# SSNV166 – Cylindre fissuré sous chargements multiples

**Résumé**

Ce test a pour but le calcul des facteurs d'intensité de contraintes le long du fond de fissure pour un cylindre comportant une fissure axisymétrique.

L'influence du degré des éléments et du type de la méthode est étudiée à travers diverses modélisations.

1) La modélisation $A$ teste $K1$ et $K3$ avec un maillage linéaire $3D$ et une méthode aux éléments finis classique ( $FEM$ ).
2) La modélisation $B$ teste $K1$ et $K3$ avec un maillage quadratique $3D$ (éléments de Barsoum) autour du fond de fissure et une $FEM$ .
3) La modélisation $C$ teste $K1$ et $K3$ avec un maillage linéaire $3D$ avec une résolution classique mais une extraction des facteurs d'intensité basée sur un calcul énergétique.

De plus, pour chaque modélisation, divers cas de chargements sont étudiés :
- traction (sollicitation en mode $I$ ) ;
- torsion (sollicitation en mode $III$ ) ;
- flexion (ouverture d'un coté, fermeture de l'autre) avec et sans prise en compte du contact.

Les cas de traction et torsion ne mettent pas en jeu le contact.

Bien que des symétries existent dans certains cas (axisymétrie pour le cas 1, symétrie plane pour le 2ème) la représentation est faite en $3D$ pour rendre le test généralisable sous chargement multiple.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie

La fissure est une couronne circulaire dans un plan orthogonal à l'axe du cylindre [Figure 1.1-a]. Les paramètres $a$ et $b$ déterminent le rayon du cylindre et la profondeur de la fissure. La [Figure 1.1-b] est une coupe du cylindre dans le plan de fissure (plan $Oyz$). Pour que le milieu soit considéré comme infini, la hauteur du cylindre est $h=10\,b$.

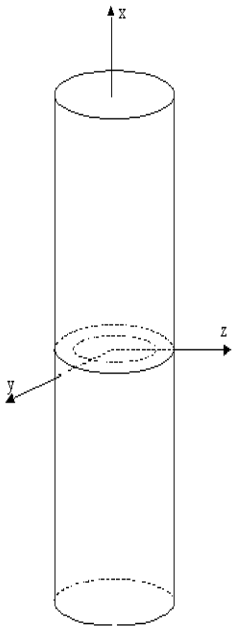



**Figure 1.1-a : Géométrie du cylindre fissuré**

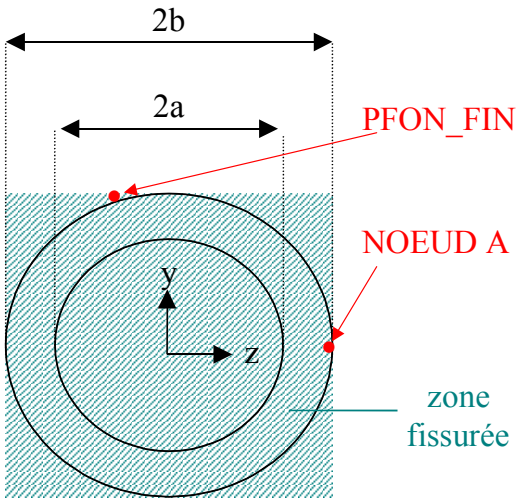



**Figure 1.1-b : Plan de fissuration**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 1.2 Propriétés de matériaux

Module d'Young : $E=205000\ MPa$

Coefficient de Poisson : $\nu=0.3$

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Trois chargements seront appliqués afin de calculer les facteurs d'intensité de contraintes $K1$ et $K3$ en $3\mathrm{D}$ en utilisant l'opérateur POST_K1_K2_K3.

Le chargement 1 teste $K1$ et $K3$ .
Le chargement 2 teste $K2$ sans prise en compte du contact.
Le chargement 3 teste $K2$ avec prise en compte du contact.

On s'attend à ce que $K1$ et $K3$ soient constants le long du fond de fissure et à ce que $K2$ varie.

Remarque : les cas de traction et de torsion peuvent être traités indifféremment avec ou sans contact (ici, sans contact) car il n'y a jamais de fermeture de la fissure.

| | Cas 1 : traction et torsion | Cas 2 : flexion sans contact | Cas 3 : flexion avec contact |
|---|---|---|---|
| Face supérieure | $N_x=6\ MN$<br>$T_x=3\ MN$ | $M_y=1.5\ MN$ | $M_y=1.5\ MN$ |

**Tableau 1.3- 1 : Cas de chargements**

Les efforts précédents sont appliqués à la structure par l'intermédiaire d'éléments $3\mathrm{D}$ discrets situés au centre de la face supérieure. On note que le point d'ouverture maximale due à la flexion imposée (moment suivant $Oy$ ) sera le nœud $A$ (voir [Figure 1.1-b].

Les mouvements de corps rigides sont bloqués par le même procédé avec encastrement du centre de la face inférieure.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solution de référence

## 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Pour une fissure axisymétrique dans un cylindre de longueur infinie, la méthode des Équations Intégrales Singulières et des Développements Asymptotiques [bib1] permet de calculer les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes.

