# SSNP109 - Câble de précontrainte excentré dans une poutre droite en béton

**Résumé**

On considère une poutre droite en béton, de section rectangulaire, traversée sur sa longueur par un câble de précontrainte en acier. Le câble est droit, parallèle à la fibre moyenne de la poutre, et passe à mi-hauteur de la section de la poutre, en étant excentré par rapport au plan moyen. La section gauche de la poutre et l'extrémité gauche du câble sont fixes. Le câble est mis en traction à son extrémité droite, afin de précontraindre la poutre en flexion-compression. Les pertes de tension le long du câble sont négligées.

Le but de ce cas-test est de valider la méthode de calcul de l'état d'équilibre d'une structure de béton précontrainte par comparaison à une solution de référence analytique.

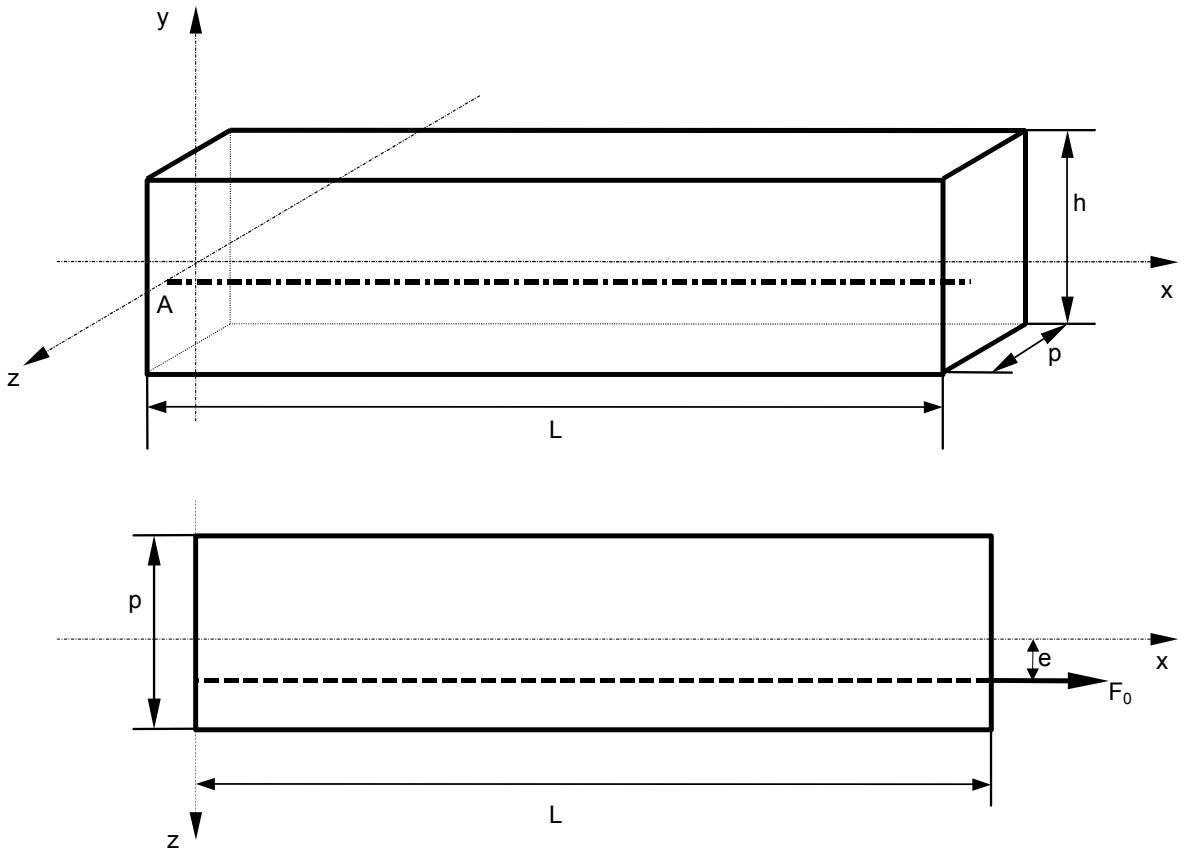


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie

La poutre en béton est droite, de section rectangulaire.
Ses dimensions sont : $L \times h \times p = 10\,m \times 0{,}4\,m \times 0{,}2\,m$ ( $y = h/2$ ).
Le câble traverse la poutre parallèle à la fibre moyenne de la poutre, à mi-hauteur. Son excentricité par rapport au plan moyen est $e = 0{,}05\,m$ ( $z = e$ ).
L'aire de la section droite du câble vaut $S_a = 1{,}5.10^{-4}\,m^2$ .




## 1.2 Propriétés des matériaux

Matériau béton constituant la poutre : Module d'Young $E_b = 3.10^{10}\,Pa$
Matériau acier constituant le câble : Module d'Young $E_a = 2{,}1.10^{11}\,Pa$

Le coefficient de Poisson est pris égal à 0 pour les deux matériaux. On annule donc les effets de Poisson dans les directions $y$ et $z$ . Les déplacements n'ont de composantes que dans le plan $(x, z)$ .

Les pertes de tension dans le câble étant négligées, les divers paramètres servant à leur estimation sont fixés à 0.

