SSNP169 – Disque plein traversé par une interface X-FEM sous pression non uniforme

Résumé :

Ce test permet de valider le traitement du contact en X-FEM dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

On considère dans un premier temps un disque plein coupé par une interface circulaire. Ensuite, on considère un carré plein également coupé par une interface circulaire. Dans les deux cas, l'interface est la surface de contact. La rigidité du solide, représentée par le module de Young joue un rôle important dans l'évaluation de la valeur des déformations et des fluctuations de la pression de contact.

Une solution analytique a été développée pour ce problème afin de valider les résultats numériques calculés. On teste les valeurs de la pression de contact et du déplacement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La structure est composée d'une couronne cylindrique traversée par une interface X-FEM circulaire. Le rayon R_2 définit le rayon de l'interface circulaire (Figure 1.1-1) où on définira le contact.
Les dimensions caractéristiques de la structures sont :

$R_1=1,0\,m\,;\,R_2=0,6\,m$

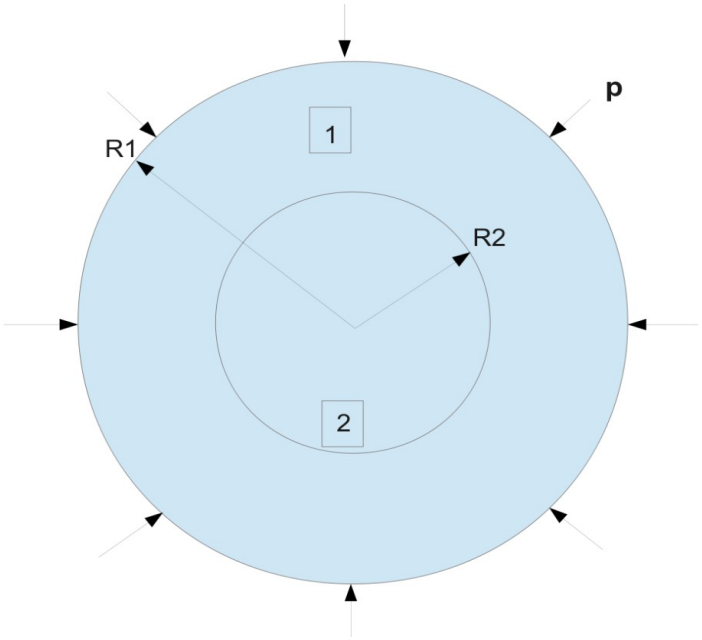


Figure 1.1-a: Géométrie de la structure

1.2 Propriétés des matériaux

Le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau de la couronne extérieure sont donnés par E_1 et ν_1 (respectivement E_2 et ν_2 pour la couronne intérieure).

1.3 Conditions aux limites et chargements

Dans ce qui suit, on traite le cas d'un disque plein soumis à une pression extérieure non uniforme. Cependant, les conditions aux limites (ainsi que la solution analytique) sont généralisables au cas de la surface carrée traversée par une interface circulaire. Le cas de la surface carrée nous permet de traiter un maillage qui n'aurait pas les mêmes symétries que l'interface : dans le cas du disque, on utilise un maillage régulier rayonnant, alors que dans le cas du carré, un utilise un maillage régulier le long des bords du carré.
On modélise dans ce qui suit l'application d'une pression non uniforme sur le bord $r=R_1$ de la couronne extérieure : $p=\alpha_0+\alpha_1.\cos(2\theta)$, θ étant l'angle polaire décrivant la position du point $\theta=\arctan(\frac{Y}{X})$. Pour le calcul analytique, on résout en première partie le problème pour une pression $p=\alpha_0$, puis on résout le problème pour une pression de la forme $p=\alpha_1.\cos(2\theta)$. Pour la solution complète, on applique le principe de superposition.
On impose des conditions aux limites de Dirichlet. Les déplacements sont imposés sur la surface extérieure en $r=R_1$. On définira aussi un rayon $R_3=0.2\mathrm{m}$ où on impose les déplacements, équivalents à ceux que produirait un disque plein (Figure 1.3-1).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour la surface carrée, on imposera les déplacements sur les faces extérieures, ainsi que sur le disque de rayon $R_3=0.2\mathrm{m}$.
On effectue pour chaque modélisation deux calculs : un premier calcul avec contact au niveau de l'interface, et un deuxième calcul avec pression de contact appliquée au niveau de l'interface.

