SSNV515 – Essai de traction avec la loi de Rankine

Résumé

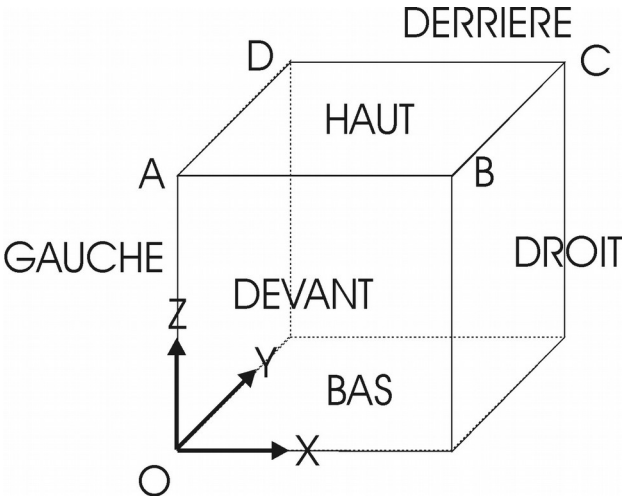
On réalise un essai de traction simple avec *la loi de Rankine*. Les solutions calculées sont comparées à une solution analytique. Trois modélisations dont proposées :

- une modélisation 0D avec SIMU_POINT_MAT ;
- une modélisation 3D ;
- une modélisation 2D axisymétrique ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



L'essai de traction simple est effectué sur un seul élément fini isoparamétrique de forme cubique $CUB4$. La longueur de chaque arête vaut 1. Les différentes facettes de ce cube sont des groupes de mailles nommés $HAUT$, BAS , $DEVANT$, $DERRIERE$, $DROIT$ et $GAUCHE$. Le groupe de mailles *SYM* contient par ailleurs les groupes de mailles BAS , $DEVANT$ et $GAUCHE$; le groupe de mailles $COTE$ les groupes de mailles $DERRIERE$ et $DROIT$.

1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés élastiques sont :

- module d'Young : $E=1\,MPa$
- coefficient de Poisson : $\nu=0,25$

La limite en traction est égale à $\sigma_t=1\,kPa$

1.3 Conditions aux limites et chargements

L'essai de traction simple consiste à imposer à l'éprouvette une élongation verticale tout en maintenant la pression latérale constante et égale à la contrainte isotrope initiale $P_0=10\,kPa$
Dans le modèle considéré, l'élément cubique représente un huitième de l'échantillon. Les conditions limites sont donc les suivantes :

- Les conditions de symétrie :
  - $u_z=0$ sur le groupe de maille BAS
  - $u_x=0$ sur le groupe de maille $GAUCHE$
  - $u_y=0$ sur le groupe de maille $DEVANT$
- Les conditions de pression latérale :
  - $P_n=P_0=10\,kPa$ sur les groupes de mailles $DROIT$ et $ARRIERE$
- Les conditions de chargement :
  - $u_z=+1$ sur le groupe de maille $HAUT$

Le chargement s'effectue en 30 pas de temps entre $t=0$ et $t=30$ pendant lesquels le déplacement imposé sur le groupe de mailles $HAUT$ varie de $u_z=0$ à $u_z=0.3$ (déformation verticale totale de 30%).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.4 Résultats

Les solutions sont post-traitées au point C, en termes de :

- contrainte verticale σ_{zz} ;
- déformation horizontale ϵ_{xx} ;
- norme de la déformation plastique déviatorique $e^P = \|\boldsymbol{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d' écart maximal entre $t=0$ et $t=20$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution analytique

Introduisons d'abord les notations suvantes :

$$\begin{cases} A = K + \frac{4}{3} G \\ B = K - \frac{2}{3} G \\ C = 2\left(K + \frac{G}{3} \right) \end{cases} \quad (1)$$

Avec $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ et $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ les modules de compressibilité et de cisaillement, respectivement.
Soit $\boldsymbol{C}$ le tenseur d'éalsticité de Hooke, on aura avec l'hypothèse $\epsilon_{yy} = \epsilon_{xx}$:

$$\boldsymbol{C}.d\boldsymbol{\epsilon} = \begin{cases} B\, d\epsilon_{zz} + C\, d\epsilon_{xx} \\ B\, d\epsilon_{zz} + C\, d\epsilon_{xx} \\ A\, d\epsilon_{zz} + 2B\, d\epsilon_{xx} \end{cases} \quad (2)$$

