SSNV221 – Essai hydrostatique avec un comportement DRUCK_PRAGER linéaire et parabolique

Résumé :

Le cas test propose un chargement purement hydrostatique pour la loi Drücker-Prager associée [R7.01.16]. La formulation de cette loi plastique, souvent utilisée pour les sols, est faite à la fois sur la partie déviatorique et hydrostatique ; néanmoins, la surface critère présente une singularité pour un état de contrainte purement hydrostatique. Ce cas-test analytique sert à vérifier l'écrouissage correct en cette singularité.

Le test est effectué sur un point matériel avec la commande SIMU_POINT_MAT. On travaille à déformations imposées.

On fait un test avec écrouissage linéaire (modélisation A) et un autre avec écrouissage parabolique (modélisation B).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Propriétés du matériau

Élastiques :

$E=3000\ MPa$	Module d'Young
$\nu=0,25$	Coefficient de Poisson

DRUCK_PRAGER linéaire (modélisation A) :

$\alpha=0,20$	Coefficient de dépendance en pression
$p_{ultm}=0,04$	Déformation plastique cumulée ultime
$\sigma_Y=6\,MPa$	Contrainte plastique
$h=100\ MPa$	Module d'écrouissage

DRUCK_PRAGER parabolique (modélisation B) :

$\alpha=0,20$	Coefficient de dépendance en pression
$p_{ultm}=0,04$	Déformation plastique cumulée ultime
$\sigma_Y=6\,MPa$	Contrainte plastique
$\sigma_Y^{ult}=10\ MPa$	Contrainte plastique ultime

1.2 Chargements et conditions aux limites

On impose une déformation volumique $\varepsilon_v=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$. Le chargement n'est pas monotone : on charge d'abord jusqu'à la déformation volumique ε_{v1}, en dépassant le seuil de plastification, puis on décharge à un niveau de déformation nul ; ensuite on charge encore à la déformation ε_{v2} en dépassant ainsi la déformation plastique cumulée ultime p_{ultm}, au delà de laquelle on retrouve une plasticité parfaite ; on décharge encore à contrainte nulle (déformation égale à la déformation plastique ε_{v2}^p) et on recharge en plastifiant ultérieurement jusqu'à la déformation ε_{v3}. Le temps de chargement (voir Tableau 1.2-1) est fictif car les lois plastiques sont indépendantes du temps.

t	ε_v
0	0
10	$\varepsilon_{v1}=0,018$
14	0
26	$\varepsilon_{v2}=0,045$
30	$\varepsilon_{v2}^p=0,03667$
40	$\varepsilon_{v3}=0,06$

Tableau 1.2-1: déformation volumique imposée.

1.3 Conditions initiales

Toutes les composantes des contraintes et déformations sont nulles au début du chargement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

La modélisation vérifie le comportement de la loi à écrouissage linéaire.

2.1 Méthode de calcul

Les équations qui nous intéressent pour le calcul analytique sont ($I_1=\mathrm{tr}(\sigma)$: trace du tenseur des contraintes, ε_v^p : déformation plastique volumique) :

- loi constitutive plastique sur la partie volumique :

$$I_1=3\mathrm{K}(\varepsilon_v-\varepsilon_v^p) \quad \textbf{(éq 2.1-1)}$$

- surface critère, en posant nulle la contrainte de Von Mises ($\sigma_{eq}=0$) :

$$F(\sigma,p)=\alpha I_1-R(p) \quad \textbf{(éq 2.1-2)}$$

- relation entre la déformation plastique volumique et la déformation plastique cumulée (variable interne de la loi plastique) :

$$\dot{\varepsilon}_v^p=3\alpha\dot{p} \qquad \text{donc en intégrant :} \quad \varepsilon_v^p=3\alpha p \quad \textbf{(éq 2.1-3)}$$

- expression de l'écrouissage
  - linéaire :

$$\begin{aligned} R(p)&=\sigma_Y+h\,p && si\ p\leqslant p_{ult}\\ R(p)&=\sigma_Y+h\,p_{ult}=\sigma_Y^{ult} && si\ p>p_{ult}\end{aligned} \quad \textbf{(éq 2.1-4)}$$

  - parabolique :

$$\begin{aligned} R(p)&=\sigma_Y\left(1-\left(1-\sqrt{\frac{\sigma_Y^{ult}}{\sigma_Y}}\right)\frac{p}{p_{ult}}\right)^2 && si\ p\leqslant p_{ult}\\ R(p)&=\sigma_Y^{ult} && si\ p>p_{ult}\end{aligned} \quad \textbf{(éq 2.1-5)}$$

On observe que, comme dans le cas linéaire, $R(p)=\sigma_Y$ si $p=0$ et on a plasticité parfaite si $p>p_{ult}$.

