SSNV124 - Analyse limite régularisée. Loi de Norton-Hoff

Résumé

Ce test permet de valider les opérateurs utilisés en analyse limite régularisée. On calcule la charge limite par une approche cinématique régularisée par la méthode de Norton-Hoff-Friaâ.

On considère une plaque rectangulaire (modélisation A) ou un cube (modélisation B) ou un cylindre axisymétrique (modélisation C). Le matériau constitutif vérifie le critère de résistance de von Mises et la structure est soumise à des chargements sur les bords. Le calcul permet d'obtenir le paramètre de la charge limite dans la direction du chargement.

La structure est modélisée par des éléments incompressibles et le chargement dont on cherche le paramètre de charge limite est normalisé (puissance unitaire).

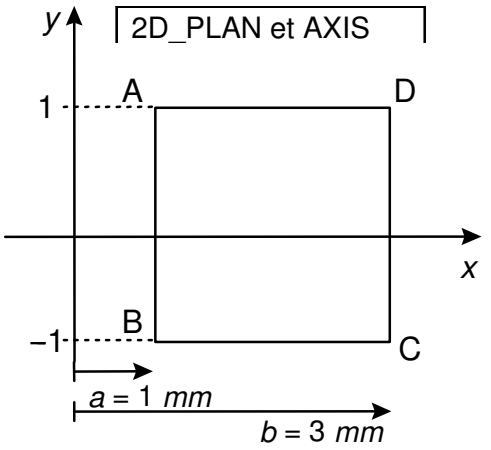
La résolution par la méthode régularisée de Norton-Hoff-Friaâ est réalisée par pilotage dans la commande STAT_NON_LINE. Un post-traitement dans la commande POST_ELEM permet d'obtenir la valeur d'une borne supérieure de la charge limite, ainsi qu'une estimation par valeur inférieure, lorsqu'il n'y a pas de chargement constant appliqué.

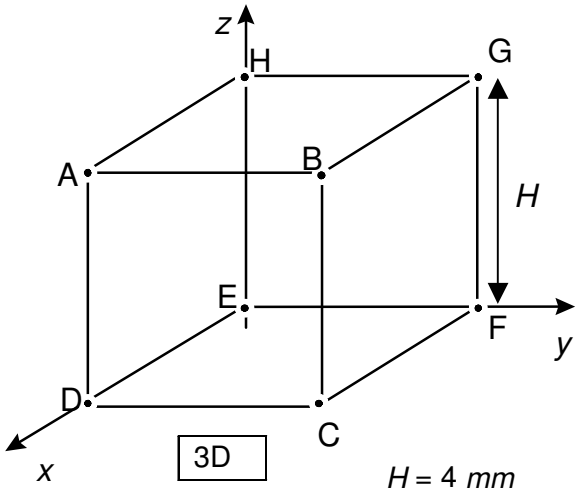
La solution de référence est analytique et les résultats sont en parfait accord avec les valeurs de référence.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie





1.2 Propriétés de matériaux

Limite d'élasticité : $\sigma_y = 10\,MPa$.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions limites en 2D :

- sur AB : $DX = 0.$
- sur BC : $DY = 0.$

Conditions limites en 3D :

- $EFGH$ ($FACEXINF$) : $DX = 0.$
- $ADEH$ ($FACEYINF$) : $DY = 0.$
- $DCFE$ ($FACEZINF$) : $DZ = 0.$

Conditions limites en AXIS :

- sur BC et AD : $DY = 0.$

Le chargement paramétré par λ est :

- en 2D :

  $FY = -1.$ sur AD

- en 3D :

  $FX = -0.2$ sur $ABCD$ ($FXSUP$)
  $FY = -0.8$ sur $BCFG$ ($FYSUP$)

- en AXIS :

  $FX = 1.$ sur AB .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le matériau constitutif vérifie le critère de von Mises, avec pour seuil σ_y. La structure est soumise à des pressions sur les bords horizontal $-\alpha f$ et vertical $-(1-\alpha)f$ avec $\alpha \geq 0.5$ ($\alpha = 1.$ en 2D, $\alpha = 0.8$ en 3D). En 2D plan, on envisage deux façons de faire : d'une part en amplifiant les deux pressions ensemble, d'autre part en amplifiant seulement la pression horizontale, et en laissant la pression verticale constante. En axisymétrique, le solide est soumis à la pression interne seule $-\alpha f$. On obtient la charge limite exacte et celle par la méthode de régularisation [R7.07.01] dans cette direction de chargement, pour le critère de von Mises, avec le seuil σ_y.