On notera pour simplifier la contrainte verticale à l'instant $+$ $\sigma^+ = \sigma^+_{zz}$, de sorte que le critère de Rankine s'écrit :

$$\sigma^+ \leq \sigma_t \quad (3)$$

On a par ailleurs :

$$\begin{cases} \sigma^{\text{préd}} = \sigma^- + \boldsymbol{n}.\boldsymbol{C}.d\boldsymbol{\epsilon} \\ \sigma^+ = \sigma^- + \boldsymbol{n}.\boldsymbol{C}.(d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda\, \boldsymbol{n}) = \sigma^{\text{préd}} - \underbrace{d\lambda\, \boldsymbol{n}.\boldsymbol{C}.\boldsymbol{n}}_{\Delta\sigma_C} \end{cases} \quad (4)$$

Avec $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et où :

$$d\lambda = \frac{\langle \sigma^{préd} - \sigma_t \rangle_+}{A} \quad (5)$$

D'après la loi d'écoulement associée, on a aussi :

$$\begin{cases} d\epsilon^P_{zz} = d\lambda = d\epsilon^P_v \\ e^P = \frac{2}{3} d\lambda \end{cases} \quad (6)$$

Comme $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\Delta\sigma_C = d\lambda\, A \quad (7)$$

La combinaison des équations (**7**), (**5**) et (**4**) nous donne la contrainte σ^+_{zz} . Les équations (**6**) et (**5**) nous donnent la norme de la déformation plastique déviatorique e^P .

Essayons d'obtenir maintenant l'expression de la déformation élastique horizontale $\epsilon^{\text{élas}}_{xx}$.
Latéralement, on a la condition $\sigma^+_{xx} = P_0$, soit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sigma_{xx}^{\text{préd}} - \Delta\sigma_{xx,C} = P_0 \tag{8}$$

Avec $\Delta\sigma_{xx,C} = d\lambda B$

On obtient alors en utilisant l'équation (**2**) :

$$\sigma_{xx}^{-} + C\,d\epsilon_{xx}^{\text{élas}} + B\,d\epsilon_{zz} - B\,d\lambda = P_0 \tag{9}$$

D'où l'incrément de déformation élastique horizontale :

$$d\epsilon_{xx}^{\text{élas}} = \frac{P_0 - \sigma_{xx}^{-} + B\left(d\lambda - d\epsilon_{zz}\right)}{C} \tag{10}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation A est réalisée sur un point matériel 0D avec SIMU_POINT_MAT.

3.2 Grandeurs testées et résultats

3.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point C, en termes de :

- contrainte verticale σ_{zz} ;
- déformation horizontale ϵ_{xx} ;
- norme de la déformation plastique déviatorique $e^P = \|\boldsymbol{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre $t=0$ et $t=20$. Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad [Pa]$$

Variable	Ecart absolu | Code_Aster − Analytique |
σ_{zz}	0
ϵ_{xx}	3.10^{-5}
e^P	$1.333\ 10^{-5}$

3.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation B est réalisée en 3D avec STAT_NON_LINE.

4.2 Grandeurs testées et résultats

4.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point C, en termes de :

- contrainte verticale σ_{zz} ;
- déformation horizontale ϵ_{xx} ;
- norme de la déformation plastique déviatorique $e^P = \|\boldsymbol{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre $t=0$ et $t=20$. Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad [Pa]$$

Variable	Ecart absolu | Code_Aster − Analytique |
σ_{zz}	0
ϵ_{xx}	3.10^{-5}
e^P	$1.333\ 10^{-5}$

4.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation C est réalisée sur un point matériel 2D axisymétrique avec STAT_NON_LINE.