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Le point $A$ situé en bas du bord gauche de la poutre, de coordonnées $(0\ ;-h/2\ ;0)$ , est bloqué en translation suivant les trois directions et en rotation autour de l'axe $y$ .
Le blocage du degré de liberté de rotation $DRY$ implique une pente nulle de la déformée de la fibre moyenne en $x = 0$ .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'extrémité gauche du câble, de coordonnées $(0\ ;0\ ;e)$, est bloquée en translation suivant les trois directions.

On applique à l'extrémité droite du câble, de coordonnées $(L;0\ ;e)$, un effort normal de traction $(F_0\ ;0\ ;0)$ où $F_0=2.10^5 N$.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solution de référence

La solution analytique de référence est déterminée par la théorie des poutres.
On considère une poutre encastrée-libre. Les caractéristiques géométriques sont celles définies en paragraphe [§2.1]. Le câble précontraint applique à l'extrémité libre un effort normal de compression $(-F\,;0\,;0)$ et un moment fléchissant $(0\,;-eF\,;0)$.

La solution de ce problème est la suivante :

**Tenseur des contraintes** : $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec $\sigma_{xx} = -\frac{F}{hp}\left(1+\frac{12ez}{p^2}\right)$

**Déplacements :**
$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= -\frac{F}{E_b hp}\left(1+\frac{12ez}{p^2}\right)x \\ v(x,y,z) &= \frac{\nu_b F}{E_b hp}\left(1+\frac{12ez}{p^2}\right)y+\frac{h}{2} \\ w(x,y,z) &= \frac{F}{E_b hp}\left(\nu_b z+\frac{6e}{p^2}\right)x^2-\nu_b\left(y^2-\frac{h^2}{4}-z^2\right) \end{aligned}$$

avec les **conditions aux limites** : $\begin{matrix} u=v=w=0 \\ \theta_y=0 \end{matrix}$ en $x=0$, $y=-\frac{h}{2}$, $z=0$

Lorsque les effets de Poisson sont négligés ($\nu_b=0$), la solution en déplacements se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= -\frac{F}{E_b hp}\left(1+\frac{12ez}{p^2}\right)x \\ v(x,y,z) &= 0 \\ w(x,y,z) &= \frac{F}{E_b hp}\times\frac{6ex^2}{p^2} \end{aligned}$$