1) Cas 1 : Traction et Torsion

La traction induit une ouverture en mode 1. $K1$ est donné par la formule suivante :

$$K_I = \frac{P}{\pi a^2}\sqrt{\pi a}\,F_1(a/b)$$

où $P$ est l'effort appliquée sur les face supérieure et inférieure et $F_1$ une fonction donnée [Figure 2.1-a].

La torsion induit une ouverture en mode 3. $K3$ est donné par la formule suivante :

$$K_{III} = \frac{2\mathrm{T}}{\pi a^3}\sqrt{\pi a}\,F_3(a/b)$$

où T est le moment appliqué sur les face supérieure et inférieure et $F_3$ une fonction donnée [Figure 2.1-a].

1) Cas 2 : Flexion sans contact

La flexion induit une ouverture en mode $1$. La valeur de $K1$ au point d'ouverture maximale $A$ est donnée par la formule suivante :

$$K_{I_A} = \frac{4\mathrm{M}}{\pi a^3}\sqrt{\pi a}\,F_2(a/b)$$

où $M$ est le moment appliqué sur les face supérieure et inférieure et $F_2$ une fonction donnée [Figure 2.1-a].

1) Cas 3 : Flexion avec contact

Il n'existe pas de solution analytique à ce problème. On s'attend d'une part à ce que $K1$ soit proche du cas sans contact sur la partie de la fissure en ouverture, et d'autre part que $K1$ soit nul sur la partie de la fissure en fermeture.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

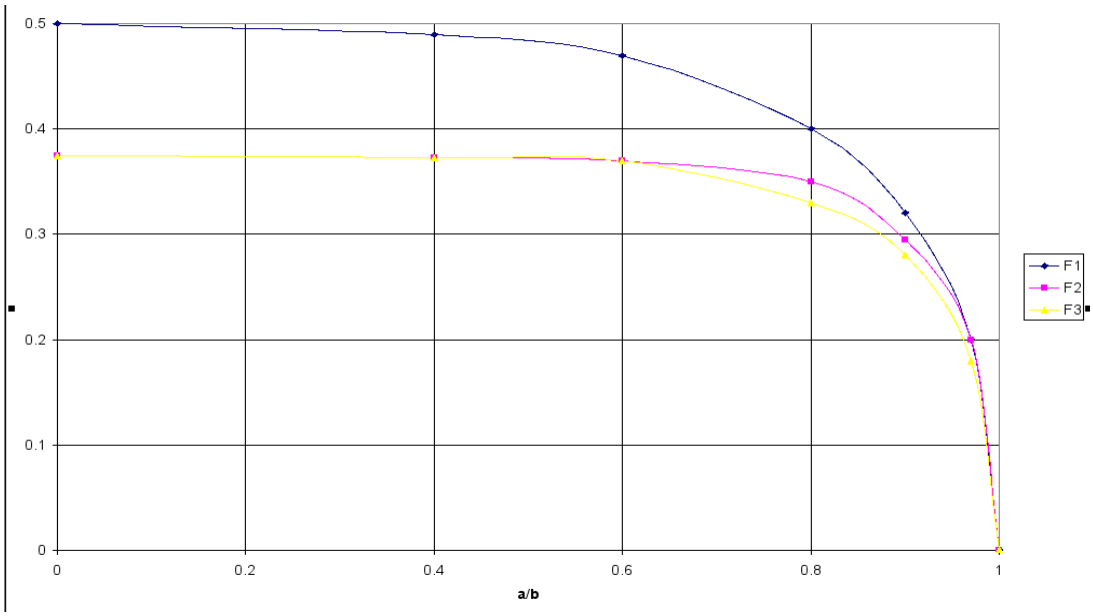



**Figure 2.1 - a : Fonctions $F1$ , $F2$ et $F3$**

Ces trois fonctions proviennent de [bib1].

## 2.2 Résultats de référence

Application Numérique :

Sauf mention contraire, dans la suite de ce document, les paramètres retenus pour $a$ et $b$ sont :

$$a=0.4\,m$$
$$b=0.5\,m$$

| Cas 1 : Traction et torsion | Cas 2 : Flexion |
|---|---|
| $K1=5.35\ MPa.m^{1/2}$<br>$K3=11.22\ MPa.m^{1/2}$ | $K1_A=11.71\ MPa.m^{1/2}$ |

**Tableau 2.2 - 1 : Valeurs de référence**

## 2.3 Références bibliographiques

•TADA, PARIS, IRWIN : The Stress Analysis Of Cracks Handbook, Del Research Corporation, Hellertoxn, Pennsylvania (1973).
•Calcul des facteurs d'intensité des contraintes par extrapolation du champ de déplacements, Manuel de référence du *Code_Aster*, R7.02.08
•CORNELIU : Quarter-point elements for curved crack fronts, Computers & Structures Vol. 17, No. 2, pp. 227-231, 1983



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A : Maillage linéaire, formulation classique

