# SSNP159 – Energie élastique en grandes déformations plastiques d'un barreau en traction

**Résumé :**

Ce test mécanique quasi-statique consiste soumettre à une traction simple un barreau de section rectangulaire ( 3D ) ou cylindrique ( 2D axisymétrique). L'objet est de valider le calcul des énergies élastiques dans trois formalismes de déformation : 'PETIT', 'GDEF_LOG' et 'SIMO_MIEHE', avec la commande POST_ELEM.
De plus, la modélisation B de ce cas test, propose de tester le mot-clef facteur ETAT_INIT proposé par la commande STAT_NON_LINE, avec GDEF_LOG. L'utilisateur désirant imposer un état de contrainte initial avec le formalismeGDEF_LOG trouvera les informations nécessaires.

Le barreau est modélisé par un élément volumique (HEXA20, modélisation A) ou quadrangulaire (QUAD4, pour une modélisation axisymétrique, modélisation B).

La solution est analytique.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie

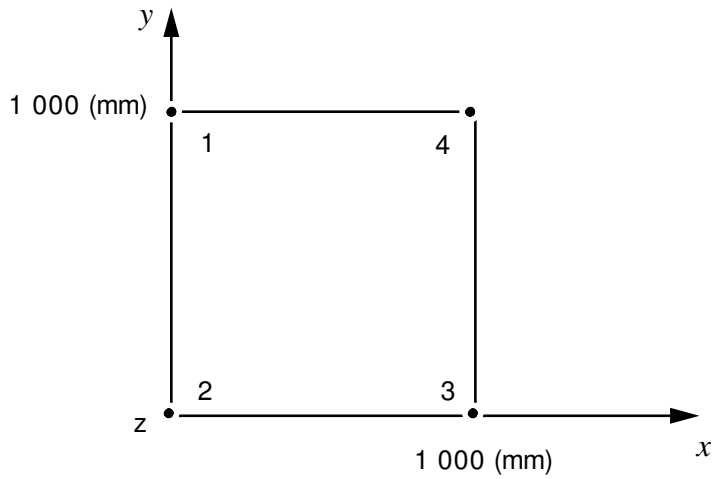



**Figure 1.1-1: Géométrie de référence**

## 1.2 Propriétés du matériau

Le matériau obéit à une loi de comportement en grandes déformations plastique avec écrouissage isotrope linéaire.
La courbe de traction est donnée dans le plan déformation logarithmique - contrainte rationnelle.

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0} \cdot \frac{l}{l_0}$$

$$\nu = 0,3$$
$$E = 200000\text{MPa}$$
$$E_T = 2000\text{MPa}$$
$$\sigma_y = 1000\text{MPa}$$

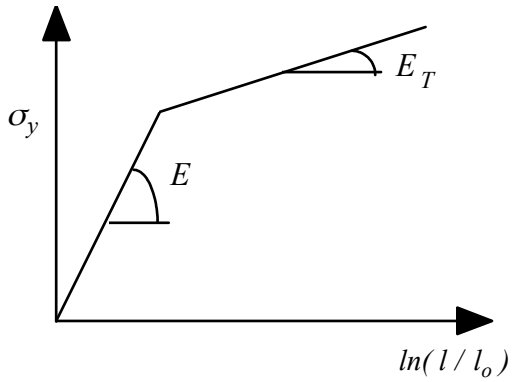



**Figure 1.2-1: Courbe de traction**

$l_0$ et $l$ sont, respectivement, la longueur initiale et la longueur actuelle de la partie utile de l'éprouvette.

$S_0$ et $S$ sont, respectivement, la surface initiale et actuelle.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Le barreau, de longueur initiale $l_0$ , bloqué dans la direction $Ox$ sur la face [1,2] à un déplacement mécanique de traction $u^{meca}$ variant linéairement en temps sur la face $[3,4]$ :

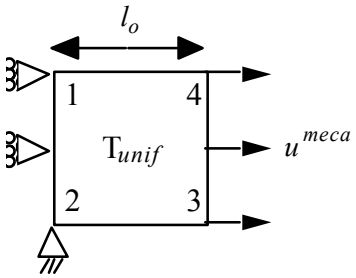



**Figure 1.3-1: Conditions limites et chargement**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solution de référence

La solution analytique de SIMO_MIEHE permet de définir le chargement à appliquer pour obtenir une contrainte de Kirchhoff de $1500\text{MPa}$ . Ce chargement est ensuite appliqué aux autres modèles.