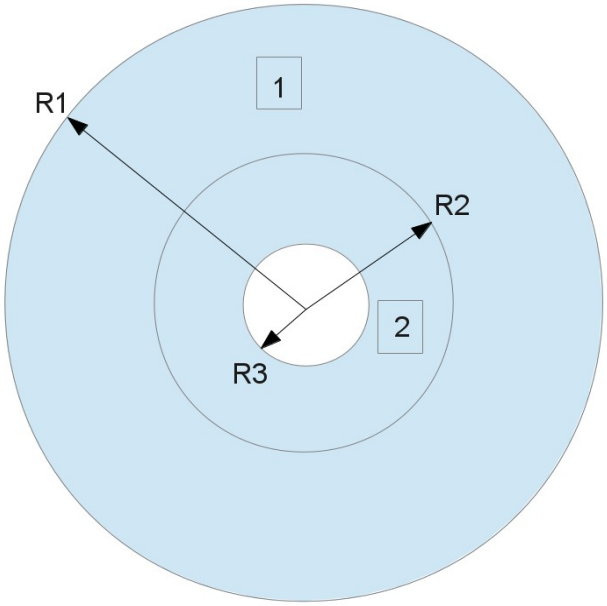


Figure 1.3-a: Géométrie de la structure

1.3.1 Conditions aux limites dans le cas de la pression uniforme

Les bords des solides sont soumis à des déplacements ($r=R_1$ et $r=R_3$) équivalents à l'application d'une pression $p=\alpha_0$ sur le bord de la couronne extérieure ($r=R_1$).

$$\xi_X(r)=f(r)\cos\left(\arctan\left(\frac{Y}{X}\right)\right)$$
$$\xi_Y(r)=f(r)\sin\left(\arctan\left(\frac{Y}{X}\right)\right)$$

La fonction $f(r)$ du déplacement radial est donnée en fonction des propriétés des matériaux et de la pression p . Dans le cas de déformations planes (`MODELISATION = 'D_PLAN'`) on a :

$$f(R_1)=A_1 R_1+\frac{B_1}{R_1}$$
$$f(R_3)=A_2 R_3$$

éq 1.1

avec :

$$A_1=\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{E_1}\frac{-pR_1^2+\lambda R_2^2}{R_1^2-R_2^2};\ B_1=\frac{1+\nu_1}{E_1}(-p+\lambda)\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2-R_2^2}$$
$$A_2=\frac{-(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{E_2}\lambda$$

éq 1.2

où λ est la pression de contact dont l'expression analytique est:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\lambda = 2\,p\,\frac{(1-\nu_1^2)}{E_1}\,\frac{\dfrac{R_1^2}{R_1^2-R_2^2}}{\dfrac{1+\nu_1}{E_1}\dfrac{R_1^2+R_2^2(1-2\,\nu_1)}{R_1^2-R_2^2}+\dfrac{1+\nu_2}{E_2}(1-2\,\nu_2)}$$ éq. 1.3

1.3.2 Conditions aux limites dans le cas de la pression variable

Les bords des couronnes sont soumis à des déplacements ($r=R_1$ et $r=R_3$) équivalents à l'application d'une pression $p=\alpha_1.\cos(2\theta)$ sur le bord de la couronne extérieure ($r=R_1$).

$$\xi_X(r,\theta)=u_r(r,\theta)\cos(\theta)-u_\theta(r,\theta)\sin(\theta)$$
$$\xi_Y(r,\theta)=u_r(r,\theta)\sin(\theta)+u_\theta(r,\theta)\cos(\theta)$$

La fonction $u_r(r,\theta)$ du déplacement radial, et celle du déplacement tangentiel $u_\theta(r,\theta)$ sont données en fonction des propriétés des matériaux, de la pression p , des caractéristiques géométriques et du carré des rapports entre les rayons : $f_1=(\frac{R_2}{R_1})^2$; $f_2=(\frac{R_3}{R_2})^2$. Dans le cas de déformations planes (`MODELISATION = 'D_PLAN'`) on a :

$$u_r(R_1,\theta)=\frac{1+\nu_1}{E_1}[(-2A_1R_1+2\frac{C_1}{R_1^3}+4\frac{D_1}{R_1})-\nu_1(4B_1R_1^3+4\frac{D_1}{R_1})]\cos(2\theta)$$
$$u_\theta(R_1,\theta)=\frac{1+\nu_1}{E_1}[(2A_1R_1+6B_1R_1^3+2\frac{C_1}{R_1^3}-2\frac{D_1}{R_1})-\nu_1(4B_1R_1^3-4\frac{D_1}{R_1})]\sin(2\theta)$$
$$u_r(R_3,\theta)=\frac{1+\nu_2}{E_2}[(-2A_2R_3)-\nu_2(4B_2R_3^3)]\cos(2\theta)$$
$$u_\theta(R_3,\theta)=\frac{1+\nu_2}{E_2}[(2A_2R_3+6B_2R_3^3)-\nu_2(4B_2R_3^3)]\sin(2\theta)$$

éq 1.4

avec :

$$A_1=\frac{\alpha_1(2f_1^2+f_1+1)-\lambda(f_1^3+f_1^2+2f_1)}{2(1-f_1)^3};\ B_1=\frac{-1}{R_2^2}\frac{\alpha_1(3f_1^2+f_1)-\lambda(f_1^3+3f_1^2)}{6(1-f_1)^3};$$
$$C_1=R_2^4\frac{\alpha_1(f_1+3)-\lambda(3f_1+1)}{6(1-f_1)^3};\ D_1=-R_2^2\frac{\alpha_1(f_1^2+f_1+2)-\lambda(2f_1^2+f_1+1)}{2(1-f_1)^3}$$
$$A_2=\frac{\lambda}{2};\ B_2=\frac{-\lambda}{6R_2^2};$$

