HPLP311 - Murakami 11.17 Fissure au centre d'une plaque mince rectangulaire faisant obstacle à un flux de chaleur uniforme en milieu isotrope

Résumé :

Il s'agit d'un calcul statique thermo-élastique linéaire isotrope.

C'est un test de base en $2\mathrm{D}$ plan pour un chargement thermique stationnaire calculé par éléments finis sur le même maillage avec un matériau isotrope en mode II.

Objectif :

- test de base en $2\mathrm{D}$ plan, pour un chargement thermique stationnaire calculé par éléments finis sur le même maillage, avec matériau isotrope, en mode II,
- validation du calcul de K_{II},
- variabilité de G en fonction de la topologie (secteurs, couronnes) du maillage rayonnant. Vérification de l'invariance des résultats en mécanique de la rupture, à une extrémité de fissure, par rapport au maillage de l'autre extrémité de la même fissure.

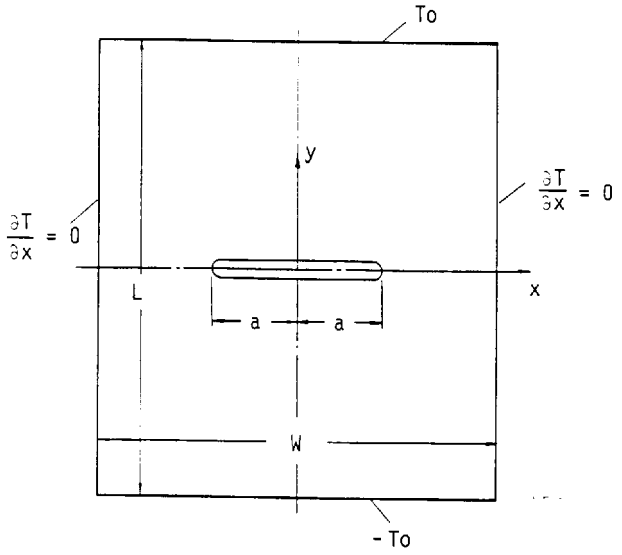
Le calcul est testé sur un maillage complet et un demi-maillage. Les paramètres L/W et $2\mathrm{A}/W$ étant fixes.

On mesure un écart relatif sur K_{II}, la précision est néanmoins mal définie.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Largeur de la plaque : $W = 0,6\,m$
Longueur de la plaque : $L = 0,3\,m$
Longueur de la fissure : $2a = 0,3\,m$

1.2 Propriétés du matériau

Notation pour propriétés thermoélastiques:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{bmatrix} (T - T_{ref})$$

$$S_{11} = 1/E_x$$
$$S_{22} = 1/E_y$$
$$S_{12} = -\nu_x/E_x = -\nu_y/E_y$$
$$S_{66} = 1/G_{xy}$$
$$\alpha_{11} = \alpha_x$$
$$\alpha_{22} = \alpha_y$$

On se limite au matériau isotrope, tant du point de vue thermique que mécanique :

$$E_x = E_y = 2.10^5\,MPa$$
$$\nu_x = \nu_y = 0,3$$
$$\alpha_x = \alpha_y = 1,2\,10^{-5}\,°C^{-1}$$
$$\lambda_x = \lambda_y = 54\,W/m\,°C$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargement

On considère deux modèles :

- le demi-modèle $x \geq 0$
- le modèle complet

Conditions aux limites mécaniques:

- demi-modèle

  $UX = 0$ le long de l'axe de symétrie $X = 0$
  $UY = 0$ au point $(W/2, 0)$

- modèle complet

  $UX = 0$ au point $(0, L/2)$
  $UY = 0$ aux points $(-L/2, 0)$ et $(L/2, 0)$

Conditions aux limites thermiques:

- demi-modèle

  $T = 100\,°C$ sur le bord supérieur $Y = L/2$
  $T = -100\,°C$ sur le bord inférieur $Y = -L/2$
  flux nul sur l'axe de symétrie, sur le bord libre $X = W/2$ et sur le bord de la fissure

- modèle complet

  $T = 100\,°C$ sur le bord supérieur $Y = L/2$
  $T = -100\,°C$ sur le bord inférieur $Y = -L/2$
  flux nul sur les bords libres $X = \pm W/2$ et sur le bord de la fissure

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Potentiel complexe.