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation

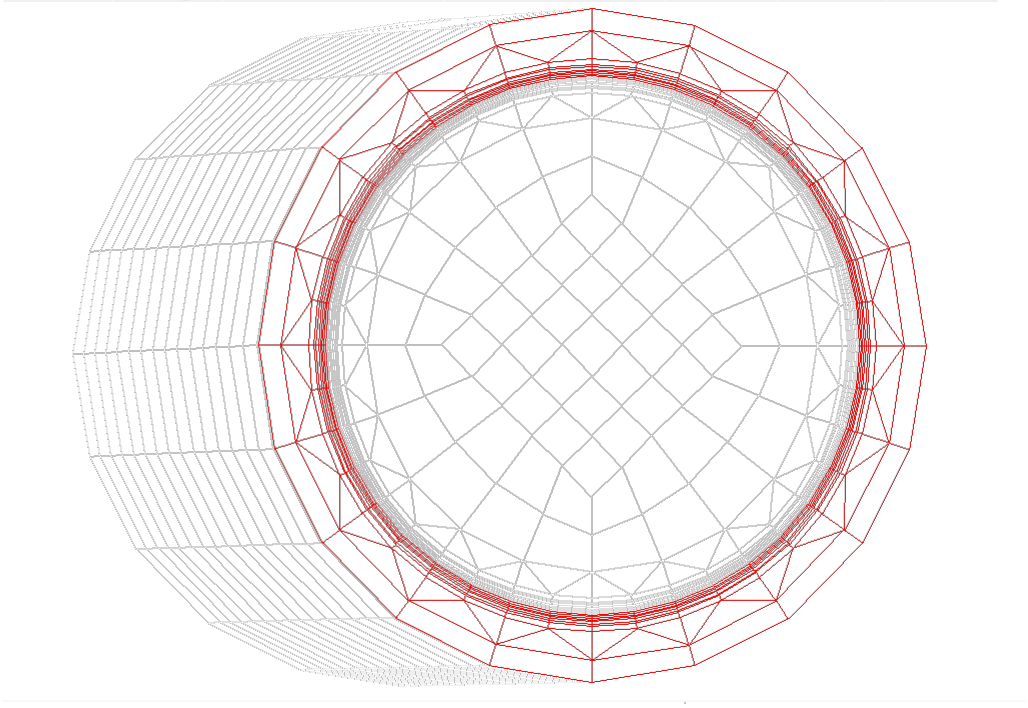


**Figure 3.1 - a : Coupe du maillage dans le plan de la fissure**

Les éléments sont tous d'ordre 1.

L'intérêt de cette modélisation est de servir de base pour les formulations plus évoluées, et ainsi, de pouvoir constater l'apport et les améliorations des autres méthodes.

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11310
Nombre de mailles : 14453

| Type de mailles | Nombre de mailles |
|---|---|
| POI1 | 4 |
| SEG2 | 39 |
| TRIA3 | 360 |
| QUAD4 | 930 |
| PENTA6 | 5440 |
| HEXA8 | 7680 |

**Tableau 3.2 - 1 : Caractéristiques des mailles**

## 3.3 Remarque

Le calcul des facteurs d'intensité de contraintes se fait à l'aide de POST_K1_K2_K3 (méthode d'extrapolation des déplacements sur les lèvres de la fissure) [bib2].



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 3.4 Valeurs testées et Résultats de la modélisation A

La procédure POST_K1_K2_K3 permet d'identifier les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes à un coefficient près. On rappelle que cette méthode identifie le facteur d'intensité de contrainte $K1$ (respectivement $K2$ , $K3$ ) à partir du saut de déplacement par une méthode des moindres carrés.

### 3.4.1 Résultats dans le cas d'un chargement en traction (K1) et torsion (K3)

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| $K1$ au nœud $PFON_{FIN}$ | 5.35 $10^6$ | 4.52 $10^6$ | 15 |
| $K3$ au nœud $PFON_{FIN}$ | -11.22 $10^6$ | -9,54 $10^6$ | 15 |

Les valeurs de $K1$ et $K3$ doivent être identiques [Figure 4.2-a] pour tous les nœuds du fond de fissure car on a une configuration axisymétrique. Ici, nous testons seulement les valeurs au nœud $PFON_{FIN}$.

### 3.4.2 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion (K1) sans contact

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| $K1$ au nœud $A$ | 11.71 $10^6$ | 9,18 $10^6$ | 22 |

On compare la valeur de $K1$ à la solution de référence seulement au point d'ouverture maximale (nœud $A$ ) car c'est la seule valeur analytique disponible dans la littérature.

### 3.4.3 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion (K1) avec contact

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| $K1$ au nœud $A$ | 10.17 $10^6$ | 8,38 $10^6$ | 20 |

On compare le résultat obtenu à celui obtenu par *Code_Aster* sans prise en compte du contact (non-régression). Cette prise en compte s'effectue par la méthode des contraintes actives.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