éq 1.5

où λ est la pression de contact dont l'expression analytique est:

$$\lambda=\frac{coef_1}{coef_2+coef_3}\alpha_1$$ éq 1.6

telle que :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$coef_1=\frac{1+\nu_1}{6E_1(1-f_1)^3}[(-12f_1^2-8f_1-12)+\nu_1(12f_1^2+8f_1+12)]$$

$$coef_2=\frac{1+\nu_1}{6E_1(1-f_1)^3}[(-3f_1^3-15f_1^2-9f_1-5)+\nu_1(2f_1^3+18f_1^2+6f_1+6)]$$

$$coef_3=\frac{1+\nu_2}{6E_2}(-3+2\nu_2)$$

éq

1.7

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

Nous développons ici une solution analytique pour le problème présenté ci-dessus. Cette solution sera développée dans le cadre de l'hypothèse de petites déformations en considérant que les matériaux des couronnes sont isotropes, régis par une loi élastique linéaire sans variation de température.
La solution en déplacement du problème a la forme générique suivante :

$$u=u_r(r,\theta,z).\underline{e_r}+u_\theta(r,\theta,z).\underline{e_\theta}+u_z(r,\theta,z).\underline{e_z}$$

On résoudra le problème dans le cadre de l'hypothèse des déformations planes. Notre chargement s'écrivant sous la forme $p=\alpha_0+\alpha_1.\cos(2\theta)$, on découplera la résolution du problème en une partie où la pression est uniforme $p=\alpha_0$, et une partie où la pression est variable $p=\alpha_1.\cos(2\theta)$.

2.1.1 Pression uniforme

En utilisant les symétries du problème et l'hypothèse d'invariance selon z des déformations planes, la solution du problème prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_r&=u_r(r)\\ u_\theta&=0\\ u_z&=0 \end{aligned} \qquad \text{éq 2.1}$$

En utilisant l'équation de Lamé-Navier :

$$(\lambda+\mu)\,\underline{grad}(\nabla.(\underline{u}))+\mu\,\Delta\,\underline{u}+\underline{fd}=\underline{0} \qquad \text{éq 2.2}$$

où $\underline{fd}=\underline{0}$ sont les efforts volumiques nuls ici, et la f ormule du Laplacien :

$$\Delta\,\underline{u}=\underline{grad}(\nabla.(\underline{u}))+\underline{rot}\,\underline{rot}(\underline{u}) \qquad \text{éq 2.3}$$

On peut écrire éq 2.2 sous la forme :

$$(\lambda+2\mu)\,\underline{grad}(\nabla.(\underline{u}))+\mu\,\underline{rot}\,\underline{rot}(\underline{u})+\underline{fd}=\underline{0} \qquad \text{éq 2.4}$$

soit encore en utilisant $\underline{rot}(\underline{u})=\vec{0}$ et $\underline{fd}=\vec{0}$ et $\underline{u}=u_r(r).\underline{e_r}$:

$$\begin{aligned} \nabla.(\underline{u})&=\frac{d}{dr}u_r(r)+\frac{1}{r}u_r(r)\\ \underline{grad}(\nabla.\underline{u})&=\frac{d}{d_r}[\frac{1}{r}\frac{d}{d_r}(r\,u_r(r))].\underline{e_r}\\ \text{soit encore } (\lambda+2\mu)&\frac{d}{d_r}[\frac{1}{r}\frac{d}{d_r}(r u_r(r))]=0 \end{aligned} \qquad \text{éq 2.5}$$

En intégrant l'équation, on obtient pour le solide 1 la forme suivante du champ de déplacement :

$$u_r=C_1 r+\frac{D_1}{r}\quad u_\theta=0\quad u_z=0 \qquad \text{éq 2.6}$$

et pour le solide 2 la forme suivante du champs de déplacement :

$$u_r=C_2 r\quad u_\theta=0\quad u_z=0 \qquad \text{éq 2.7}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour déterminer les constantes C_1, D_1, C_2 , il nous reste à imposer les conditions limites en pression et en déplacement. Pour cela, il faut d'abord calculer les déformations puis les contraintes associées au champ de déplacement.

Les déformations sont la partie symétrique du gradient des déplacements. On obtient pour le solide 1:

$$\begin{aligned}\epsilon_{rr}&=C_1-\frac{D_1}{r^2}\\ \epsilon_{\theta\theta}&=C_1+\frac{D_1}{r^2}\\ \epsilon_{zz}=\epsilon_{r\theta}=\epsilon_{rz}=\epsilon_{\theta z}&=0\end{aligned}$$ éq 2.8

Et pour le solide 2 :

$$\begin{aligned}\epsilon_{rr}&=C_1\\ \epsilon_{\theta\theta}&=C_1\\ \epsilon_{zz}=\epsilon_{r\theta}=\epsilon_{rz}=\epsilon_{\theta z}&=0\end{aligned}$$ éq 2.9