Les valeurs numériques de référence sont calculées à l'aide des expressions analytiques ci-dessus, en utilisant pour $F$ la valeur à l'équilibre d'ensemble de l'effort normal dans le câble :

$$F = -F_0\frac{E_b hp}{E_b hp+E_a S_a\left(1+\frac{12e^2}{p^2}\right)}$$

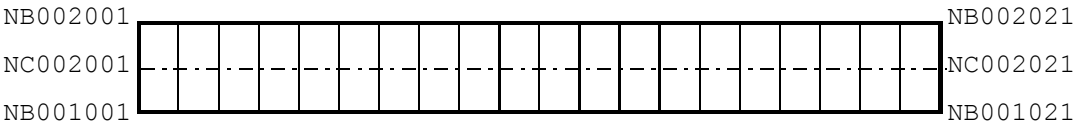


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation

La figure ci-dessous donne une représentation simplifiée du maillage de la poutre.




La poutre en béton est représentée par 20 éléments de type DKT, supportés par autant de mailles quadrangles à 4 nœuds.

Une épaisseur $p=0,2m$ leur est affectée, ainsi qu'un matériau béton pour lequel sont définis les comportements ELAS (module d'Young $E_b=3.10^{10}Pa$) et BPEL_BETON : les paramètres caractéristiques de cette relation sont fixés à 0 car on néglige les pertes de tension le long du câble de précontrainte.

Les degrés de liberté $DX$, $DY$, $DZ$ et $DRY$ du nœud $NB001001$ sont bloqués.

Le câble est représenté par 20 éléments MECA_BARRE, supportés par autant de mailles segments à 2 nœuds. Les extrémités gauche et droite sont respectivement les nœuds $NC001001$ et $NC001021$ .

Une aire de section droite $S_a=1,5.10^{-4}m^2$ est affectée aux éléments, ainsi qu'un matériau acier pour lequel sont définis les comportements ELAS (module d'Young $E_a=2,1.10^{11}Pa$) et BPEL_ACIER : les paramètres caractéristiques de cette relation sont fixés à 0 (pertes de tension négligées), à l'exception de la contrainte limite élastique pour laquelle la valeur de $f_{prg}=1,77.10^9Pa$ est choisie.

Les degrés de liberté $DX$, $DY$, et $DZ$ du nœud $NC001001$ sont bloqués.

La tension $F_0=2.10^5N$ est appliquée au nœud $NC001021$ . Cette valeur de tension est cohérente avec les valeurs de section et de limite élastique, pour un câble de précontrainte de type toron.

Le calcul de l'état d'équilibre de l'ensemble poutre et câble est effectué en un seul pas, le comportement étant élastique. On réalise ensuite deux calculs complémentaires permettant de déterminer les contraintes en peaux inférieure et supérieure ( $z=\pm p/2$ ) de la poutre.

## 3.2 Etapes de calcul et fonctionnalités testées

Les principales étapes de calcul correspondent aux fonctionnalités que l'on souhaite valider :

- opérateur DEFI_MATERIAU : définition des relations de comportement BPEL_BETON et BPEL_ACIER, dans le cas particulier où les pertes de tension le long du câble de précontrainte sont négligées (valeurs par défaut des paramètres) ;
- opérateur DEFI_CABLE_BP : détermination d'un profil de tension constant le long du câble de précontrainte, les pertes étant négligées ; calcul des cœfficients des relations cinématiques entre les degrés de liberté des nœuds du câble et les degrés de liberté des nœuds «voisins» de la poutre en béton, dans le cas d'un câble excentré ;
- opérateur AFFE_CHAR_MECA : définition d'un chargement de type RELA_CINE_BP ;
- opérateur STAT_NON_LINE, option COMPORTEMENT : calcul de l'état d'équilibre en tenant compte du chargement de type RELA_CINE_BP.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On utilise enfin l'opérateur CALC_CHAMP option SIGM_ELNO afin de calculer les contraintes en peau inférieure puis en peau supérieure de la poutre.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 3.3 Grandeurs testées et résultats

La valeur à l'équilibre de l'effort normal dans le câble est $F = 1{,}9550910^5 N$. Cette valeur est utilisée pour calculer les résultats numériques de référence à l'aide des expressions analytiques explicitées en paragraphe [§3].