2.1.1 Déformation à la limite élastique initiale

Cette déformation est obtenue pour $\varepsilon_v^p=p=0$.

Si on pose $F(\sigma,p)=0$ (évolution plastique) on a :

$$I_1^{el}=\frac{R(p)}{\alpha}=\frac{\sigma_Y}{\alpha}$$

$$\varepsilon_v^{el}=\frac{I_1^{el}}{3K}$$

2.1.2 Déformation ultime

On appelle déformation ultime ε_v^{ult} celle obtenue pour $p=p_{ult}$.

On trouve facilement la trace de contraintes I_1^{ult} et la déformation plastique ε_v^{pult} correspondantes :

$$I_1^{ult}=\frac{R(p)}{\alpha}=\frac{\sigma_Y^{ult}}{\alpha}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\varepsilon_v^{pult}=3\alpha\, p_{ult}$$
$$\varepsilon_v^{ult}=\frac{I_1^{ult}}{3K}+\varepsilon_v^{pult}$$

2.1.3 Déformation entre la limite élastique et la déformation ultime

On calcule d'abord la déformation plastique cumulée.

- En combinant les équations (2.1-1), (2.1-2), (2.1-3) et (2.1-4) avec $F(\boldsymbol{\sigma}, p)=0$ pour **l'écrouissage linéaire** on a :

$$p=\frac{3KA\varepsilon_{vI}-\sigma_Y}{9K\alpha^2+h} \qquad \textbf{(éq 2.1-6)}$$

- En combinant les équations (2.1-1), (2.1-2), (2.1-3) et (2.1-5) avec $F(\boldsymbol{\sigma}, p)=0$ pour l'**écrouissage parabolique** on arrive à l'équation de dégréé 2 :

$$A_1\bar{p}^2+B_1\bar{p}+C_1=0$$

$$A_1=\sigma_Y(1-\gamma)^2$$
$$B_1=9K\alpha^2 p_{ult}-2\sigma_Y(1-\gamma)$$
$$C_1=\sigma_Y-3K\alpha\varepsilon_{v1} \qquad \textbf{(eq 2.1-7)}$$
$$\gamma=\sqrt{\frac{\sigma_Y^{ult}}{\sigma_Y}}$$
$$\bar{p}=\frac{p}{p_{ult}}$$

On utilise alors les équations (2.1-3) (2.1-1) pour trouver la déformation plastique ε_v^p et la trace des contraintes I_1 .

Si on fait décharger le matériau de façon élastique jusqu'à contrainte nulle, on retrouve une déformation résiduelle égale à la déformation plastique ; il faut par contre charger le matériau en compression pour obtenir un déformation totale nulle. Cette deuxième branche est aussi élastique, car le matériau de Drücker-Prager ne peut pas plastifier en état de compression hydrostatique. Dans ce dernier cas, la trace des contraintes, négative, est :

$$I_1^c=-3K\varepsilon_v^p \qquad \textbf{(éq 2.1-8)}$$

2.1.4 Déformation supérieure à la déformation ultime

On trouve facilement toutes les quantités d'intérêt, car la trace de contraintes est connue a priori et égale à I_1^{ult} .

$$\varepsilon_v^p=\varepsilon_v-\frac{I_1^{ult}}{3K}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$p=\frac{\varepsilon_v^p}{3\alpha}$$

2.2 Grandeurs et résultats de référence

Le module de compressibilité K est :

$$K=\frac{E}{3(1-2\nu)}=2000\ MPa$$

2.2.1 Déformation à la limite élastique

Pour les deux modélisations on trouve facilement :

$$I_1^{el}=30\ MPa$$
$$\varepsilon_v^{el}=0{,}005$$

2.2.2 Déformation ultime

Pour les deux modélisations on trouve :

$$I_1^{ult}=50\ MPa$$
$$\varepsilon_v^{pult}=0{,}024$$
$$\varepsilon_v^{ult}\approx 0{,}03233$$

2.2.3 Déformation égale à 0,018 et décharge à déformation nulle

Cette valeur de déformation $\varepsilon_{v1}=0{,}018$ est supérieure à la limite élastique ε_v^{el} et inférieure à ε_v^{ult}. On calcule d'abord la déformation plastique cumulée avec les équations (2.1-7) et (2.1-8), puis la déformation plastique et la trace des contraintes :