En appliquant la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\sigma}}=\lambda\, tr(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{1}}+2\mu\,\underline{\underline{\epsilon}}$$ éq 2.10

on obtient la forme générale suivante pour les contraintes pour le solide 1:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}&=\frac{E_1}{1+\nu_1}\left(\frac{C_1}{1-2\nu_1}-\frac{D_1}{r^2}\right)\\ \sigma_{\theta\theta}&=\frac{E_1}{1+\nu_1}\left(\frac{C_1}{1-2\nu_1}+\frac{D_1}{r^2}\right)\\ \sigma_{zz}&=\frac{2\nu_1 E_1 C_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}\\ \sigma_{r\theta}=\sigma_{rz}=\sigma_{\theta z}&=0\end{aligned}$$ éq 2.11

et la forme générale suivante pour les contraintes pour le solide 2 :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}&=\frac{E_2}{1+\nu_2}\left(\frac{C_2}{1-2\nu_2}\right)\\ \sigma_{\theta\theta}&=\frac{E_2}{1+\nu_2}\left(\frac{C_2}{1-2\nu_2}\right)\\ \sigma_{zz}&=\frac{2\nu_2 E_2 C_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}\\ \sigma_{r\theta}=\sigma_{rz}=\sigma_{\theta z}&=0\end{aligned}$$ éq 2.12

On pose:

$$A_1=\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}C_1 \qquad B_1=\frac{E_1}{1+\nu_1}D_1 \qquad A_2=\frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}C_2$$ éq 2.13

Il ne nous reste plus qu'à calculer les valeurs de A_1, B_1, A_2 . On notera λ_n la pression de contact entre les deux couronnes telle que :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}}_{1rr}(R_2).(-\underline{e}_r)&=\lambda_n\underline{e}_r\\ \underline{\underline{\sigma}}_{2rr}(R_2).\underline{e}_r&=-\lambda_n\underline{e}_r\end{aligned}$$ éq 2.14

avec les conditions aux limites :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{1rr}(R_1).\underline{e}_r=-p.\underline{e}_r$$ éq 2.15

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La condition de continuité sur le déplacement à l'interface entre les deux couronnes en contact donne de plus :

$$u_{r;1}(R2)=u_{r;2}(R2)$$ éq 2.16

Nous avons donc 4 équations pour les 4 inconnues A_1, B_1, A_2, λ_n .

Le système des 3 premières équations nous permet d'obtenir :

$$A_1=\frac{-p R_1^2+\lambda_n R_2^2}{R_1^2-R_2^2}; B_1=(-p+\lambda_n)\frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2-R_2^2}$$
$$A_2=-\lambda_n$$ éq 2.17

et l'équation de continuité sur le déplacement permet enfin d'avoir la pression de contact :

$$\lambda_n=\frac{2 p R_1^2(1-\nu_1)}{R_1^2+ R_2^2(1-2\nu_1)+\frac{E_1}{E_2}\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}(1-2\nu_2)(R_1^2-R_2^2)}$$ éq 2.18

2.1.2 Pression variable

En utilisant l'hypothèse d'invariance selon z des déformations planes, la solution du problème prend la forme suivante :

$$u_r=u_r(r,\theta)$$
$$u_\theta=u_\theta(r,\theta)$$
$$u_z=0$$ éq 2.19

Dans toute la suite, on notera les paramètres propres à chaque solide par un indice i, avec i=1,2.

En l'absence de forces de volume, on utilisera une forme de la fonction d'Airy proposée par Michell [1], en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\chi(r,\theta)&=A_{01}r^2+A_{02}r^2\log(r)+A_{03}\log(r)+A_{04}\theta\\&+(A_{11}r^3+A_{12}r log(r)+A_{13}r^{-1})\cos(\theta)+A_{14}r\theta\sin(\theta)\\&+(B_{11}r^3+B_{12}r\log(r)+B_{13}r^{-1})\sin(\theta)+B_{14}r\theta\cos(\theta)\\&+\sum_{n=2}^{\infty}(A_{n1}r^{n+2}+A_{n2}r^{-n+2}+A_{n3}r^n+A_{n4}r^{-n})\cos(n\theta)\\&+\sum_{n=2}^{\infty}(B_{n1}r^{n+2}+B_{n2}r^{-n+2}+B_{n3}r^n+B_{n4}r^{-n})\sin(n\theta)\end{aligned}$$ éq 2.20

Les termes du tenseur des contraintes de Cauchy non nuls s'expriment en fonction de la fonction d'Airy comme suit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}$$
$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}$$
$$\sigma_{r\theta}=\frac{-\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right)$$
$$\sigma_{zz}=\nu\left(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}\right)$$

éq 2.21

Notre pression $p=\alpha_1.\cos(2\theta)$ variant en $\cos(2\theta)$, on ne prendra que la partie variant en $\cos(2\theta)$ dans la fonction d'Airy. La fonction d'Airy s'écrira alors :

$$\chi(r,\theta)=\left(Ar^2+Br^4+\frac{C}{r^2}+D\right)\cos(2\theta)$$

éq 2.22

A partir de là, on peut exprimer les contraintes non nulles dans le repère polaire pour le solide 1:

$$\sigma^1_{rr}=\left(-2A_1-6\frac{C_1}{r^4}-4\frac{D_1}{r^2}\right)\cos(2\theta)$$
$$\sigma^1_{\theta\theta}=\left(2A_1+12B_1r^2+6\frac{C_1}{r^4}\right)\cos(2\theta)$$
$$\sigma^1_{r\theta}=2\left(A_1+3B_1r^2-3\frac{C_1}{r^4}-\frac{D_1}{r^2}\right)\sin(2\theta)$$
$$\sigma^1_{zz}=\nu\left(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}\right)$$