## 2.1 Résultat générique aux formalismes

Pour un essai de traction uniaxial suivant la direction $\boldsymbol{x}$ , les tenseurs de contrainte de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ et de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\tau}=J\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

Les tenseurs gradients de la transformation $\mathbf{F}$ et $\overline{\mathbf{F}}$ s'expriment :

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}F & 0 & 0\\ 0 & F_y & 0\\ 0 & 0 & F_y\end{bmatrix},\overline{\boldsymbol{F}}=J^{\frac{-1}{3}}=\begin{bmatrix}\bar{F} & 0 & 0\\ 0 & \bar{F}_y & 0\\ 0 & 0 & \bar{F}_y\end{bmatrix}$$

Le déplacement vérifie :

$$F=1+\frac{u^{meca}}{l_0}$$

La fonction d'écrouissage isotrope linéaire s'écrit :

$$R(p)=\frac{E\,E_T}{E-E_T}$$

## 2.2 Résultats pour Simo_Miehe

Le tenseur isochore de déformations plastiques $G^P$ est de la forme :

$$\boldsymbol{G^P}=\begin{bmatrix}G^P & 0 & 0\\ 0 & G_y^P & 0\\ 0 & 0 & G_y^P\end{bmatrix}\text{ , avec }G_y^P=\frac{1}{\sqrt{G^P}}\text{ car }det(\boldsymbol{G^P})=1$$

La loi de comportement (partie hydrostatique) s'écrit :

$$tr(\boldsymbol{\tau})=\frac{3\mathrm{K}}{2}(J^2-1)\Rightarrow J^2=\frac{2\tau}{3\mathrm{K}}+1$$

La fonction seuil de plasticité s'écrit :

$$f=0=\tau-R(p)-\sigma_y\Rightarrow p=\frac{E-E_T}{E\,E_T}(\tau-\sigma_y)$$

La loi d'écoulement plastique s'écrit :

$$\overline{\boldsymbol{F}}.\dot{\boldsymbol{G}}^{\boldsymbol{P}}.\overline{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{T}}=-3\,\dot{p}\frac{1}{\tau_{eq}}dev(\boldsymbol{\tau}).(\overline{\boldsymbol{F}}.\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{P}}.\overline{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{T}})$$

En prenant la première composante, on obtient :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\frac{\dot{G}^P}{G^P}=-2\,\dot{p}\Rightarrow G^p=e^{-2\mathrm{p}}$ car $G^P(0)=1$

Pour conclure le problème, on utilise la première composante de la partie déviatorique de la contrainte :

$$dev(\tau)=\mu\, dev(\bar{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{e}})\Rightarrow\tau=\mu\left(\bar{F}^2 G^P-\bar{F}_y^2 G_y^P\right)\Rightarrow\bar{F}^3-\bar{F}\frac{\tau}{\mu G^P}-\frac{1}{\left(G^P\right)^{(3/2)}}=0\ ,$$

car $\bar{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{e}}=\bar{F}.\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{P}}.\bar{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{T}}$

L'énergie élastique s'écrit alors :

$$\psi_{SM}^{elas}=\frac{K}{2}\left[\frac{J^2-1}{2}-\ln J\right]+\frac{\mu}{2}\left[tr\,\bar{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{e}}-3\right]=\frac{K}{2}\left[\frac{J^2-1}{2}-\ln J\right]+\frac{\mu}{2}\left[\bar{F}^2 G^P+\frac{2}{\bar{F}\sqrt{\overline{G^P}}}-3\right]$$

Pour une contrainte de Kirchhoff de 1500MPa, peut alors successivement déterminer :

- $J=1{,}003$
- $\sigma=1495\,MPa$
- $p=0{,}2475$
- $G^p=0{,}6096$
- $\bar{F}=1{,}289$
- $F=1{,}290$
- $u^{meca}=290\,mm$
- $\psi_{SM}^{elas}=5{,}63\,MPa$ au point matériel.

Le déplacement appliqué pour les deux modélisations et les 3 formalismes sera donc $u^{meca}=290\,mm$ .

## 2.3 Résultats pour GDEF_LOG

La déformation logarithmique s'écrit :

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{log}}=\frac{1}{2}\ln[\boldsymbol{C}]=\frac{1}{2}\ln[\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}}.\boldsymbol{F}]=\begin{bmatrix}\ln F & 0 & 0\\ 0 & \ln F_y & 0\\ 0 & 0 & \ln F_y\end{bmatrix}$$

Le quart supérieur gauche du projecteur lagragien s'en déduit, en notation de Voigt :

$$\boldsymbol{P}=2\frac{\partial\,\boldsymbol{E}_{\mathbf{log}}}{\partial\,\boldsymbol{C}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{2}{F^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{F_y^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{F_y^2}\end{bmatrix}$$