5.2 Grandeurs testées et résultats

5.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point C, en termes de :

- contrainte verticale σ_{zz} ;
- déformation horizontale ϵ_{xx} ;
- norme de la déformation plastique déviatorique $e^P = \|\boldsymbol{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre $t=0$ et $t=20$. Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad [Pa]$$

Variable	Ecart absolu | Code_Aster − Analytique |
σ_{zz}	0
ϵ_{xx}	3.10^{-5}
e^P	$1.333\ 10^{-5}$

5.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation D est réalisée sur un point matériel 3D avec STAT_NON_LINE. La différence par rapport à la modélisation B est le calcul de l'état initial par un chargement thermique. Pour amener l'échantillon à la contrainte isotrope initiale $P_0=10\,kPa$, on amène l'échantillon de 20° à 30° celcius. Les déplacements de l'échantillon sont bloqués, de sorte que la dilatation thermique amène l'échantillon en compression. On obtient :

$$\sigma_0=\frac{E}{9(1-2\nu)}\alpha\Delta T=P_0$$

Soit la valeur suivante du coefficient de dilatation thermique : $\alpha=\frac{9(1-2\nu)P_0}{E\Delta T}$

6.2 Grandeurs testées et résultats

6.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point C , en termes de :

- contrainte verticale σ_{zz} ;
- déformation horizontale ϵ_{xx} ;
- norme de la déformation plastique déviatorique $e^P=\|\boldsymbol{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre $t=0$ et $t=20$. Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q=\sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{s}}:\underline{\underline{s}}}\ \ [Pa]$$

Variable	Ecart absolu | Code_Aster − Analytique |
σ_{zz}	0
ϵ_{xx}	3.10^{-5}
e^P	$1.333\ 10^{-5}$

6.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

On représente dans les figures suivantes l'évolution des différentes grandeurs lors de l'essai de traction avec la loi de Rankine.