éq 2.23

Et pour le solide 2 :

$$\sigma^2_{rr}=\left(-2A_2\right)\cos(2\theta)$$
$$\sigma^2_{\theta\theta}=\left(2A_2+12B_2r^2\right)\cos(2\theta)$$
$$\sigma^2_{r\theta}=2\left(A_2+3B_2r^2\right)\sin(2\theta)$$
$$\sigma^2_{zz}=\nu\left(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}\right)$$

éq 2.24

et les termes du tenseur de déformations en utilisant la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}=\frac{1}{E}\left((1+\nu)\underline{\underline{\sigma}}-\nu\,tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}}\right)$$

éq 2.25

On utilisera l'expression des déformations pour exprimer les déplacements dans le repère polaire. On a :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}=\varepsilon_{rr}$$
$$\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}=r\,\varepsilon_{\theta\theta}-u_r$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)=\varepsilon_{r\theta}$$

éq 2.26

En intégrant ces relations et en utilisant les symétries du problème, on peut exprimer les déplacements pour le solide 1:

$$u^1_r=\frac{1+\nu_1}{E_1}\left[\left(-2A_1r+2\frac{C_1}{r^3}+4\frac{D_1}{r}\right)-\nu_1\left(4B_1r^3+4\frac{D_1}{r}\right)\right]\cos(2\theta)$$
$$u^1_\theta=\frac{1+\nu_1}{E_1}\left[\left(2A_1r+6B_1r^3+2\frac{C_1}{r^3}-2\frac{D_1}{r}\right)-\nu_1\left(4B_1r^3-4\frac{D_1}{r}\right)\right]\sin(2\theta)$$

éq 2.27

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Et pour le solide 2 :

$$u_r^2=\frac{1+\nu_2}{E_2}[(-2A_2 r)-\nu_2(4B_2 r^3)]\cos(2\theta)$$
$$u_\theta^2=\frac{1+\nu_2}{E_2}[(2A_2 r+6B_2 r^3)-\nu_1(4B_1 r^3)]\sin(2\theta)$$

éq 2.28

Maintenant qu'on a exprimé tous nos champs en fonction des constantes $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2$, on doit calculer ces dernières en fonction des caractéristiques géométriques et du chargement.
On notera λ la pression de contact entre les deux solides.
Les conditions aux limites sont :

$$\sigma_{rr}^1(R_1)=-\alpha_1\cos(2\theta)\text{: pression externe appliquée}$$
$$\sigma_{r\theta}^1(R_1)=0\text{: pression tangentielle nulle sur le bord extérieur du solide 1}$$
$$\sigma_{rr}^2(R_2)=-\lambda\text{: pression de contact appliquée par le solide 1 sur le solide 2}$$
$$\sigma_{rr}^1(R_2)=-\lambda\text{: pression de contact appliquée par le solide 2 sur le solide 1}$$
$$\sigma_{r\theta}^1(R_2)=0\text{: pas de frottement entre les deux solides}$$
$$\sigma_{r\theta}^2(R_2)=0\text{: pas de frottement entre les deux solides}$$

Nous avons donc 6 équations pour les 6 inconnues : $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$.
En posant :

$$f_1=\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

Le système de 6 équations nous permet d'avoir :

$$A_1=\frac{\alpha_1(2f_1^2+f_1+1)-\lambda(f_1^3+f_1^2+2f_1)}{2(1-f_1)^3};\ B_1=\frac{-1}{R_2^2}\frac{\alpha_1(3f_1^2+f_1)-\lambda(f_1^3+3f_1^2)}{6(1-f_1)^3};$$
$$C_1=R_2^4\frac{\alpha_1(f_1+3)-\lambda(3f_1+1)}{6(1-f_1)^3};\ D_1=-R_2^2\frac{\alpha_1(f_1^2+f_1+2)-\lambda(2f_1^2+f_1+1)}{2(1-f_1)^3}$$
$$A_2=\frac{\lambda}{2};\ B_2=\frac{-\lambda}{6R_2^2}$$

éq 2.29

On peut exprimer analytiquement la pression de contact
En utilisant la continuité du déplacement radial au niveau de l'interface de contact :

$$u_r^1(R_2)=u_r^2(R_2)$$

éq 2.30

on peut exprimer analytiquement la pression de contact :

$$\lambda=\frac{coef_1}{coef_2+coef_3}\alpha_1$$

éq 2.31

telle que :

$$coef_1=\frac{1+\nu_1}{6E_1(1-f_1)^3}[(-12f_1^2-8f_1-12)+\nu_1(12f_1^2+8f_1+12)]$$
$$coef_2=\frac{1+\nu_1}{6E_1(1-f_1)^3}[(-3f_1^3-15f_1^2-9f_1-5)+\nu_1(2f_1^3+18f_1^2+6f_1+6)]$$
$$coef_3=\frac{1+\nu_2}{6E_2}(-3+2\nu_2)$$

éq 2.32

2.1.3 Valeurs testées

On teste la pression de contact à l'interface entre les deux solides, ainsi que les déplacements selon X et Y : u_x, u_y , en déformations planes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La valeur de la pression appliquée sur le bord extérieur de couronne en $r=R_1$ s'exprime sous la forme : $p(\theta)=10^7+10^5\cos(2\theta)(Pa)$, avec $\theta=\arctan(\frac{Y}{X})$.