2.2 Cas plan

La structure est soumise à des pressions sur les bords horizontal : $-\alpha f$ et vertical : $-(1-\alpha)f$, avec : $\alpha \geq 1/2$, et on exerce un blocage en z. On considère deux façons de contrôler le chargement :

- cas 1 : les deux pressions horizontale et verticale sont paramétrées par λ,
- cas 2 : la pression horizontale est paramétrée par λ, tandis que la pression verticale est constante $-(1-\alpha)f_0$, avec $f_0 = \lambda_0 f$.

2.2.1 Solution en analyse limite

La solution est homogène (contraintes biaxées σ : $\sigma_{xx} = \alpha f, \sigma_{yy} = (1-\alpha)f$, $\sigma_{xy} = 0$, déformations planes ε). On obtient [bib2] la charge limite dans ces directions de chargement, pour le critère de von Mises, en déformations planes, avec le seuil σ_y :

$$\text{cas 1 : } \lambda_{\lim} . f = \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}.|2\alpha - 1|} \qquad \text{éq 2.2.1-1}$$

$$\text{cas 2 : } \lambda_{\lim} . f = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{3.|\alpha|} + \frac{1-\alpha}{|\alpha|}\lambda_0 . f \qquad \text{éq 2.2.1-2}$$

On vérifie que si l'on prend $\lambda_0 = \lambda_{\lim}$ dans le cas2, on retrouve alors le cas1.

2.2.2 Solution en analyse limite régularisée

La solution est homogène. Les déformations planes sont nécessairement de la forme :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}).\varepsilon(\mathbf{u})} = |\gamma|\sqrt{2} \qquad \text{éq 2.2.2-1}$$

Par la loi de Norton-Hoff, le coefficient $m \in]1, 2]$ étant donné, on obtient les contraintes déviatoriques :

$$\sigma^D = A(m)\sqrt{2}^{m-2}|\gamma|^{m-2}\gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \left\|\sigma^D\right\|_{VM} = A(m)\sqrt{2}^{m-2}|\gamma|^{m-1}\sqrt{3} \qquad \text{éq 2.2.2-2}$$

La normalisation (puissance unitaire) du chargement dont on cherche le paramètre de charge limite, cf. [R7.07.01] [§1.2], conduit à :

$$\text{cas 1 : } \gamma f = \frac{1}{H(b-a)(2\alpha - 1)} \qquad \text{éq 2.2.2-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\text{cas 2 : } \gamma f = \frac{1}{H(b - a)\alpha} \qquad \text{éq 2.2.2-4}$$

Les termes de la suite $\hat{\lambda}_m$ d'approximations par excès de la charge limite dans ces deux paramétrages du chargement sont alors :

$$\text{cas 1 : } \hat{\lambda}_m.f = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{3.|2\alpha - 1|} \qquad \forall m \qquad \text{éq 2.2.2-5}$$

$$\text{cas 2 : } \hat{\lambda}_m.f = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{3.|\alpha|} + \frac{1 - \alpha}{|\alpha|}\lambda_0.f \quad \forall m \qquad \text{éq 2.2.2-6}$$

L'invariance en fonction de m observée ici (ce qui est un cas particulier) résulte du fait qu'on se trouve dans une situation isostatique. Dans le cas 1, on peut aussi exploiter la suite des approximations par défaut de la charge limite $\underline{\lambda}_m$:

$$\text{cas 1 : } \underline{\lambda}_m.f = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{3m.|2\alpha - 1|} \qquad \text{éq 2.2.2-7}$$

On obtient donc la charge limite $\lambda_{\lim}$ exacte quand $m \to 1^+$.