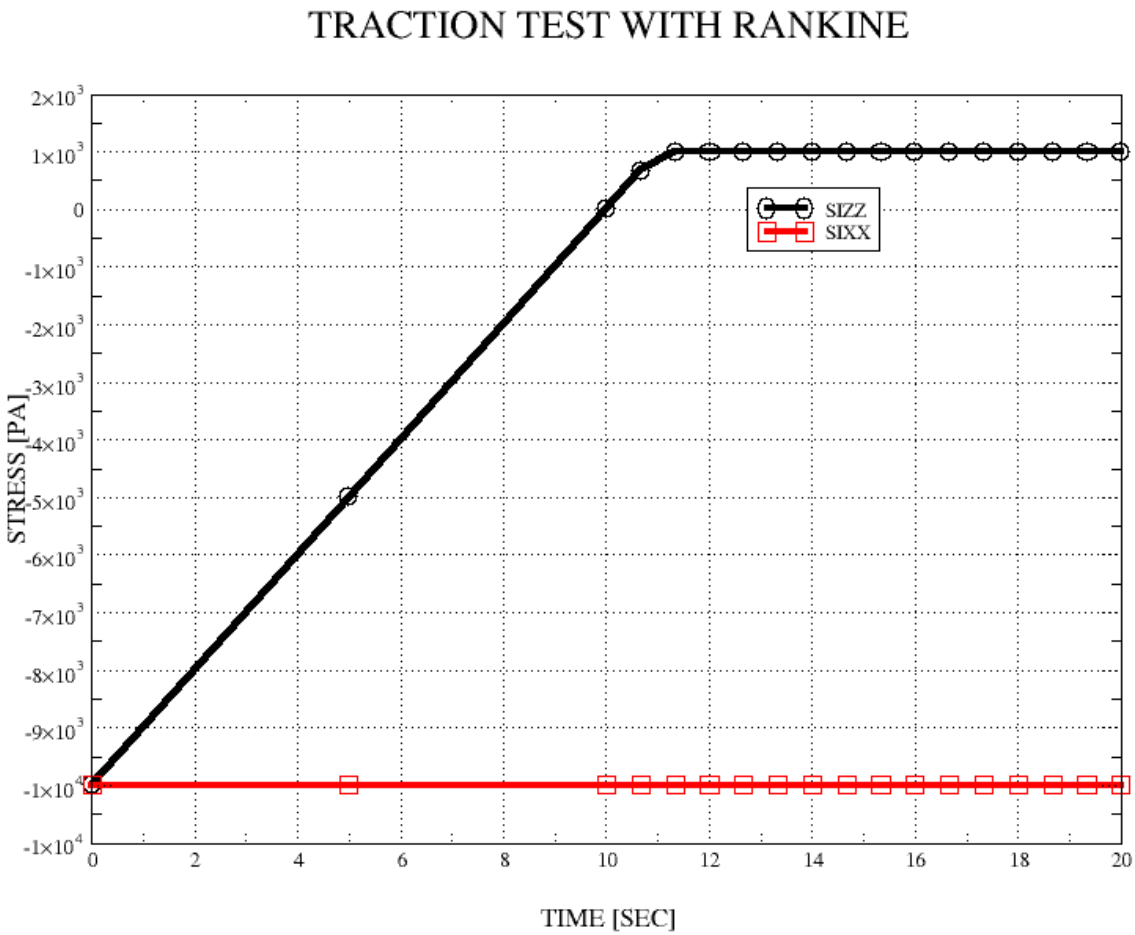


Figure **1** : *Evolution des contraintes lors de l'essai de traction*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

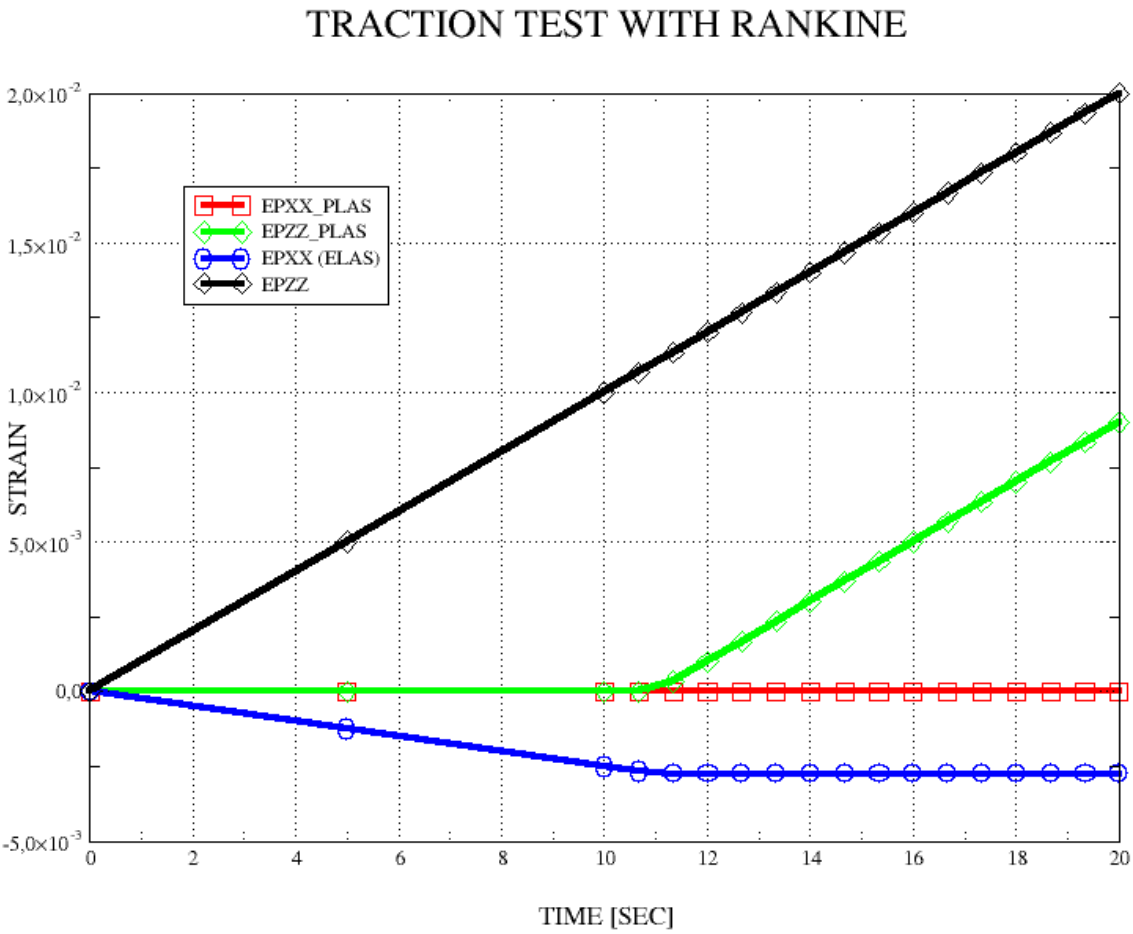


Figure **2** : *Evolution des déformations lors de l'essai de traction*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