On testera les valeurs les valeurs min et max des déplacements et de la pression de contact. On effectuera pour chaque modélisation deux calculs : un premier calcul avec contact et un deuxième calcul sans contact. On testera les valeurs pour chaque calcul. On appellera « calcul_1 » le calcul avec contact et « calcul_2 » le calcul sans contact.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation en déformations planes (D_PLAN).
Les modules de Young $E_1=E_2$ et les coefficients de Poisson $\nu_1=\nu_2$ sont respectivement $1.0E9\,Pa$ et 0.2 . La pression appliquée sur le bord extérieur vaut $1.0E7+10E5.\cos(2\theta)\ (Pa)$, θ étant l'angle polaire.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 3.2-1) comporte :
- 240 mailles de type SEG2;
- 3120 mailles de type QUAD4.

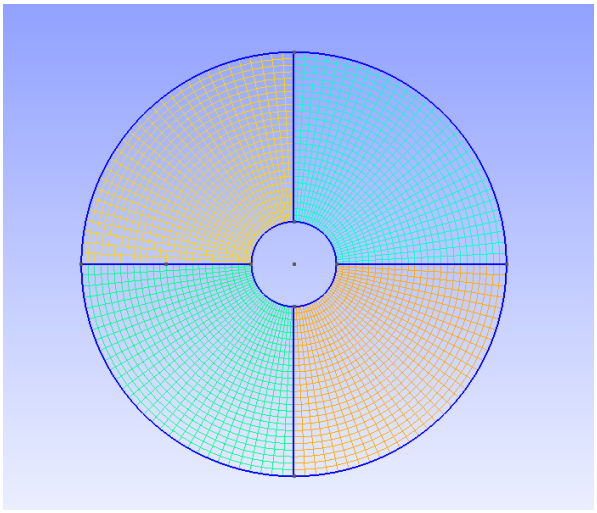


Figure 3.2-a: Le maillage de la modélisation A

3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur minimale et la valeur maximale des déplacements et de la pression de contact au niveau de l'interface.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	tolérance
DX max (calcul_1)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_1)	analytique	0.00422769400922	0,1%
LAGS_C max (calcul_1)	analytique	-9852073.73272	0,1%
DX min (calcul_1)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_1)	analytique	-0.00422769400922	0,1%
LAGS_C min (calcul_1)	analytique	-10147926.2673	0,1%
DX max (calcul_2)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_2)	analytique	0.00422769400922	0,1%
DX min (calcul_2)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_2)	analytique	-0.00422769400922	0,1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation en déformations planes (D_PLAN).

Les modules de Young $E_1=E_2$ et les coefficients de Poisson $\nu_1=\nu_2$ sont respectivement $1.0E9\,Pa$ et 0.2 . La pression appliquée sur le bord extérieur vaut $1.0E7+10E5.\cos(2\theta)\ (Pa)$, θ étant l'angle polaire.

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 3.2-1) comporte :

- 240 mailles de type SEG3;
- 3360 mailles de type QUAD8.

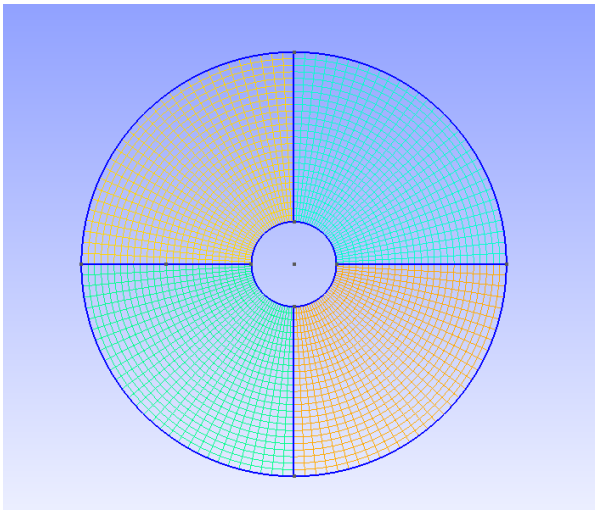


Figure 4.2-a: Le maillage de la modélisation B

4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur minimale et la valeur maximale des déplacements et de la pression de contact au niveau de l'interface.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	tolérance
DX max (calcul_1)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_1)	analytique	0.00422769400922	0,1%
LAGS_C max (calcul_1)	analytique	-9852073.73272	0,1%
DX min (calcul_1)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_1)	analytique	-0.00422769400922	0,1%
LAGS_C min (calcul_1)	analytique	-10147926.2673	0,1%
DX max (calcul_2)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_2)	analytique	0.00422769400922	0,1%
DX min (calcul_2)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_2)	analytique	-0.00422769400922	0,1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation en déformations planes (D_PLAN).