2.2 Résultats de référence

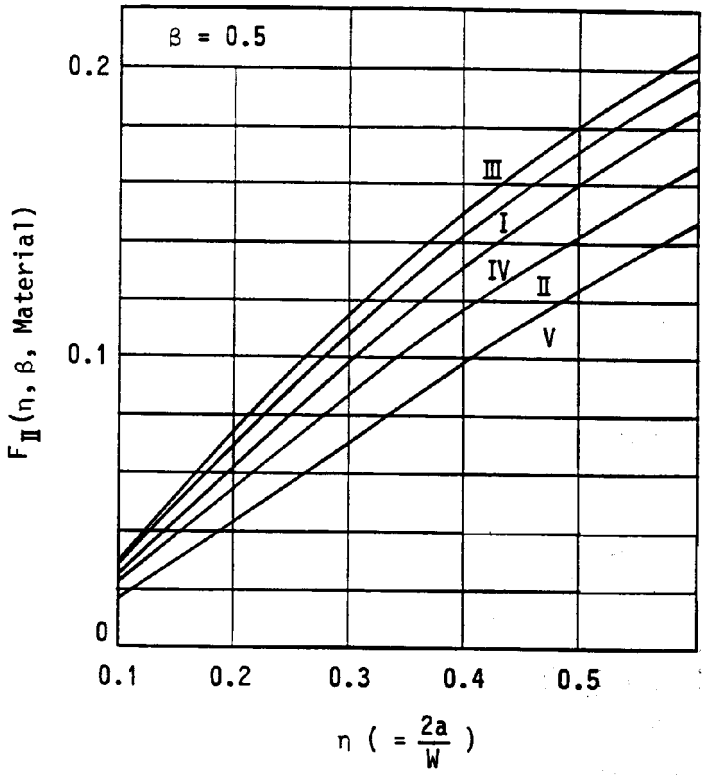
$$\eta = \frac{2a}{W}$$

$$\beta = \frac{L}{W}$$

$$K_{II} = \frac{\alpha_{11} T_0}{S_{11}} \bullet \sqrt{\frac{W}{2}} \bullet F_{II}$$

où le facteur de correction géométrique F_{II} est donné en fonction de η pour chaque matériau, dans le cas particulier $\beta = 0,5$ sur les courbes ci-dessous.

Le matériau isotrope étant représenté par la courbe I



2.3 Incertitude sur la solution

Précision non définie.

2.4 Références bibliographiques

1) Y. MURAKAMI : Stress Intensity Factors Handbook, case 11.17, pages 1045-1047. The Society of Materials Science, Japan, Pergamon Press, 1987.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisations A, B, C, D, E et F

3.1 Caractéristiques de la modélisation

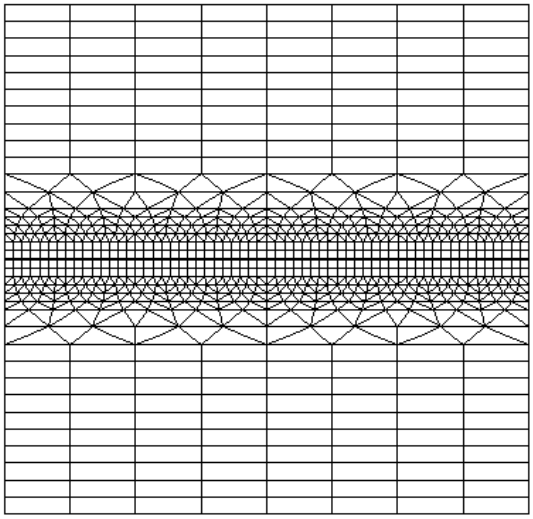
Ces 6 modélisations correspondent à 6 maillages où on fait varier 3 paramètres topologiques. Le tableau ci-dessous résume les différents cas étudiés :