### 3.4.4 Évolutions de K1, K2, K3 le long du fond de fissure

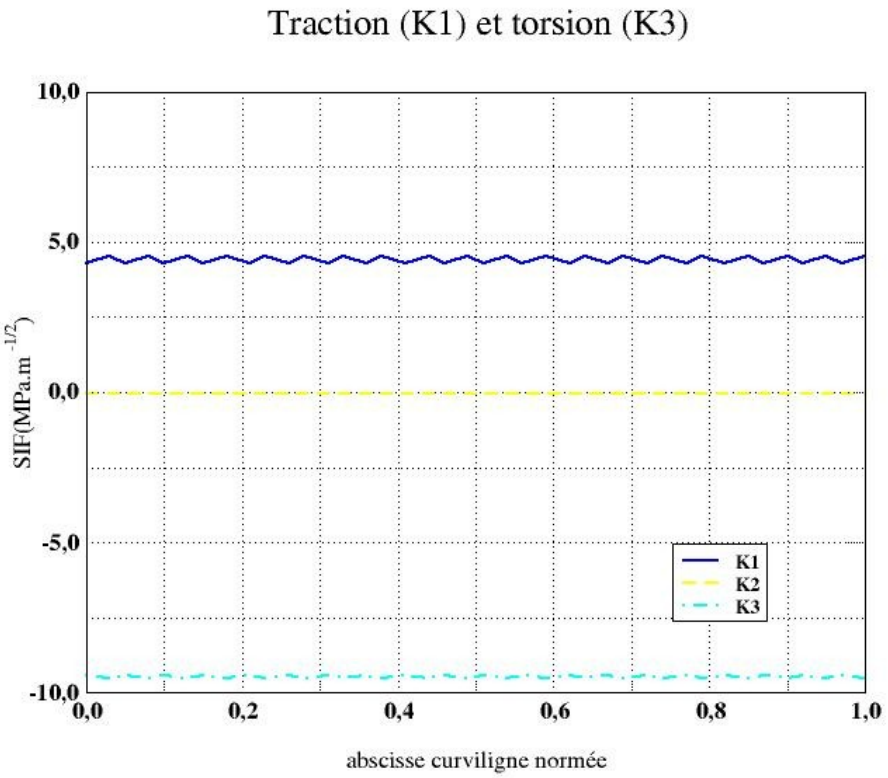



**Figure 4.2 - a :** $K1$ , $K2$ **et** $K3$ **le long du fond de fissure (en** $MPa.m^{1/2}$ **)**

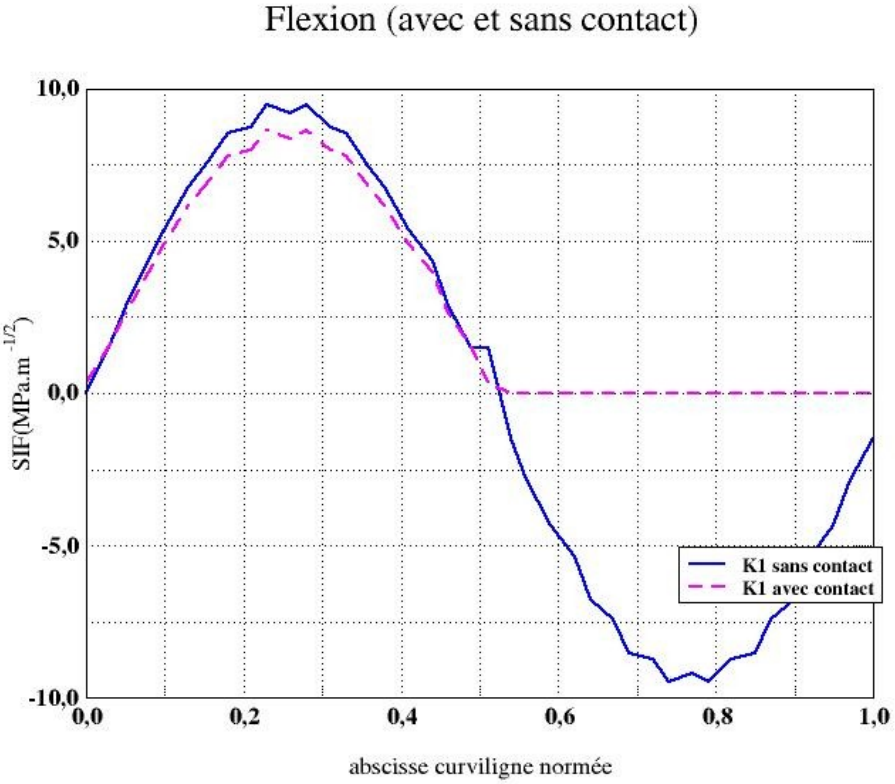



**Figure 4.2 - b :** $K1$ **le long du fond de fissure (en** $MPa.m^{1/2}$ **)**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

**Commentaires sur les résultats :**

La [Figure 4.2-a] montre l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes le long du fond de fissure de la fissure axisymétrique de profondeur $100\,mm$ soumise à de la traction et de la torsion. On observe bien des résultats axisymétriques (aux erreurs de calculs près). De plus, on note que la fissure n'est pas sollicitée en mode $II$.
Sur la [Figure 4.2-b], on met en évidence la prise en compte du contact. Sur la moitié de fissure en ouverture, $K1$ a des valeurs plus faibles avec prise en compte du contact, car le contact rigidifie la structure. Sur la moitié en fermeture, $K1$ est nul.
En fait, le contact n'a pas lieu sur toute la moitié supérieure de la fissure [Figure 4.2-c] mais sur une surface un peu plus petite. Sur la [Figure 4.2-c] la zone en rouge représente la zone de contact et la zone en bleu celle de non contact.