Les modules de Young $E_1=E_2$ et les coefficients de Poisson $\nu_1=\nu_2$ sont respectivement $1.0E9\,Pa$ et 0.2 . La pression appliquée sur le bord extérieur vaut $1.0E7+10E5.\cos(2\theta)\ (Pa)$, θ étant l'angle polaire.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 3.2-1) comporte :
- 232 mailles de type SEG2;
- 2900 mailles de type QUAD4.

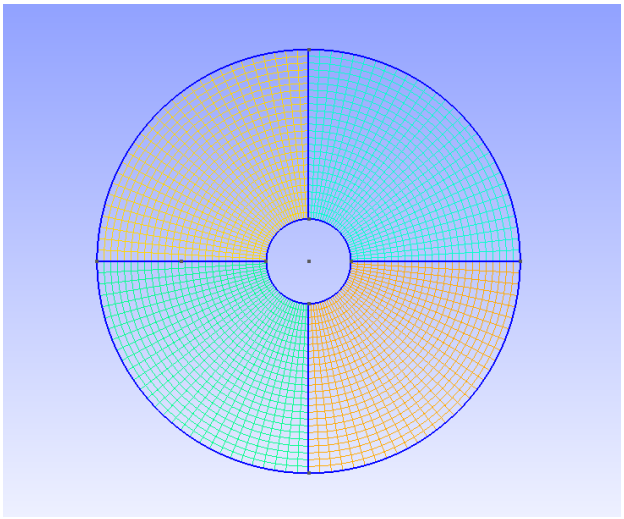


Figure 5.2-a: Le maillage de la modélisation C

5.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur minimale et la valeur maximale des déplacements et de la pression de contact au niveau de l'interface.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	tolérance
DX max (calcul_1)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_1)	analytique	0.00422769400922	0,1%
LAGS_C max (calcul_1)	analytique	-9852073.73272	0,1%
DX min (calcul_1)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_1)	analytique	-0.00422769400922	0,1%
LAGS_C min (calcul_1)	analytique	-10147926.2673	0,1%
DX max (calcul_2)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_2)	analytique	0.00422769400922	0,1%
DX min (calcul_2)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_2)	analytique	-0.00422769400922	0,1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation en déformations planes (D_PLAN).

Les modules de Young $E_1=E_2$ et les coefficients de Poisson $\nu_1=\nu_2$ sont respectivement $1.0E9\,Pa$ et 0.2 . La pression appliquée sur le bord extérieur vaut $1.0E7+10E5.\cos(2\theta)\ (Pa)$, θ étant l'angle polaire.

6.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 3.2-1) comporte :

- 232 mailles de type SEG3;
- 2900 mailles de type QUAD8.

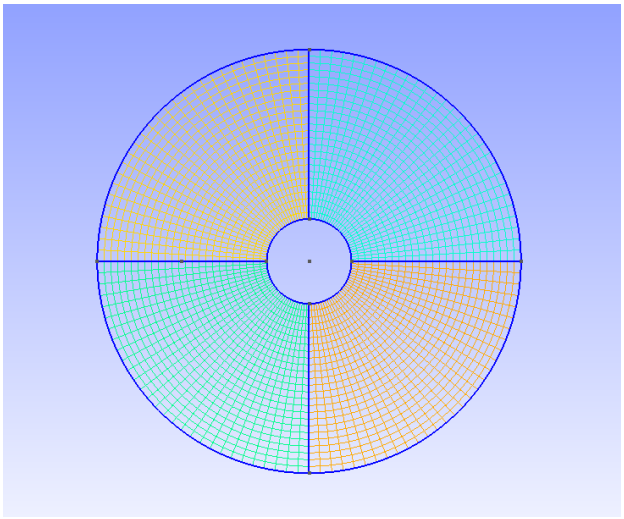


Figure 6.2-a: Le maillage de la modélisation D

6.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur minimale et la valeur maximale des déplacements et de la pression de contact au niveau de l'interface.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	tolérance
DX max (calcul_1)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_1)	analytique	0.00422769400922	0,1%
LAGS_C max (calcul_1)	analytique	-9852073.73272	0,1%
DX min (calcul_1)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_1)	analytique	-0.00422769400922	0,1%
LAGS_C min (calcul_1)	analytique	-10147926.2673	0,1%
DX max (calcul_2)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_2)	analytique	0.00422769400922	0,1%
DX min (calcul_2)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_2)	analytique	-0.00422769400922	0,1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation en déformations planes (D_PLAN).

Les modules de Young $E_1=E_2$ et les coefficients de Poisson $\nu_1=\nu_2$ sont respectivement $1.0E9\,Pa$ et 0.2. La pression appliquée sur le bord extérieur est celle équivalente à l'application d'une pression de $1.0E7+10E5.\cos(2\theta)\ (Pa)$, sur un disque, θ étant l'angle polaire.

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 3.2-1) comporte :

- 120 mailles de type SEG2;
- 900 mailles de type QUAD4.