	$NS=8$, $NC=4$	$NS=4$, $NC=3$
$rt=0,001*a$	A	B
$rt=0,01*a$	C	D
$rt=0,1*a$	E	F

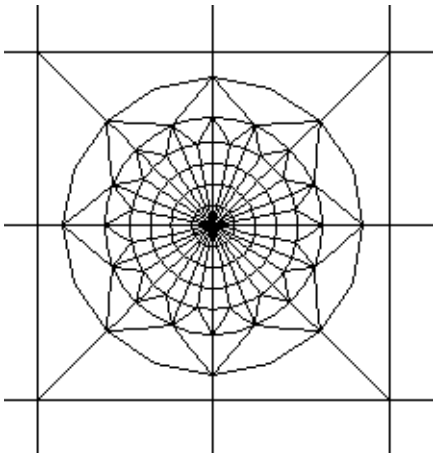
Les paramètres topologiques qui varient sont :

NS : nombre de secteurs sur 90°
NC : nombre de couronnes
rt : le rayon de la plus grande couronne (avec a : demi longueur de la fissure)

3.1.1 Modélisations A et B



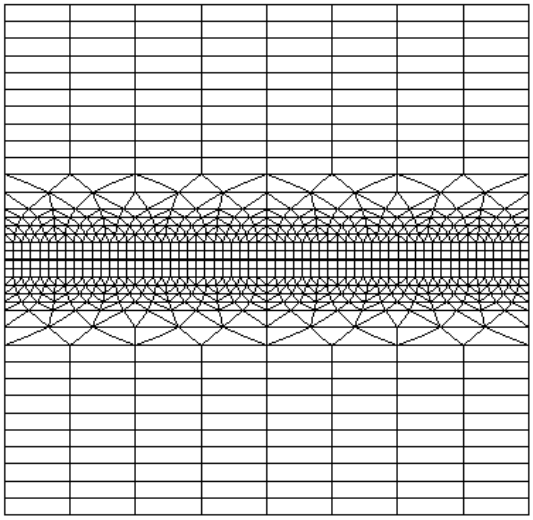
Demi maillage - Modélisation A



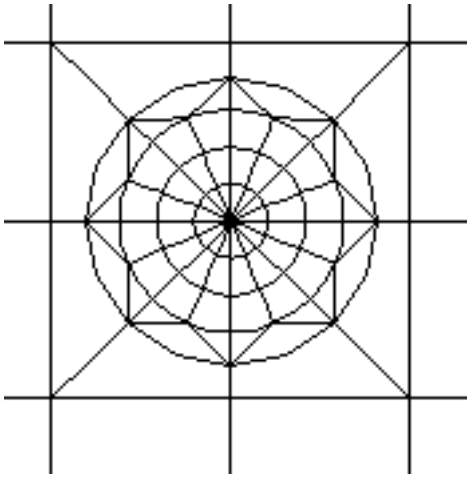
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Zoom de la pointe de fissure - Modélisation A