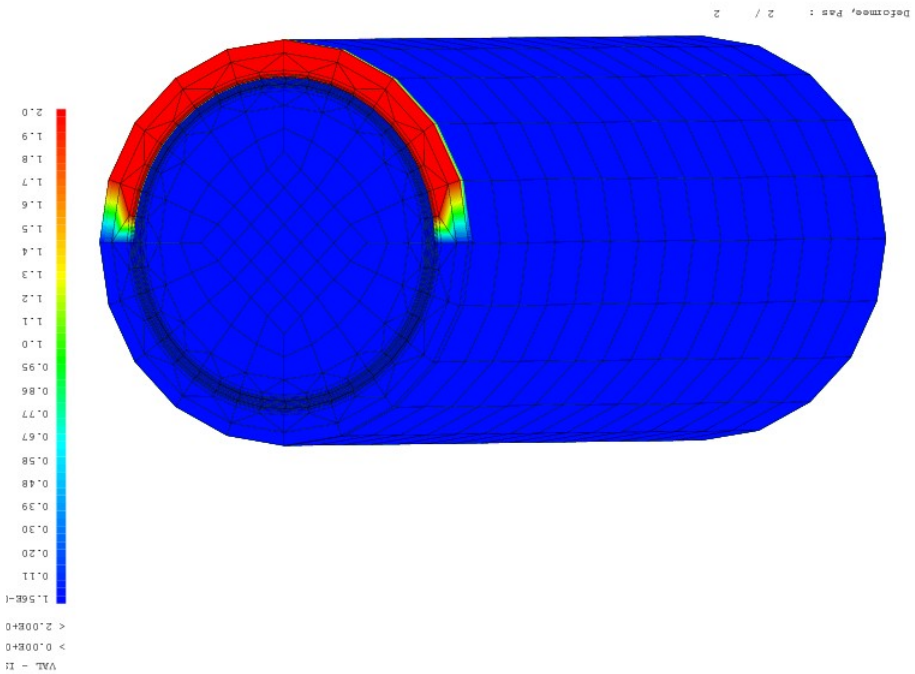


**Figure 4.2 - c : Contact**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Modélisation B : Maillage quadratique, formulation classique

## 4.1 Caractéristiques de la modélisation

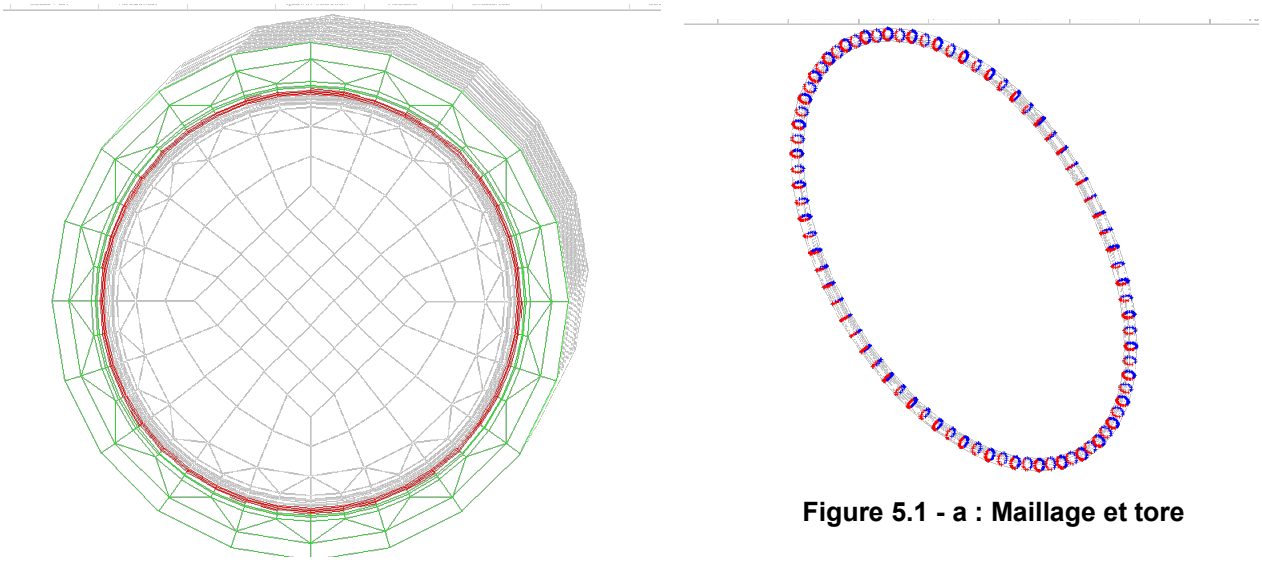


**Figure 5.1 - a : Maillage et tore**

Un tore est créé autour de la fissure. Les éléments du tore sont des éléments quadratiques. Les éléments en dehors du tore sont linéaires. De plus, on utilise des éléments de BARSOUM (nœuds milieux déplacés au quart) pour les mailles ayant un bord appartenant au fond de fissure [bib3].

L'intérêt de l'utilisation d'un maillage de type BARSOUM est l'obtention de résultats plus précis.