Dans le cas 2, où la pression verticale est constante, la puissance de ce chargement « permanent » dans le déplacement solution est :

$$\text{cas 2 : } \mathsf{L}_0(\mathbf{u}) = \frac{1 - \alpha}{|\alpha|}.\lambda_0 f \qquad \text{éq 2.2.2-8}$$

2.3 Cas axisymétrique

En 2D axisymétrique on considère la même géométrie, mais le solide, auquel on impose un blocage axial complet, est uniquement soumis à une pression sur la paroi interne : αf paramétrée par λ.

2.3.1 Solution en analyse limite

On obtient [bib2] la charge limite dans cette direction de chargement, pour le critère de von Mises, en axisymétrique et déformations axiales nulles, avec le seuil σ_y :

$$\lambda_{\lim}.\alpha f = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_y \ln\frac{b}{a} \qquad \text{éq 2.3.1-1}$$

2.3.2 Solution en analyse limite régularisée

La solution est homogène. Le déplacement n'étant que radial, les déformations isochores sont nécessairement de la forme :

$$u_r(r) = \frac{\gamma}{r}; \qquad \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{\gamma}{r^2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \qquad \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}).\varepsilon(\mathbf{u})} = \frac{|\gamma|}{r^2}\sqrt{2} \qquad \text{éq 2.3.2-1}$$

Par la loi de Norton-Hoff, le coefficient $m \in]1, 2]$ étant donné, on obtient les contraintes déviatoriques :

$$\sigma^D = A(m)\sqrt{2}^{m-2}|\gamma|^{m-2}\gamma.r^{-2m+2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \left\|\sigma^D\right\|_{VM} = A(m)\sqrt{2}^{m-2}|\gamma|^{m-1}.r^{-2m+2}.\sqrt{3} \qquad \text{éq 2.3.2-2}$$

Les équations d'équilibres axial et radial conduisent à déterminer la contrainte moyenne :

$$\operatorname{tr}\sigma(r) = 3A(m)\sqrt{2}^{m-2}.\gamma.|\gamma|^{m-2}.r^{-2m+2}.\frac{2 - m}{1 - m} + 3\tau \qquad \text{éq 2.3.2-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où τ est une constante, qui est calculée à partir de la condition aux limites de pression nulle en paroi externe. On obtient alors les composantes des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = \beta\left(b^{-2m+2} - r^{-2m+2}\right) \\ \sigma_{zz}(r) = \beta\left(b^{-2m+2} - (2-m)\, r^{-2m+2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \beta\left(b^{-2m+2} - (3-2m)\, r^{-2m+2}\right) \end{cases} \qquad avec:\ \beta = \frac{A(m)\sqrt{2}^{m-2}}{(m-1)(\alpha f H)^{m-1}} \qquad \text{éq 2.3.2-4}$$

La normalisation (puissance unitaire) du chargement dont on cherche le paramètre de charge limite, cf. [R7.07.01] [§1.2], conduit à : $\alpha f \gamma = \frac{1}{H}$.

Les termes de la suite $\hat{\lambda}_m$ d'approximations par excès de la charge limite pour ce chargement sont alors :

$$\hat{\lambda}_m . \alpha f = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_y H \int_a^b \frac{|\gamma|}{r^2} r dr = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_y \ln\frac{b}{a} \qquad \forall m \qquad \text{éq 2.3.2-5}$$

Les termes de la suite $\underline{\lambda}_m$ des approximations par défaut de la charge limite pour ce chargement sont :

$$\underline{\lambda}_m . \alpha f = \frac{2\sqrt{3}}{3m}\sigma_y \int_a^b r^{-2m} \left[\underset{[a,b]}{Max}\left(r^{-2m+2}\right) \right]^{-1} r dr = \frac{\sigma_y \sqrt{3}}{3m(1-m)} \frac{b^{-2m+2} - a^{-2m+2}}{a^{-2m+2}} \qquad \text{éq 2.3.2-6}$$

En $m \to 1^+$, on trouve : $\underline{\lambda}_{1^+} . \alpha f = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_y \ln\frac{b}{a}$, c'est-à-dire la même valeur que $\hat{\lambda}_m$ et $\lambda_{\lim}$.