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



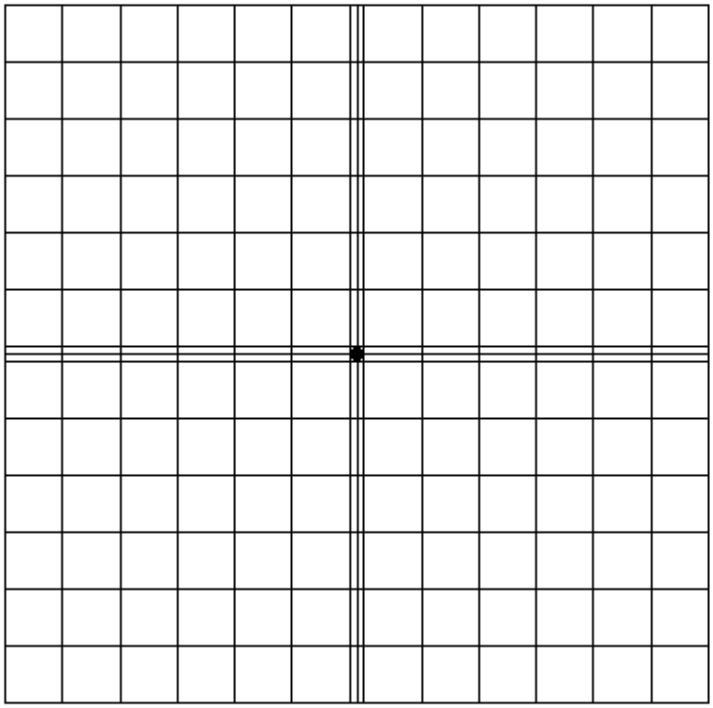
Demi maillage - Modélisation B



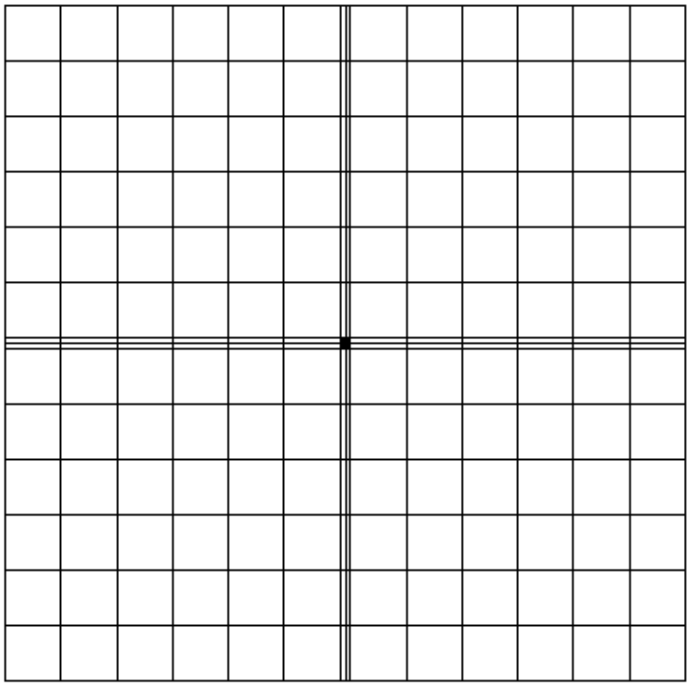
Zoom de la pointe de fissure - Modélisation B