## 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20030
Nombre de mailles : 16449

| Type de mailles | Nombre de mailles |
|---|---|
| POI1 | 2000 |
| SEG3 | 39 |
| TRIA3 | 360 |
| QUAD4 | 610 |
| QUAD8 | 320 |
| PENTA6 | 4800 |
| PENTA15 | 640 |
| HEXA8 | 5760 |
| HEXA20 | 1920 |

**Tableau 5.2 - 1 : Caractéristiques des mailles**

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes, pour obtenir une meilleure précision.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 4.3 Valeurs testées et résultats de la modélisation B

### 4.3.1 Résultats dans le cas d'un chargement en traction ( $K1$ ) et torsion ( $K3$ )

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| $K1$ au nœud $PFON_{FIN}$ | 5,35 $10^6$ | 5.04 $10^6$ | 5,7 |
| $K3$ au nœud $PFON_{FIN}$ | -11,22 $10^6$ | -10.80 $10^6$ | 3,8 |

Les valeurs de $K1$ et $K3$ doivent être identiques [Figure 6.2-a] pour tous les nœuds du fond de fissure car on a une configuration axisymétrique. Ici, nous testons seulement les valeurs au dernier nœud de la fissure ( $PFON_{FIN}$ ).

### 4.3.2 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion ( $K1$ ) sans contact

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| $K1$ au nœud $A$ | 11,71 $10^6$ | 10,29 $10^6$ | 12 |

On compare la valeur de $K1$ à la solution de référence seulement au point d'ouverture maximale (Nœud $A$ ) car c'est la seule valeur analytique disponible dans la littérature.

### 4.3.3 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion ( $K1$ ) avec contact

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| $K1$ au nœud $A$ | 10,59 $10^6$ | 9,24 $10^6$ | 13 |

On compare le résultat obtenu à celui obtenu par le calcul *Aster* sans prise en compte du contact (non-régression). La méthode de résolution du contact est celle des contraintes actives.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 4.4 Évolutions de K1, K2, K3 le long du fond de fissure