- écrouissage linéaire :

$$p_1=\frac{3KA\varepsilon_{v1}-\sigma_Y}{9K\alpha^2+h}\approx 0{,}019$$
$$\varepsilon_{v1}^p=3\alpha p_1=0{,}0114$$
$$I_1^1=3K(\varepsilon_{v1}-\varepsilon_{v1}^p)\approx 39{,}51\ MPa$$

- écrouissage parabolique :

$$p_1\approx 0.0192$$
$$\varepsilon_{v1}^p=3\alpha p_1\approx 0.0115$$
$$I_1^1=3K(\varepsilon_{v1}-\varepsilon_{v1}^p)\approx 38.956\ MPa$$

La trace des contraintes à déformation nulle est :

- écrouissage linéaire :

$$I_1^{1c}=-3K\varepsilon_{v1}^p\approx -68{,}49\ MPa$$

- écrouissage parabolique :

$$I_1^{1c}=-3K\varepsilon_{v1}^p\approx -69{,}044\ MPa$$

En effet, la différence entre le cas parabolique et linéaire est très faible.

2.2.4 Chargement jusqu'à déformation éga le à 0,045 et 0,06

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On recharge le matériau jusqu'aux valeurs de déformation $\varepsilon_{v2}=0,045$ et $\varepsilon_{v3}=0,06$, supérieures à ε_v^{ult}.
Les résultats sont les mêmes pour les deux modélisations.

Pour $\varepsilon_{v2}=0,045$:

$$\varepsilon_{v2}^p=\varepsilon_{v2}-\frac{I_1^{ult}}{3K}\approx 0,03667$$

$$p_2=\frac{\varepsilon_{v2}^p}{3\alpha}\approx 0,0611$$

Suite à la décharge élastique (jusqu'à contrainte nulle), on retrouve $\varepsilon_v=\varepsilon_{v2}^p$, $p=p_2$.

Pour $\varepsilon_{v3}=0,06$:

$$\varepsilon_{v3}^p=\varepsilon_{v3}-\frac{I_1^{ult}}{3K}\approx 0,051667$$

$$p_3=\frac{\varepsilon_{v3}^p}{3\alpha}\approx 0,0861$$

2.2.5 Courbes contrainte-déformation

Dans les Figures (2.2.5-a) et (2.2.5-b) on représente la courbe (ε_v, I_1) pour l'écrouissage linéaire et parabolique. En rouge sont les points testés par le cas-test.

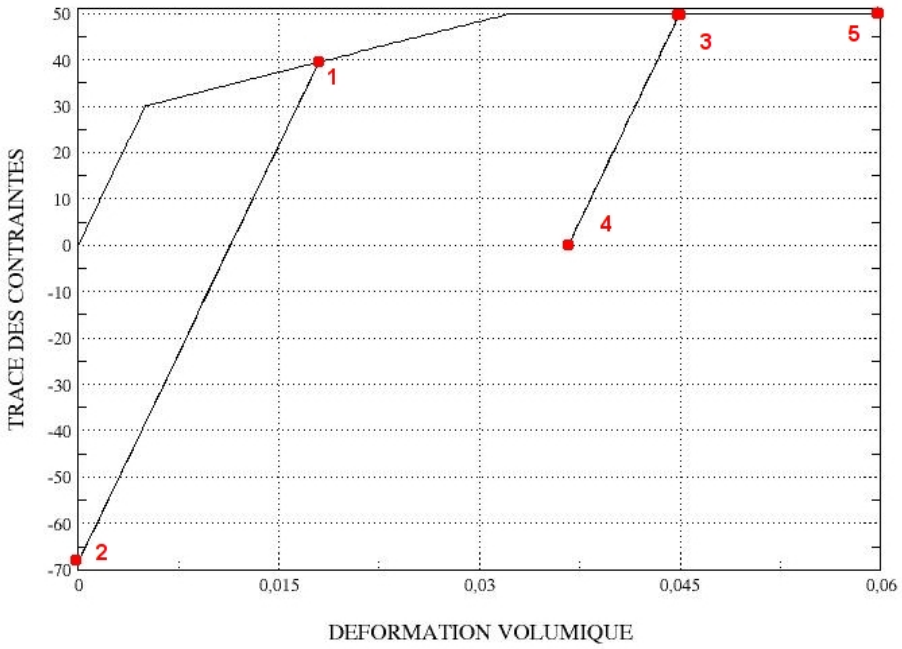


Figure 2.2.5-a: courbes contrainte-déformation pour écrouissage linéaire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