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.1.2 Modélisations C et D



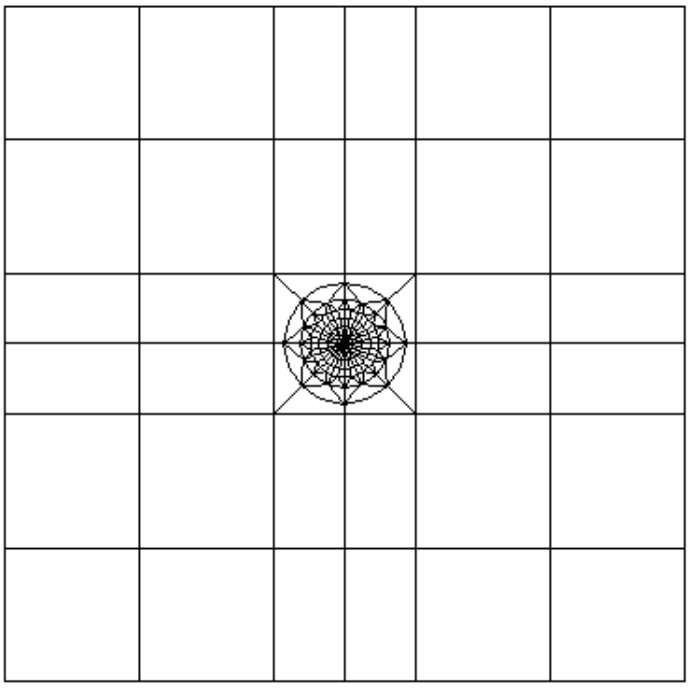
Maillage complet - Modélisation C



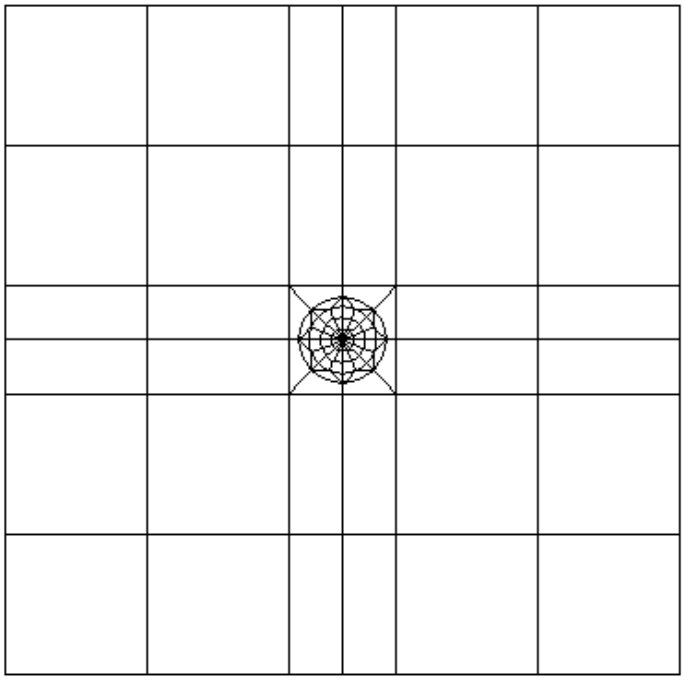
Maillage complet - Modélisation D

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.1.3 Modélisations E et F



Maillage complet - Modélisation E



Maillage complet - Modélisation F

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.1.4 Définition des rayons des couronnes

Pour ces différents cas, nous définissons les valeurs des rayons supérieurs et inférieurs, à préciser dans la commande CALC_G :

Modélisation A

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne	4 ième couronne
$rinf\ (m)$	3,75E–5	7,500E–5	1,125E–4	1,500E–4
$\mathrm{rsup}(m)$	7,50E–5	1,125E–4	1,500E–4	1,875E–4

Modélisation B

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne
$rinf\ (m)$	5,00E–5	1,00E–4	1,50E–4
$\mathrm{rsup}(m)$	1,00E–4	1,50E–4	2,00E–4

Modélisation C

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne	4 ième couronne
$rinf\ (m)$	3,75E–4	7,500E–4	1,125E–3	1,500E–3
$\mathrm{rsup}(m)$	7,50E–4	1,125E–3	1,500E–3	1,875E–3

Modélisation D

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne
$rinf\ (m)$	5,00E–4	1,00E–3	1,50E–3
$\mathrm{rsup}(m)$	1,00E–3	1,50E–3	2,00E–3

Modélisation E

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne	4 ième couronne
$rinf\ (m)$	3,75E–3	7,500E–3	1,125E–2	1,500E–2
$\mathrm{rsup}(m)$	7,50E–3	1,125E–2	1,500E–2	1,875E–2

Modélisation F

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne
$rinf\ (m)$	5,00E–3	1,00E–2	1,50E–2
$\mathrm{rsup}(m)$	1,00E–2	1,50E–2	2,00E–2

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2 Caractéristiques du maillage

Demi-maillage; maillage rayonnant à l'extrémité droite de la fissure.

Le tableau ci-dessous donne la constitution des maillages étudiés :

	$NS=8$, $NC=4$	$NS=4$, $NC=3$
$rt=0,001*a$	3831 nœuds, 1516 éléments, 884 TRI6, 632 QUA8.	3507 nœuds, 1388 éléments, 820 TRI6, 568 QUA8.
$rt=0,01*a$	1179 nœuds, 400 éléments, 104 TRI6, 296 QUA8.	855 nœuds, 272 éléments, 40 TRI6, 232 QUA8.
$rt=0,1*a$	659 nœuds, 240 éléments, 104 TRI6, 136 QUA8.	335 nœuds, 112 éléments, 40 TRI6, 72 QUA8.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Résultats des modélisations A, B, C, D, E et F