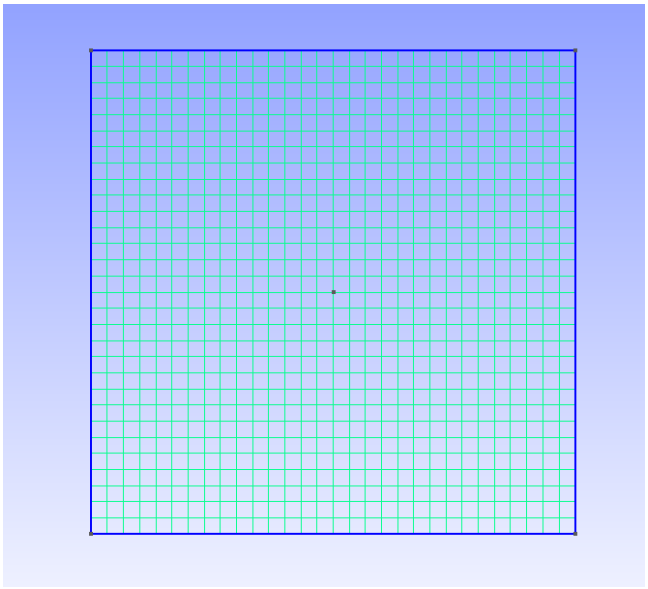


Figure 7.2-a: Le maillage de la modélisation E

7.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur minimale et la valeur maximale des déplacements et de la pression de contact au niveau de l'interface.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	tolérance
DX max (calcul_1)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_1)	analytique	0.00422769400922	0,1%
DX min (calcul_1)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_1)	analytique	-0.00422769400922	0,1%
LAGS_C min (calcul_1)	analytique	-10147926.2673	0,1%
DX max (calcul_2)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_2)	analytique	0.00422769400922	0,1%
DX min (calcul_2)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_2)	analytique	-0.00422769400922	0,1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation en déformations planes (D_PLAN).

Les modules de Young $E_1=E_2$ et les coefficients de Poisson $\nu_1=\nu_2$ sont respectivement $1.0E9\,Pa$ et 0.2 . La pression appliquée sur le bord extérieur est celle équivalente à l'application d'une pression de $1.0E7+10E5.\cos(2\theta)\ (Pa)$, sur un disque, θ étant l'angle polaire.

8.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 3.2-1) comporte :

- 120 mailles de type SEG3;
- 900 mailles de type QUAD8.

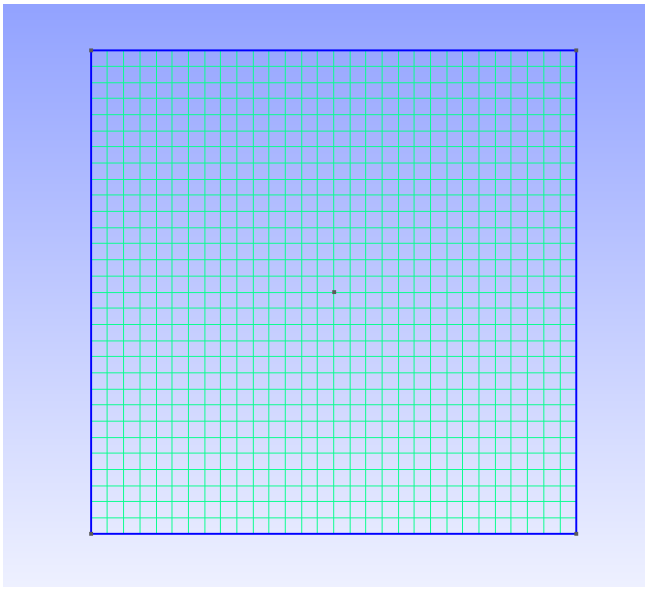


Figure 8.2-a: Le maillage de la modélisation F

8.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur minimale et la valeur maximale des déplacements et de la pression de contact au niveau de l'interface.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	tolérance
DX max (calcul_1)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_1)	analytique	0.00422769400922	0,1%
LAGS_C max (calcul_1)	analytique	-9852073.73272	0,1%
DX min (calcul_1)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_1)	analytique	-0.00422769400922	0,1%
LAGS_C min (calcul_1)	analytique	-10147926.2673	0,1%
DX max (calcul_2)	analytique	0.00441230599078	0,1%
DY max (calcul_2)	analytique	0.00422769400922	0,1%
DX min (calcul_2)	analytique	-0.00441230599078	0,1%
DY min (calcul_2)	analytique	-0.00422769400922	0,1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Conclusion

Ce cas test permet de valider la formulation contact continue combinée à X-FEM en présence de surfaces de contact courbes avec des maillages linéaires et quadratiques, en 2D. Il a notamment pu permettre d'établir les ordres de convergence pour la méthode de contact continue combinée à X-FEM et de vérifier une convergence en énergie de 1 et en déplacement de 2 pour les maillages linéaires, de 2 en énergie et de 3 en déplacement pour les maillages quadratiques, pour des schémas d'intégration suffisamment riches, lorsque l'interface de contact est conforme au maillage et que le maillage est rayonnant ou non conforme.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)