### 3.3.1 Déplacements des nœuds de la pièce de béton

On compare les valeurs extraites du champ DEPL issu de STAT_NON_LINE aux valeurs théoriques de référence correspondant au plan $Z = 0$.
La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 0,1 %.

| Nœud | Composante | Valeur de référence | Valeur calculée | Ecart relatif |
|---|---|---|---|---|
| NB001006 | DX | –2,036552.10$^{-4}$ m | –2,0365561834835.10$^{-4}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB002006 | DX | –2,036552.10$^{-4}$ m | –2,0365561835042.10$^{-4}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB001011 | DX | –4,073104.10$^{-4}$ m | –4,0731123669671.10$^{-4}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB002011 | DX | –4,073104.10$^{-4}$ m | –4,0731123670073.10$^{-4}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB001016 | DX | –6,109656.10$^{-4}$ m | –6,1096685504506.10$^{-4}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB002016 | DX | –6,109656.10$^{-4}$ m | –6,1096685505104.10$^{-4}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB001021 | DX | –8,146208.10$^{-4}$ m | –8,1462247339343.10$^{-4}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB002021 | DX | –8,146208.10$^{-4}$ m | –8,1462247340137.10$^{-4}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| | | | | |
| NB001006 | DZ | 3,818535.10$^{-3}$ m | 3,8185428440476.10$^{-3}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB002006 | DZ | 3,818535.10$^{-3}$ m | 3,8185428440475.10$^{-3}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB001011 | DZ | 1,527414.10$^{-2}$ m | 1,5274171376197.10$^{-2}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB002011 | DZ | 1,527414.10$^{-2}$ m | 1,5274171376197.10$^{-2}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB001016 | DZ | 3,436682.10$^{-2}$ m | 3,4366885596448.10$^{-2}$ m | 1,91.10$^{-6}$ % |
| NB002016 | DZ | 3,436682.10$^{-2}$ m | 3,4366885596448.10$^{-2}$ m | 1,91.10$^{-6}$ % |
| NB001021 | DZ | 6,109656.10$^{-2}$ m | 6,1096695504804.10$^{-2}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB002021 | DZ | 6,109656.10$^{-2}$ m | 6,1096695504804.10$^{-2}$ m | 2,05.10$^{-6}$ % |

### 3.3.2 Densité linéique d'effort normal sur le plan moyen de la pièce de béton (analyse avec le modèle de plaque)

On compare les valeurs extraites du champ SIEF_ELNO issu de STAT_NON_LINE aux valeurs théoriques de référence.
La composante sur laquelle portent les tests est $N_{XX}$ ( $N_{XX} = s_{xx}\, p$ ).
La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 0,1 %.

| Nœud | Maille | Valeur de référence | Valeur calculée | Ecart relatif |
|---|---|---|---|---|
| NB001001 | QD001001 | –4,887725.10$^5$ N/m | –4,8877348399136.10$^5$ N/m | 2,01.10$^{-6}$ % |
| NB002001 | QD001001 | –4,887725.10$^5$ N/m | –4,8877348399728.10$^5$ N/m | 2,01.10$^{-6}$ % |
| NB001011 | QD001011 | –4,887725.10$^5$ N/m | –4,8877348402090.10$^5$ N/m | 2,01.10$^{-6}$ % |
| NB002011 | QD001011 | –4,887725.10$^5$ N/m | –4,8877348402511.10$^5$ N/m | 2,01.10$^{-6}$ % |
| NB001021 | QD001020 | –4,887725.10$^5$ N/m | –4,8877348403607.10$^5$ N/m | 2,01.10$^{-6}$ % |
| NB002021 | QD001020 | –4,887725.10$^5$ N/m | –4,8877348404039.10$^5$ N/m | 2,01.10$^{-6}$ % |