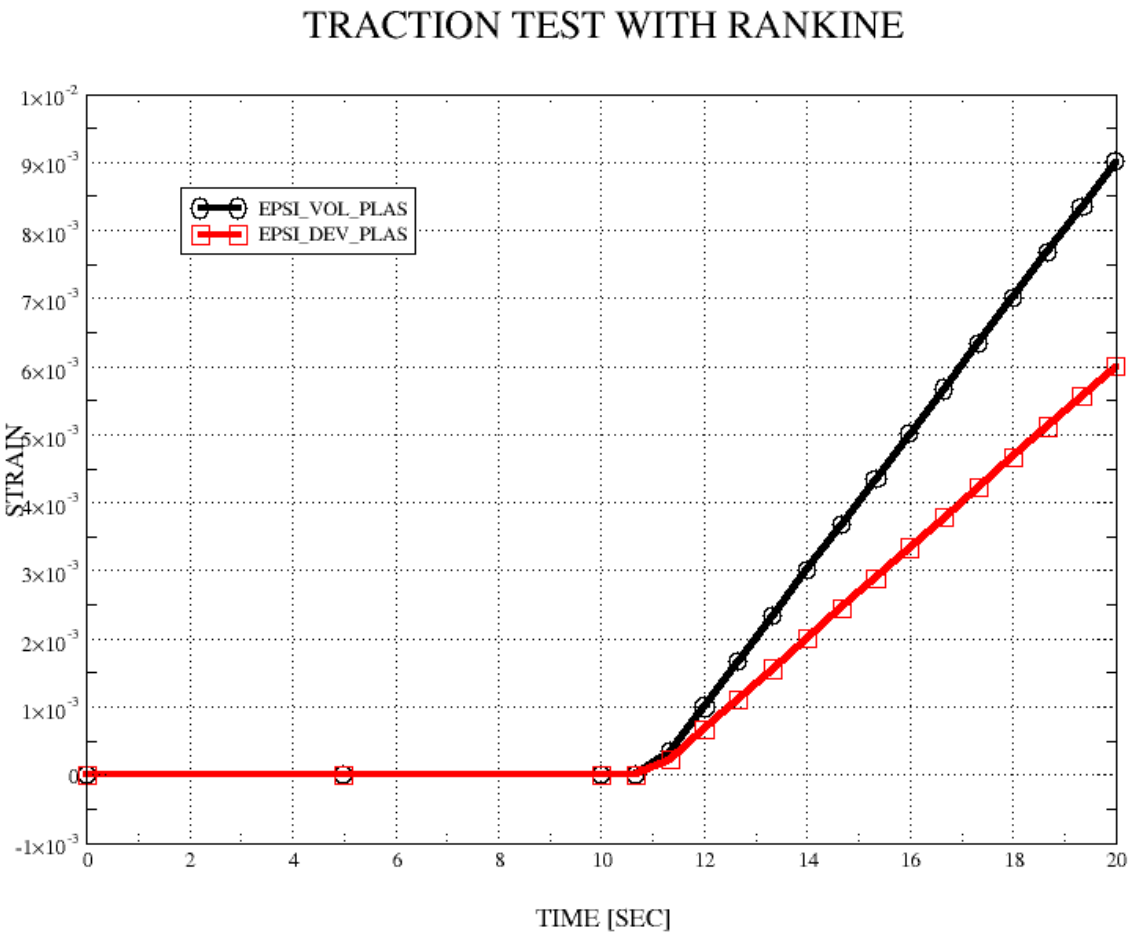


Figure **3** : *Evolution des variables internes lors de l'essai de traction*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)