Et du fait de l'expression de la deuxième contrainte de Piola-Kirchhoff :

$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}:\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F}^{-1}.\tau\,.\,\boldsymbol{F}^{-T}\Rightarrow\boldsymbol{T}=\tau$

La loi de comportement s'écrit :

$T=E(\ln F-p)$

Du fait du seuil de plasticité :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$f=0=T-R(p)-\sigma_y \Rightarrow p=\frac{E-E_T}{E\,E_T}\left(T-\sigma_y\right)=\frac{E\ln F-\sigma_y}{E+\frac{E\,E_T}{E-E_T}}\ ,$$

L'énergie élastique de ce formalisme s'écrit donc :

$$\psi_{\log}^{elas}=\frac{1}{2}\frac{T^2}{E}$$

Du déplacement imposé $u^{meca}=290\,mm$ , on déduit :

- $F=1,290$
- $\ln F=0,255$
- $p=0,2475$
- $T=1500\text{MPa}$
- $\sigma=1495\text{MPa}$
- $\psi_{\log}^{elas}=5,625\,MPa$ au point matériel.

## 2.4 Résultats en petites déformations

En petites déformations, le résultat est classique.
Déformation axiale :

$$\varepsilon_x=\frac{u^{meca}}{l_0}$$

Comportement :

$$\sigma=E\left(\varepsilon_x-p\right)$$

Fonction seuil :

$$\sigma-R(p)-\sigma_y=0$$

D'où :

$$p=\frac{E\,\varepsilon_x-\sigma_y}{E+\frac{E\,E_T}{E-E_T}}$$

$$\sigma=E\left(\varepsilon_x-p\right)$$

Energie élastique :

$$\psi_{HPP}^{elas}=\frac{\sigma^2}{2\,E}$$

Du déplacement imposé $u^{meca}=290\,mm$ , on déduit :

- $\varepsilon_x=0,029$
- $p=0,281$
- $\sigma=1570\text{MPa}$
- $\psi_{\log}^{elas}=6,16\,MPa$ au point matériel.

## 2.5 Tests effectués

Pour chacun des formalismes et chacune des modélisations, on teste les valeurs du déplacement imposé, de la contrainte de Cauchy $\sigma$ , de la déformation plastique cumulée $p$ et de l'énergie élastique.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Attention, l'énergie élastique testée est la valeur pour le barreau (pas du point matériel). Pour la modélisation axisymétrique, il faut donc multiplié la valeur de l'énergie élastique du point matériel par $\frac{\pi R^2}{2\pi}$ .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique : 1 maille HEXA20
1 maille QUAD8

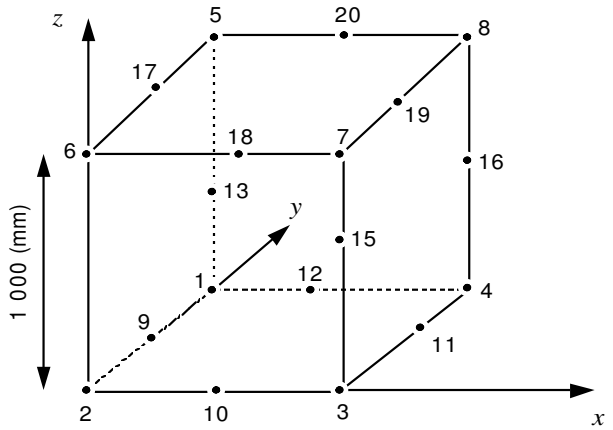



**Figure 3.1-1: Maillage de la modélisation A**

**Conditions aux limites :**

| | | |
|---|---|---|
| $N2$ : | $U_x=U_y=U_z=0$ | $N9$ , $N13$ , $N14$ , $N5$ , $N17$ : $U_x=0$ |
| $N1$ : | $U_x=U_z=0$ | |
| $N6$ : | $U_x=U_y=0$ | |

**Tableau 3.1-1: Conditions limites modélisation A**

**Charge :** Traction sur la face $[3,4,8,7,11,16,19,15]$

Le nombre total d'incréments est de 20 (20 incréments entre $t=0\text{s}$ et $2\text{s}$ )
La convergence est réalisée si le résidu RESI_GLOB_RELA est inférieur ou égal à $10^{-6}$.