### 3.3.3 Contrainte normale sur la peau inférieure (z = -0.1 m) de la pièce de béton

On compare les valeurs extraites du champ SIGM_ELNO issu de CALC_CHAMP aux valeurs théoriques de référence.
La composante sur laquelle portent les tests est SIXX.
La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 0,1 %.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

| Nœud | Maille | Valeur de référence | Valeur calculée | Ecart relatif |
|---|---|---|---|---|
| NB001001 | QD001001 | 1,221931.10$^{6}$ Pa | 1,2219337100849.10$^{6}$ Pa | 2,22.10$^{-6}$ % |
| NB002001 | QD001001 | 1,221931.10$^{6}$ Pa | 1,2219337101082.10$^{6}$ Pa | 2,22.10$^{-6}$ % |
| NB001011 | QD001011 | 1,221931.10$^{6}$ Pa | 1,2219337101212.10$^{6}$ Pa | 2,22.10$^{-6}$ % |
| NB002011 | QD001011 | 1,221931.10$^{6}$ Pa | 1,2219337100924.10$^{6}$ Pa | 2,22.10$^{-6}$ % |
| NB001021 | QD001020 | 1,221931.10$^{6}$ Pa | 1,2219337100302.10$^{6}$ Pa | 2,22.10$^{-6}$ % |
| NB002021 | QD001020 | 1,221931.10$^{6}$ Pa | 1,2219337101559.10$^{6}$ Pa | 2,22.10$^{-6}$ % |

### 3.3.4 Contrainte normale sur la peau supérieure (z= 0.1 m) de la pièce de béton

On compare les valeurs extraites du champ SIGM_ELNO issu de CALC_CHAMP aux valeurs théoriques de référence.
La composante sur laquelle portent les tests est SIXX.
La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 0,1 %.

| Nœud | Maille | Valeur de référence | Valeur calculée | Ecart relatif |
|---|---|---|---|---|
| NB001001 | QD001001 | –6,109656.10$^{6}$ Pa | –6,1096685504454.10$^{6}$ Pa | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB002001 | QD001001 | –6,109656.10$^{6}$ Pa | –6,1096685505156.10$^{6}$ Pa | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB001011 | QD001011 | –6,109656.10$^{6}$ Pa | –6,1096685504816.10$^{6}$ Pa | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB002011 | QD001011 | –6,109656.10$^{6}$ Pa | –6,1096685504999.10$^{6}$ Pa | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB001021 | QD001020 | –6,109656.10$^{6}$ Pa | –6,1096685503914.10$^{6}$ Pa | 2,05.10$^{-6}$ % |
| NB002021 | QD001020 | –6,109656.10$^{6}$ Pa | –6,1096685505642.10$^{6}$ Pa | 2,05.10$^{-6}$ % |

## 3.4 Remarques

Les valeurs calculées correspondent effectivement à celles théoriquement attendues. On obtient bien un état de flexion-compression pour la poutre en béton.

# 4 Synthèse

Les résultats obtenus sont validés par comparaison à une solution analytique de référence avec une très bonne précision.

Les fonctionnalités particulières testées sont les suivantes :

- opérateur DEFI_MATERIAU : définition des paramètres caractéristiques des matériaux acier et béton permettant le calcul de la tension le long du câble de précontrainte, suivant les règles du BPEL ;
- opérateur DEFI_CABLE_BP : calcul de la tension le long du câble et des cœfficients des relations cinématiques entre les degrés de liberté des nœuds du câble et les degrés de liberté des nœuds «voisins» de la poutre en béton ;
- opérateur AFFE_CHAR_MECA : définition d'un chargement de type RELA_CINE_BP ;
- opérateur STAT_NON_LINE, option COMPORTEMENT : calcul de l'état d'équilibre en tenant compte du chargement de type RELA_CINE_BP.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)