2.4 Cas tridimensionnel

En 3D on considère la même géométrie, mais le solide, d'épaisseur unitaire, est libre dans la direction antiplane z. Le solide est soumis à des pressions sur les parois horizontale : $-\alpha f$ et verticale : $-(1-\alpha) f$, avec : $\alpha \geq 1/2$. Les deux pressions horizontale et verticale sont paramétrées par λ.

2.4.1 Solution en analyse limite

La solution est homogène (contraintes biaxées σ : $\sigma_{xx} = \alpha f, \sigma_{yy} = (1-\alpha) f$, $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{zz} = 0$, déformations ε). On obtient la charge limite dans cette direction de chargement [bib2], pour le critère de von Mises, avec le seuil σ_y :

$$\lambda_{\lim} . f = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3\alpha^2 - 3\alpha + 1}} \qquad \text{éq 2.4.1-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.4.2 Solution en analyse limite régularisée

La solution est homogène. Les déformations isochores sont nécessairement de la forme :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & -1-\delta \end{bmatrix} \quad ; \qquad \sqrt{\varepsilon(\mathbf{u}).\varepsilon(\mathbf{u})} = |\gamma| \sqrt{2\left(1+\delta+\delta^2\right)} \qquad \text{éq 2.4.2-1}$$

Par la loi de Norton-Hoff, le coefficient $m \in \left]1, 2\right]$ étant donné, on obtient les contraintes déviatoriques :

$$\sigma^D = \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & -1-\delta \end{bmatrix} \quad ; \quad \left\|\sigma^D\right\|_{VM} = |\beta| \sqrt{3\left(1+\delta+\delta^2\right)} \; avec : \; \beta = A(m) \sqrt{2\left(1+\delta+\delta^2\right)}^{m-2} |\gamma|^{m-2} \gamma$$

éq 2.4.2-2

On déduit de $\sigma_{zz} = 0$: $\mathrm{tr}\,\sigma = 3\beta(1+\delta)$. D'où les contraintes : $\sigma = \beta. \begin{bmatrix} 2+\delta & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

L'équilibre du solide impose que $\sigma_{xx}.(1-\alpha) = \sigma_{yy}.\alpha$. On en déduit le paramètre $\delta = \dfrac{3\alpha - 2}{1-3\alpha}$.

La normalisation (puissance unitaire) du chargement dont on cherche le paramètre de charge limite, cf. [R7.07.01] [§1.2], conduit à :

$$\gamma f = \frac{1}{H(b-a)(\alpha+\delta(1-\alpha))} \qquad \text{éq 2.4.2-3}$$

Les termes de la suite $\hat{\lambda}_m$ de bornes supérieures de la charge limite dans ce cas de chargement sont ainsi identiques à :

$$\hat{\lambda}_m.f = \frac{2\sqrt{3}\sigma_y}{3}.\frac{\sqrt{2\left(1+\delta+\delta^2\right)}}{\alpha+\delta(1-\alpha)} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3\alpha^2-3\alpha+1}} \qquad \text{éq 2.4.2-4}$$

