\mu}{R'}\right)\dfrac{1}{1+u}F+2\mu b &= 2\mu a+\sigma^y\dfrac{3\mu}{R'} \end{cases}$
- $p = \dfrac{2\mu(a-b)-\sigma^y}{R'+3\mu}$
- $v = \sqrt{1+2(b+a\,\Delta T)}-1$

Il reste alors à exprimer la contrainte de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{F})}\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}^T$$

Soit ici :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} &= \dfrac{1+u}{(1+v)^2}S_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

Quant à la force exercée sur la face [3,4], du fait de l'hypothèse de charges mortes, elle s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \mathsf{F}_x &= F\ S_o \\ \mathsf{F}_y &= 0 \\ \mathsf{F}_z &= 0 \end{cases}$$

où S_o : surface initiale de la face $[3,4]$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Résultats de référence

On adoptera comme résultats de référence les déplacements, la contrainte de Cauchy et la force exercée sur la face $[3,4]$ (en 3D seulement) :

Au temps $t=2\ s$ ($\Delta T=100\,°C$, traction F)

En fait, on cherche F tel que l'allongement :

$$u = 0,1$$

- $K=166\,666\ MPa \qquad \mu=76\,923\ MPa \qquad R'=2\,020\ MPa$
- $a=0.095$
- $$\begin{cases} 0.90909\ F - 10^{6}\ b = 47\,500 \\ 104.76\ F + 153.85\ 10^{3}\ b = 128.85\ 10^{3} \end{cases}$$
- $$\Rightarrow \begin{cases} F = 1\,298\ \text{MPa} \\ b = -0.046 \end{cases}$$
- $p = 8.91\ 10^{-2}$
- $v = -3.70\ 10^{-2}$
- $$\begin{array}{lll} \sigma_{xx} = 1\,399.66\ \text{MPa} & \sigma_{xy} = 0 & F_x = 1\,298\ 10^{9}\ \text{N} \\ \sigma_{yy} = 0 & \sigma_{xz} = 0 & F_y = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 & \sigma_{yz} = 0 & F_z = 0 \end{array}$$

Au temps $t=3\ s\ (\Delta T=0,\ F=0)$

Le barreau est revenu dans son état initial :

$$\begin{cases} \mathbf{U} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ p = 0 \end{cases}$$

2.3 Incertitude sur la solution

La solution est analytique. Aux erreurs d'arrondis près, on peut la considérer exacte.

2.4 Références bibliographiques

On pourra se référer à :

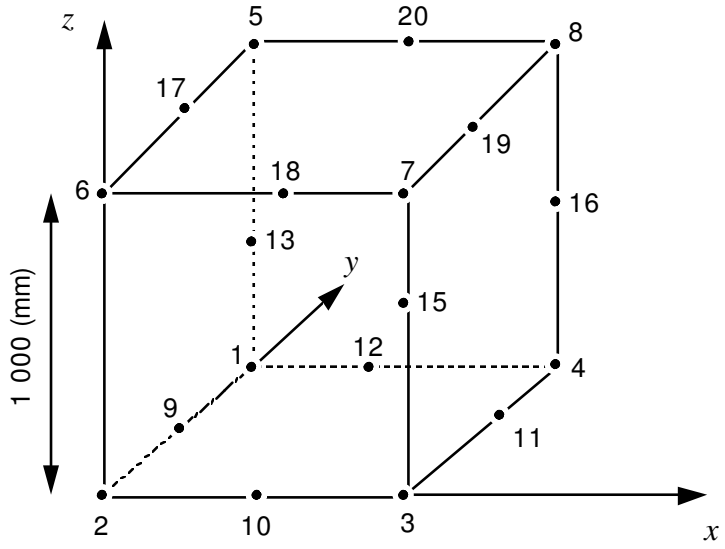
1) E. LORENTZ : Une relation de comportement hyperélastique non linéaire - Note interne EDF DER HI-74/95/011/0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique : 1 maille HEXA20
1 maille QUAD8



Conditions aux limites :

$N2: \; U_x = U_y = U_z = 0$ $N9, \; N13, \; N14, \; N5, \; N17:$
$N1: \; U_x = U_z = 0$ $U_x = 0$
$N6: \; U_x = U_y = 0$