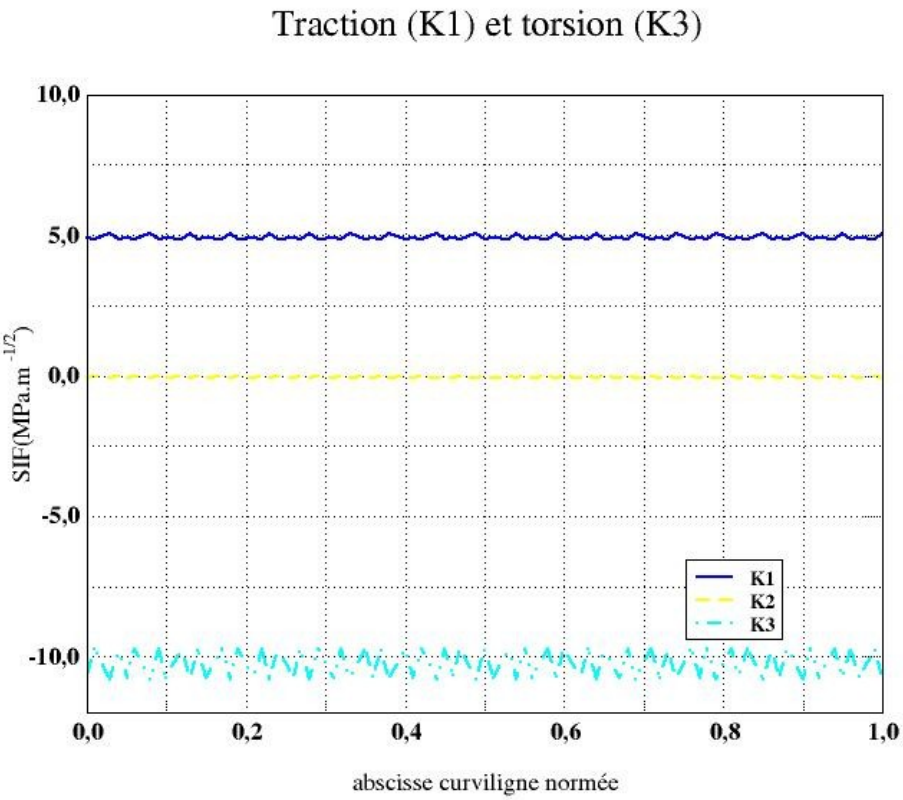



**Figure 4.4-a : $K1$ , $K2$ et $K3$ le long du fond de fissure (en $MPa.m^{1/2}$ )**

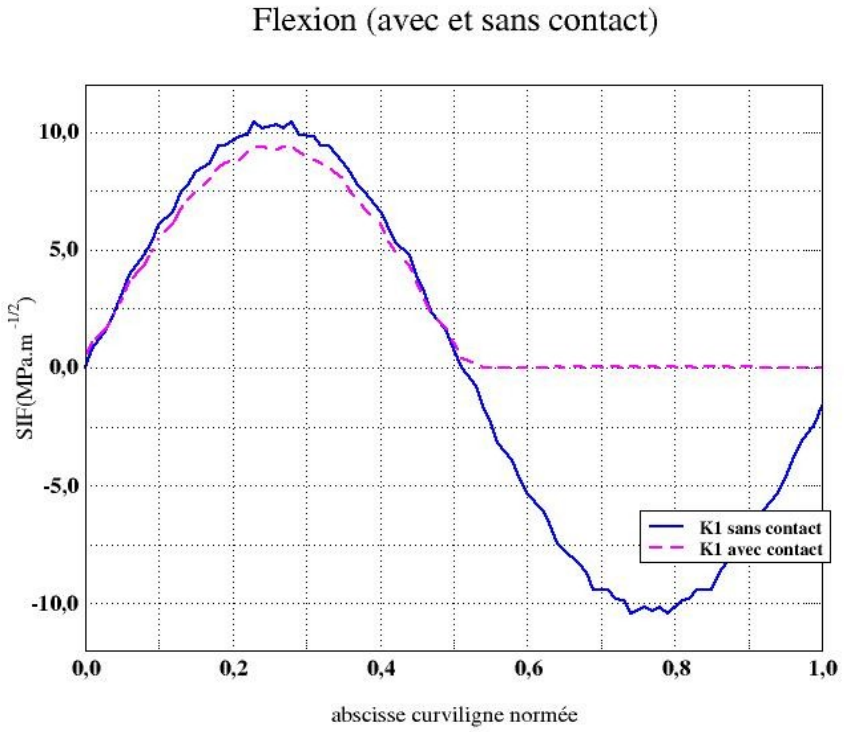



**Figure 4.4-b : $K1$ le long du fond de fissure (en $MPa.m^{1/2}$ )**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Modélisation C : Maillage linéaire, formulation classique et méthode énergétique

## 5.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation du problème est la même que celle utilisée en $A$ . Tous les éléments sont d'ordre 1.

## 5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est similaire à celui utilisé en $A$ .

Nombre de nœuds : 13630
Nombre de mailles : 17013

| Type de mailles | Nombre de mailles |
|---|---|
| POI1 | 4 |
| SEG2 | 39 |
| TRIA3 | 360 |
| QUAD4 | 1090 |
| PENTA6 | 5760 |
| HEXA8 | 9760 |

**Tableau 7.2- 1 : Caractéristiques des mailles**

## 5.3 Valeurs testées et résultats de la modélisation C

On calcule le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité des contraintes avec la commande CALC_G, option CALC_K_G. Cette méthode est plus générale que la méthode d'extrapolation des déplacements (POST_K1_K2_K3) car elle peut s'utiliser dans le cas d'une fissure quelconque (fissure non-plane, à fond non-droit).

### 5.3.1 Résultats dans le cas d'un chargement en traction (K1) et torsion (K3)

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| $Max(K1)$ | 5.35 $10^6$ | 5.11 $10^6$ | 4.47 |
| $Max(K3)$ | 11.22 $10^6$ | 10.52 $10^6$ | 6.24 |

Les valeurs de $K1$ et $K3$ doivent être identiques [Figure 5.4-a] pour tous les nœuds du fond de fissure car on a une configuration axisymétrique. Ici, nous testons le maximum de $K1$ et $K3$ pour tous les points du fond de fissure.

### 5.3.2 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion (K1) sans contact

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| $K1$ au nœud $A$ | 11.71 $10^6$ | 10.32 $10^6$ | 11.88 |

On compare la valeur de $K1$ à la solution de référence seulement au point d'ouverture maximale car c'est la seule valeur analytique disponible dans la littérature. Ce point n'est plus un « nœud » mais un « point » du fond de fissure, il faut alors le repérer par son numéro dans la liste des points du fond de fissure. C'est le point repéré par NUM_PT=11.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

### 5.3.3 Résultats dans le cas d'un chargement en flexion (K1) avec contact

| Identification | Référence | *Aster* | % différence |
|---|---|---|---|
| $K1$ au nœud $A$ | 10.32 $10^6$ | 9.43 $10^6$ | 8.57 |

On compare le résultat obtenu à celui obtenu par *Code_Aster* sans prise en compte du contact (non-régression). Cette prise en compte s'effectue par la méthode des contraintes actives.
La [Figure 5.4-b] compare les valeurs de $K1$ le long du fond de fissure pour les cas de flexion avec et sans contact.