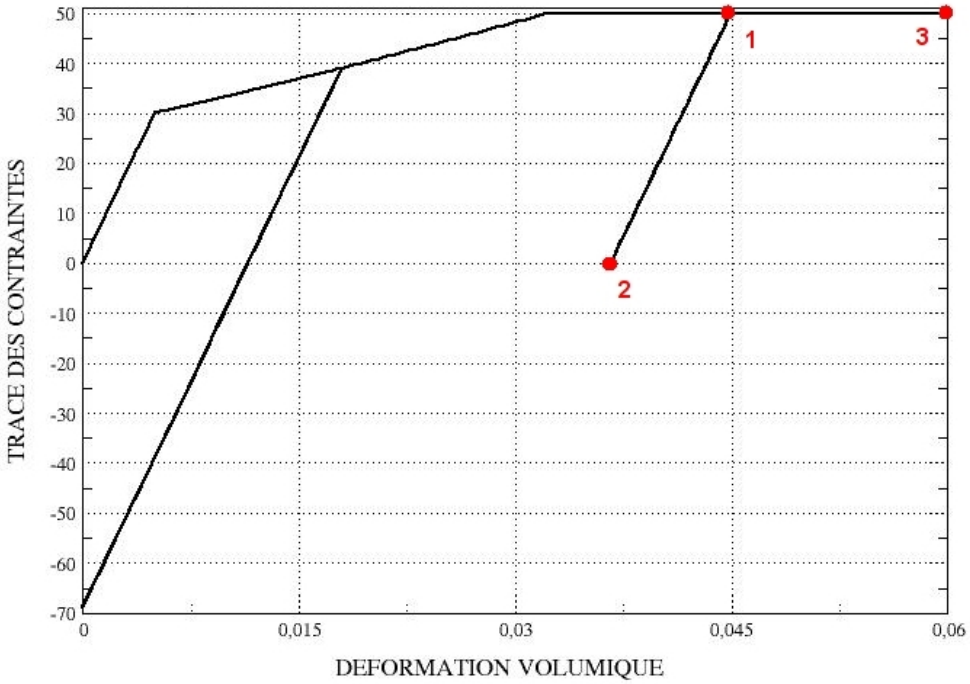


Figure 2.2.5-b: courbes contrainte-déformation pour écrouissage parabolique.

2.3 Incertitudes sur la solution

La solution est analytique.

2.4 Références bibliographiques

[1] Document [R3.01.16], Intégration du comportement mécanique élasto-plastique de Drücker-Prager DRUCK_PRAGER et post-traitements. Manuel de référence Code_Aster.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le test est effectué sur un point matériel avec la commande SIMU_POINT_MAT . On travaille à déformations imposées.
L'écrouissage est linéaire.

3.2 Grandeurs et résultats de référence

Point sur la Figure 2.2.5-a	Quantité vérifiée	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (relatif)
1	Trace des contraintes	$I_1^1 = 39{,}51\ MPa$	ANALYTIQUE	10^{-6} %
2	Trace des contraintes	$I_1^{1c} = -68{,}49\ MPa$	ANALYTIQUE	10^{-6} %
3 ou 4	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v2}^p = 0{,}03667$	ANALYTIQUE	10^{-6} %
3 ou 5	Trace de contraintes	$I_1^{ult} = 50\ MPa$	ANALYTIQUE	10^{-6} %
5	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v3}^p = 0{,}051667$	ANALYTIQUE	10^{-6} %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le test est effectué sur un point matériel avec la commande SIMU_POINT_MAT . On travaille à déformations imposées.
L'écrouissage est parabolique.

4.2 Grandeurs et résultats de référence

Point sur la Figure 2.2.5-b	Quantité vérifiée	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (relatif)
1 ou 2	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v2}^{p}=0,03667$	ANALYTIQUE	10^{-6} %
1 ou 3	Trace de contraintes	$I_1^{ult}=50\ MPa$	ANALYTIQUE	10^{-6} %
3	Partie sphérique de la déformation plastique	$\varepsilon_{v3}^{p}=0,051667$	ANALYTIQUE	10^{-6} %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Les résultats du cas-test sont satisfaisants, *Code_Aster* reproduit les résultats analytiques avec une précision élevée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)