Charge : Traction sur la face $[3\,4\,8\,7\,11\,16\,19\,15]$

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20

Nombre de mailles : 2

1 HEXA20
1 QUAD8

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

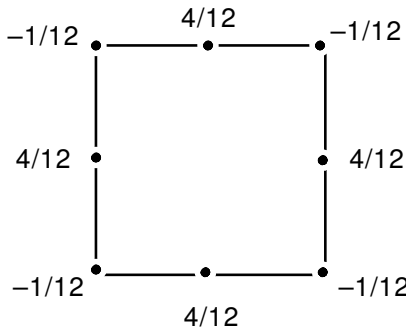
Identification	Référence
$t=2$ Déplacement DX ($N8$)	100
$t=2$ Déplacement DY ($N8$)	–37
$t=2$ Déplacement DZ ($N8$)	–37
$t=2$ Contraintes $SIGXX$ ($PG1$)	1399.66
$t=2$ Contraintes $SIGYY$ ($PG1$)	11013.986
$t=2$ Contraintes $SIGZZ$ ($PG1$)	0
$t=2$ Contraintes $SIGXY$ ($PG1$)	0
$t=2$ Contraintes $SIGXZ$ ($PG1$)	0
$t=2$ Contraintes $SIGYZ$ ($PG1$)	0
$t=2$ Variable p $VARI$ ($PG1$)	8.9110^{-2}
$t=3$ Déplacement DX ($N8$)	0
$t=3$ Déplacement DY ($N8$)	0
$t=3$ Déplacement DZ ($N8$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGXX$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGYY$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGZZ$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGXY$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGXZ$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGYZ$ ($PG1$)	0
$t=3$ Variable p $VARI$ ($PG1$)	0
$t=2$ Force nodale DX ($N8$)	-1.081710^{8}
$t=2$ Force nodale DY ($N8$)	0
$t=2$ Force nodale DZ ($N8$)	0

3.4 Remarques

Calcul de la force nodale :

La force appliquée sur la face $[3,4]$, F_x, se répartit entre les différents nœuds suivant la pondération suivante :

- nœuds sommets : $-1/12\,F_x$
- nœuds milieux : $4/12\,F_x$

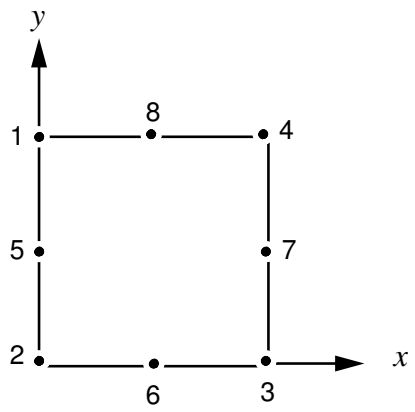


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation $2D$ contraintes planes : 1 maille QUAD8
1 maille SEG3



Conditions aux limites :

$N2$: $U_x = 0$ $U_y = 0$
$N1$: $U_x = 0$
$N5$: $U_x = 0$

Chargement :

Traction sur la face $[3\,4\,7]$ (maille SEG3)

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles : 2

1 QUAD8
1 SEG3

4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence
$t=2$ Déplacement DX ($N4$)	100
$t=2$ Déplacement DY ($N4$)	–37
$t=2$ Contraintes $SIGXX$ ($PG1$)	1399.66
$t=2$ Contraintes $SIGYY$ ($PG1$)	0
$t=2$ Contraintes $SIGXY$ ($PG1$)	0
$t=2$ Variable p $VARI$ ($PG1$)	8.9110^{-2}
$t=3$ Déplacement DX ($N4$)	0
$t=3$ Déplacement DY ($N4$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGXX$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGYY$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGXY$ ($PG1$)	0
$t=3$ Variable p $VARI$ ($PG1$)	0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Les résultats numériques et analytiques coïncident remarquablement. On peut toutefois s'étonner du temps d'exécution notoirement plus long pour la modélisation en contraintes planes ($123,8s$) que pour le 3D ($47,2s$). La différence s'explique par une discrétisation en temps beaucoup plus fine pour les contraintes planes, liée à des problèmes de convergence (l'algorithme de résolution de l'équation scalaire non linéaire en p est encore rudimentaire).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)