## 5.4 Évolutions de K1 et K3 le long du fond de fissure

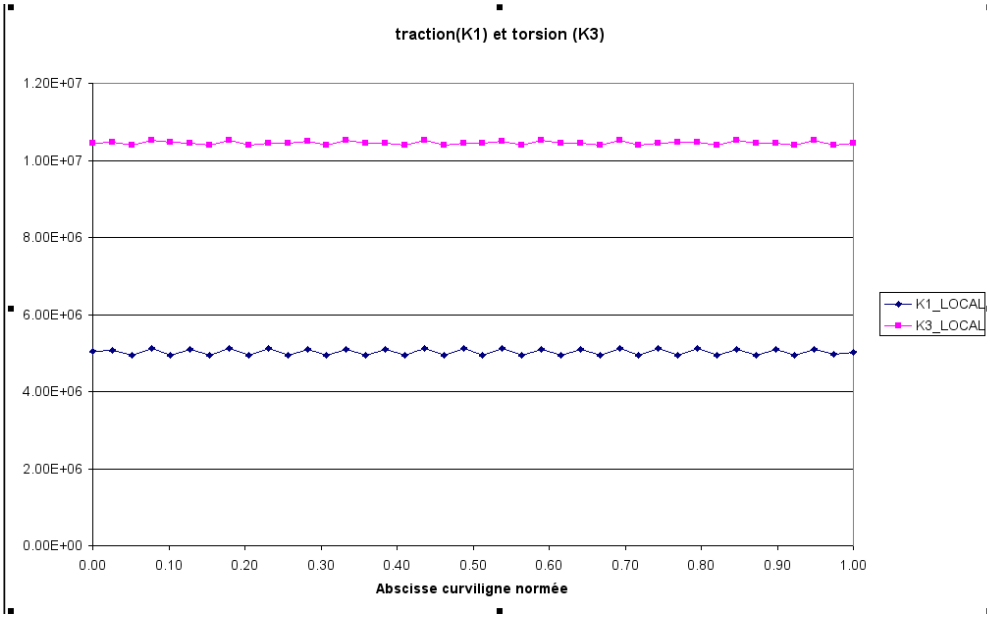



Figure 5.4-a : $K1$ et $K3$ le long du fond de fissure (en $MPa.m^{1/2}$ )



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

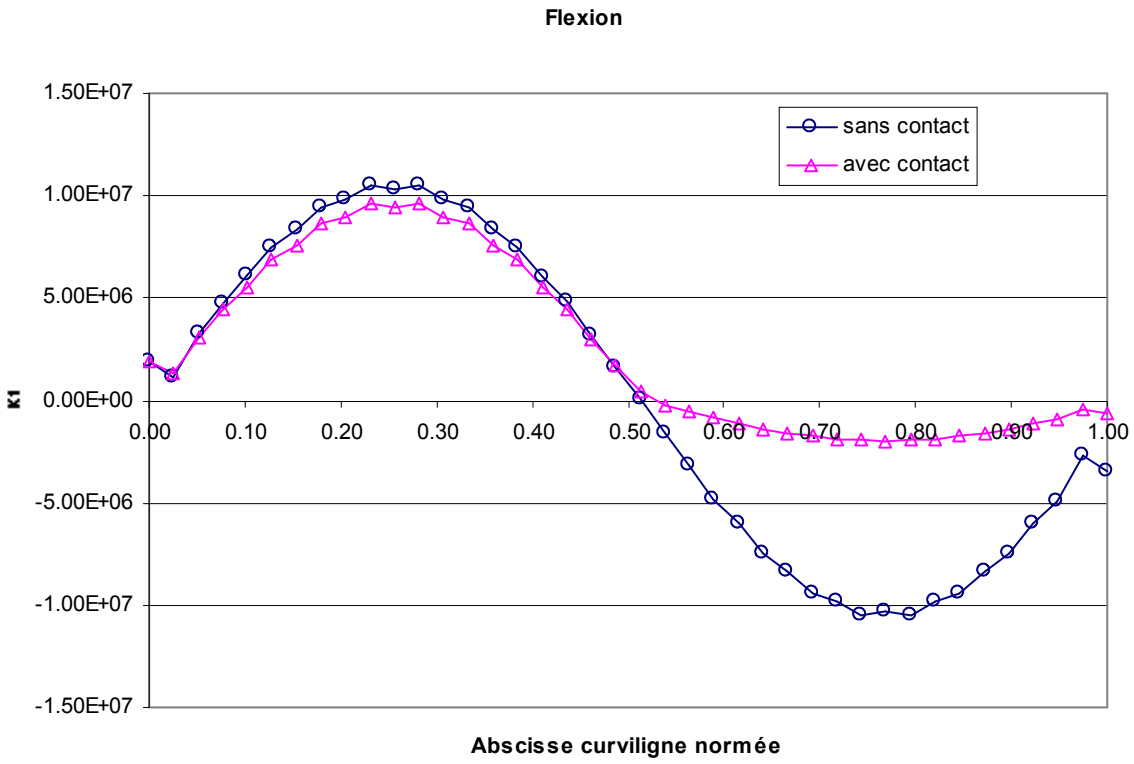



**Figure 5.4-b : $K1$ le long de la fissure (en $MPa.m^{1/2}$ )**

Remarque :

*On note que dans le cas où le contact est pris en compte (voir [ Figure 5.4-b ]), $K1$ n'est pas vraiment nul sur les segments du fond de fissure où il y a fermeture. Cela provient du fait que la méthode énergétique de calcul des $K$ projette le champ de déplacement solution sur les champs auxiliaires singuliers de déplacement d'une fissure infiniment longue en ouverture. Or ces champs auxiliaires ne sont pas compatibles avec le mode de fermeture présent.*



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 6 Synthèse des résultats

Les objectifs de ce test sont atteints :

- Il s'agit de valider la prise en compte du contact sur les lèvres de la fissure avec des éléments quadratiques (et des éléments de Barsoum). Les résultats sont meilleurs, comparés à ceux obtenus avec un maillage linéaire.
- Ce test montre l'intérêt de la méthode $« G-thêta »$ pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte. Cette méthode énergétique présente l'avantage d'être plus générale que celle utilisant le saut de déplacements (POST_K1_K2_K3) car elle peut s'appliquer à des fissures de géométrie quelconque, alors que POST_K1_K2_K3 est restreint aux fissures planes. De plus, la méthode $« G-thêta »$ donne de meilleurs résultats (comparés à la solution analytique) que POST_K1_K2_K3 pour un même maillage linéaire.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)