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20

Nombre de mailles : 2

1 HEXA20
1 QUAD8

## 3.3 Grandeurs testées et résultats



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

| Identification | Référence | | | Tolérance |
|---|---|---|---|---|
| | SIMO_MIEHE | GDEF_LOG | HPP | |
| $t=2$ Déplacement $DX$ ( $N8$ ) | 290 | 290 | 290 | 1,00% |
| $t=2$ Contraintes $SIGXX$ ( $PG1$ ) | 1495 | 1495 | 1570 | 1,00% |
| $t=2$ Variable $p$ $VARI$ ( $PG1$ ) | 0,2475 | 0,2475 | 0,282 | 1,50% |
| $t=2$ ENER_ELAS, TOTALE | 5,63E+009 | 5,625E9 | 6,16E9 | 5,00% |

**Tableau 3.3-1: Résultats de la modélisation A**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Modélisation B

## 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation $2D$ axisymétrique : 1 maille QUAD4
1 maille SEG2

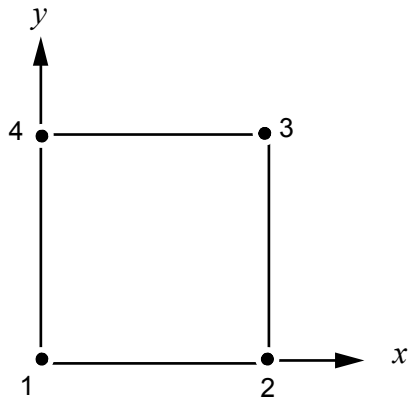



**Figure 4.1-1: Maillage de la modélisation B**

**Conditions aux limites :**

| | |
|---|---|
| $N1$ : | $U_Y=0$ |
| $N2$ : | $U_Y=0$ |

**Tableau 4.1-1: Conditions limites de la modélisation B**

**Chargement :**

Traction sur la face $[3,4]$ (maille SEG2)
Le nombre total d'incréments est de 20 (20 incréments entre $t=0\text{s}$ et $2\text{s}$ )

La convergence est réalisée si le résidu RESI_GLOB_RELA est inférieur ou égal à $10^{-6}$.

## 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4
Nombre de mailles : 2

1 QUAD4
1 SEG2

## 4.3 Grandeurs testées et résultats



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

| Identification | Référence | | | Tolérance |
|---|---|---|---|---|
| | SIMO_MIEHE | GDEF_LOG | HPP | |
| $t=2$ Déplacement $DX$ ( $N8$ ) | 290 | 290 | 290 | 1,00% |
| $t=2$ Contraintes $SIGXX$ ( $PG1$ ) | 1495 | 1495 | 1570 | 1,00% |
| $t=2$ Variable $p$ $VARI$ ( $PG1$ ) | 0,2475 | 0,2475 | 0,282 | 1,50% |
| $t=2$ ENER ELAS, TOTALE | 2,82E+009 | 2,81 E9 | 3,08 E9 | 5,00% |

**Tableau 4.3-1: Résultats de la modélisation B**

## 4.4 GDEF_LOG avec ETAT_INIT

Pour imposer un champ de contrainte initial en grandes déformations avec le formalisme GDEF_LOG, l'utilisateur doit donner en entrée le tenseur de contrainte défini dans l'espace logarithmique $\boldsymbol{T}$ (et non celui de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ ). Les composantes de ce dernier, étant stockées en tant que variables internes, il faut utiliser les opérandes VARI et DEPL du mot-clé facteur ETAT_INIT de la commande STAT_NON_LINE comme indiqué ci-dessous (ces champs peuvent par exemple être obtenus par la commande CREA_CHAMP).

On récupère le champ de variables internes (pour obtenir $\boldsymbol{T}$ ) et également le champ de déplacement correspondant :

```
VAR_LOG1=CREA_CHAMP(INFO=2,
          TYPE_CHAM='ELGA_VARI_R',
          OPERATION='EXTR',
          RESULTAT=LOG1,
          NOM_CHAM='VARI_ELGA',
          INST=1.0,);


DEP_LOG1=CREA_CHAMP(INFO=2,
          TYPE_CHAM='NOEU_DEPL_R',
          OPERATION='EXTR',
          RESULTAT=LOG1,
          NOM_CHAM='DEPL',
          INST=1.0,);
```

puis on renseigne dans STAT_NON_LINE, l'état de contrainte initial :

```
ETAT_INIT=_F(VARI=VAR_LOG1,
                  DEPL=DEP_LOG1).
```



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Synthèse des résultats

Les résultats trouvés en terme d'énergie élastique avec *Code_Aster* sont très satisfaisants en petites déformations et en déformations logarithmiques, avec des écarts à l'analytique inférieurs à 0,1%, et corrects en déformation de SIMO_MIEHE, avec un écart à l'analytique de 3% environ, dû au terme $tr\left(\bar{\boldsymbol{b}}^{e}\right)$, sur lequel la cinquième décimale joue un rôle significatif.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)