4.1 Valeurs testées

Identification	Référence	*Aster*	% différence
Diamètre couronne extérieure = $0,001*a$			
Maillage rayonnant	$NS=8$	$NC=4$	**Modélisation A**
K_{II} , couronne n°1	2,2347E+7	2,2814E7	2,09
K_{II} , couronne n°2	2,2347E+7	2,2813E7	2,08
K_{II} , couronne n°3	2,2347E+7	2,2814E7	2,09
K_{II} , couronne n°4	2,2347E+7	2,2814E7	2,09
Maillage rayonnant	$NS=4$	$NC=3$	**Modélisation B**
K_{II} , couronne n°1	2,2347E+7	2,282E7	2,10
K_{II} , couronne n°2	2,2347E+7	2,282E7	2,10
K_{II} , couronne n°3	2,2347E+7	2,281E7	2,09
Diamètre couronne extérieure = $0,01*a$			
Maillage rayonnant	$NS=8$	$NC=4$	**Modélisation C**
K_{II} , couronne n°1	2,2347E+7	2,166 10^{7}	3,058
K_{II} , couronne n°2	2,2347E+7	2,214 10^{7}	0,919
K_{II} , couronne n°3	2,2347E+7	2,214 10^{7}	0,919
K_{II} , couronne n°4	2,2347E+7	2,214 10^{7}	0,919
Maillage rayonnant	NS= 4	NC= 3	Modélisation D
K_{II} , couronne n°1	2,2347E+7	2,214 10^{7}	0,919
K_{II} , couronne n°2	2,2347E+7	2,214 10^{7}	0,919
K_{II} , couronne n°3	2,2347E+7	2,214 10^{7}	0,919
Diamètre couronne extérieure = $0,1*a$			
Maillage rayonnant	$NS=8$	$NC=4$	**Modélisation E**
K_{II} , couronne n°1	2,2347E+7	2,2632 10^{7}	1,276
K_{II} , couronne n°2	2,2347E+7	2,2572 10^{7}	1,009
K_{II} , couronne n°3	2,2347E+7	2,2572 10^{7}	1,008
K_{II} , couronne n°4	2,2347E+7	2,2564 10^{7}	0,972
Maillage rayonnant	$NS=4$	$NC=3$	**Modélisation F**
K_{II} , couronne n°1	2,2347E+7	2,255E7	0,932
K_{II} , couronne n°2	2,2347E+7	2,2568E7	0,988
K_{II} , couronne n°3	2,2347E+7	2,2568E7	0,987

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Identification	Référence	Aster	% différence
Diamètre couronne extérieure = $0,001*a$			
Maillage rayonnant	$NS=8$	$NC=4$	**Modélisation A**
G , couronne n°1	2,4969E+3	2,5984E+3	4,07
G , couronne n°2	2,4969E+3	2,5990E+3	4,09
G , couronne n°3	2,4969E+3	2,5992E+3	4,10
G , couronne n°4	2,4969E+3	2,5993E+3	4,10
Maillage rayonnant	$NS=4$	$NC=3$	**Modélisation B**
G , couronne n°1	2,4969E+3	2,600 10^{3}	4,134
G , couronne n°2	2,4969E+3	2,5996 10^{3}	4,114
G , couronne n°3	2,4969E+3	2,5996 10^{3}	4,111
Diamètre couronne extérieure = $0,01*a$			
Maillage rayonnant	$NS=8$	$NC=4$	**Modélisation C**
G , couronne n°1	2,4969E+3	2,451 10^{3}	1,842
G , couronne n°2	2,4969E+3	2,475 10^{3}	0,858
G , couronne n°3	2,4969E+3	2,475 10^{3}	0,858
G , couronne n°4	2,4969E+3	2,475 10^{3}	0,858
Maillage rayonnant	**NS= 4**	**NC= 3**	**Modélisation D**
G , couronne n°1	2,4969E+3	2,475 10^{3}	0,858
G , couronne n°2	2,4969E+3	2,475 10^{3}	0,858
G , couronne n°3	2,4969E+3	2,475 10^{3}	0,858
Diamètre couronne extérieure = $0,1*a$			
Maillage rayonnant	**NS= 8**	**NC= 4**	**Modélisation E**
G , couronne n°1	2,4969E+3	2,5624E3	2,627
G , couronne n°2	2,4969E+3	2,5503E3	2,139
G , couronne n°3	2,4969E+3	2,5499E3	2,124
G , couronne n°4	2,4969E+3	2,5489 E3	2,084
Maillage rayonnant	**NS= 4**	**NC= 3**	**Modélisation F**
G , couronne n°1	2,4969E+3	2,5470 E3	2,006
G , couronne n°2	2,4969E+3	2,5497 E3	2,117
G , couronne n°3	2,4969E+3	2,5491 E3	2,094

4.2 Remarques

Dans la référence, l'auteur suppose que $KI=0$, mais il ne le vérifie pas a posteriori.