2.5 Résultats de référence

Modélisation	cas	λ_{lim}	$\lambda_{\text{lim}}^{\text{sup}} = \hat{\lambda}_m$	$\lambda_{\text{lim}}^{estimée} = \bar{\lambda}_m$	puissance $L_0(\mathbf{u})$
A (cas 1)	2D plan	$\lambda_{\text{lim}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}\lvert 2\alpha-1\rvert}.\dfrac{\sigma_y}{f}$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}\lvert 2\alpha-1\rvert}.\dfrac{\sigma_y}{f}$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}\lvert 2\alpha-1\rvert}.\dfrac{\sigma_y}{mf}$	0
Abis (cas2)	2D plan	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3\lvert\alpha\rvert}\dfrac{\sigma_y}{f}+\dfrac{1-\alpha}{\lvert\alpha\rvert}\lambda_0 f$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3\lvert\alpha\rvert}\dfrac{\sigma_y}{f}+\dfrac{1-\alpha}{\lvert\alpha\rvert}\lambda_0 f$	néant	$\dfrac{1-\alpha}{\lvert\alpha\rvert}.\lambda_0 f$
B	3D	$\lambda_{\text{lim}} = \dfrac{1}{\sqrt{3\alpha^2-3\alpha+1}}.\dfrac{\sigma_y}{f}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3\alpha^2-3\alpha+1}}.\dfrac{\sigma_y}{f}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3\alpha^2-3\alpha+1}}.\dfrac{\sigma_y}{mf}$	0
C $\alpha = 1$	2D AXIS	$\lambda_{\text{lim}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sigma_y}{f}.\ln\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sigma_y}{f}.\ln\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{\sigma_y\sqrt{3}\left((b/a)^{-2m+2}-1\right)}{3m(1-m)}$	0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Modélisation	cas	$\lambda_{\lim}$	$\lambda_{\lim}^{\sup}$	$\lambda_{\lim}^{estimée}$ ($m=1,2$)	$\lambda_{\lim}^{estimée}$ ($m=1,0001$)	puissance $L_0(\mathbf{u})$
A	2D plan	11.547	11.547	9.6225	11.5458	0
Abis	2D plan	14.6837	14.6837	néant	néant	0.25
B ($\alpha=0,8$)	3D	13.8675	13.8675	11.5562	13.8661	0
C	2D AXIS	12.6857	12.6857	8.5545	12.6830	0

Remarque :

Code_Aster calcule la valeur opposée de la puissance du chargement « permanent » dans le déplacement solution $L_0(\mathbf{u})$.

2.6 Références bibliographiques

1) F.VOLDOIRE, E.LORENTZ, J.M.PROIX, E.VISSE : Calcul de charge limite par la méthode de Norton-Hoff-Friaâ. [R7.07.01].

2) F.VOLDOIRE, Calcul à la rupture et analyse limite des structures, note EDF HI-74/93/082.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On considère une plaque rectangulaire modélisée par un élément QUAD8 de type incompressible : miplqu8. On étudie les deux cas : le premier avec les deux charges amplifiées, le deuxième avec la pression horizontale amplifiée et la verticale constante.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 maille de type QUAD8, élément fini incompressible.

3.3 Valeurs testées

Identification	Cas	Référence
Charge limite supérieure	A	11.547
	Abis	14.6837
Charge limite estimée ($m=1,2$)	A	9.6225
	Abis	néant
Puissance chargement permanent	A	0
	Abis	– 0.25
NOEUD='N3' EPSI_ELNO : EPXX	A	– 0.3125
NOEUD='N3' EPEQ_ELNO : INVA_2	A	0.360844

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

On considère un cube modélisé par un élément HEXA20 de type incompressible : minc_hexa20.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20.

Nombre de mailles et types : 1 maille de type HEXA20 élément fini incompressible.

4.3 Valeurs testées

Identification	Référence
Charge limite supérieure	13.867505
Charge limite estimée ($m=1,2$)	11.5562
NOEUD='N1' EPSI_ELNO : EPXX	0.0407692

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

On considère un cylindre modélisé par des éléments axisymétriques QUAD8 de type incompressible : miaxqu8, selon un maillage réglé.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 96

Nombre de mailles et types : 25 mailles de type QUAD8 élément fini incompressible.

5.3 Valeurs testées

Identification	Référence
Charge limite supérieure	12.6857
Charge limite estimée ($m=1,2$)	8.5545

6 Synthèse des résultats

Les résultats numériques sont en parfait accord avec les valeurs de référence. Dans le cas axisymétrique, les légères différences s'expliquent par le fait que le déplacement est en $1/r$ dans la solution analytique, ce qui n'est pas compris dans la base des éléments finis choisis.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)