En ce qui concerne le taux de restitution d'énergie G , si nous supposons que $KI=0$, nous tirons la valeur de référence à partir de la formule d'IRWIN en contraintes planes :

$$G_{ref}=(1/E)*KII^{2}$$

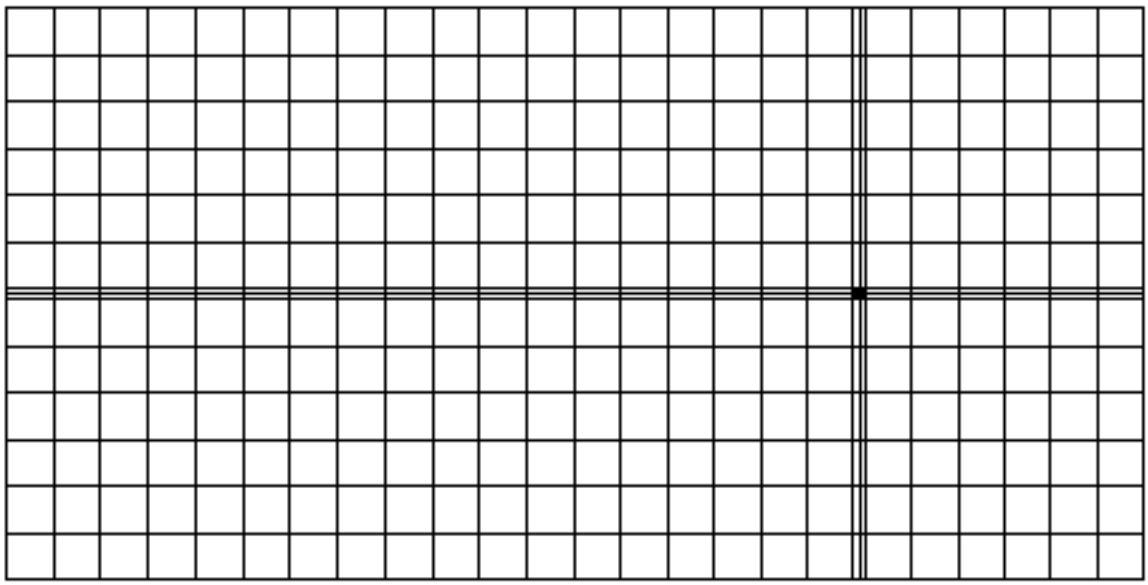
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation G

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Pour cette modélisation, nous utilisons le modèle complet avec les meilleurs paramètres NS, NC et rt calculés dans les modélisations précédentes. Nous avons donc utilisé les valeurs suivantes :

- $NS=8$,
- $NC=4$,
- $rt=0{,}01*a$.



Maillage complet

5.2 Caractéristiques du maillage

Modèle complet, avec maillage rayonnant seulement à l'extrémité droite de la fissure et maillage régulier, non raffiné, à l'extrémité gauche.

Le maillage est constitué de 1718 nœuds et 568 éléments, dont 464 éléments QUA8 et 104 éléments TRI6.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Diamètre couronne extérieure = $0,01*a$			
Maillage rayonnant	$NS=8$	$NC=4$	
K_{II} , couronne n°1	2,2347E+7	2,2640E7	1,31
K_{II} , couronne n°2	2,2347E+7	2,2640E7	1,31
K_{II} , couronne n°3	2,2347E+7	2,2640E7	1,31
K_{II} , couronne n°4	2,2347E+7	2,2641E7	1,31

Identification	Référence	Aster	% différence
Diamètre couronne extérieure = $0,01*a$			
Maillage rayonnant	$NS=8$	$NC=4$	
G , couronne n°1	2,4969E+3	2,5620E3	2,610
G , couronne n°2	2,4969E+3	2,5626E3	2,631
G , couronne n°3	2,4969E+3	2,5627E3	2,635
G , couronne n°4	2,4969E+3	2,5628E3	2,640

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Synthèse des résultats

Les écarts entre la solution de référence et les résultats de *Code_Aster* ne dépassent pas 3% sur les coefficients d'intensité de contraintes et 4% pour le taux de restitution d'énergie. On vérifie l'invariance des résultats par rapport aux différentes couronnes d'intégration.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)