SSNL130 – Plaque indéformable sur un tapis de ressorts

Résumé :
L'objectif est de tester et de valider les possibilités de la commande AFFE_CARA_ELEM, option RIGI_PARASOL en 2D et en 3D et affecté du comportement DIS_CHOC.
Ce cas test modélise une plaque, considérée comme indéformable, posée sur un tapis de ressorts.

- Les ressorts sont modélisés par des DIS_T (K_T_D_L), cela permet d'imposer des conditions aux limites aux extrémités des ressorts qui ne sont pas liées au solide.
- Le comportement DIS_CHOC permet un comportement unilatéral des ressorts, ce qui laisse une possibilité de décollement de la plaque vis-à-vis du tapis de ressort.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Une plaque rectangulaire de largeur a et de longueur b, appuyée sur un tapis de ressorts.

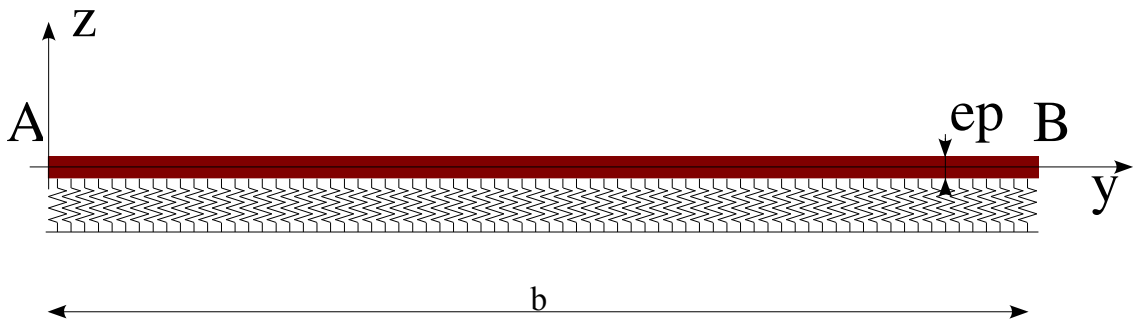


Figure 1.1-a : Schéma de la plaque et des ressorts dans le plan (y,z).

Dimensions :

$a = 1.00\,m$
$b = 2.00\,m$
$ep = 0.30\,m$

1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young : $2.0\mathrm{E}+11\,Pa$
Coefficient de poisson : 0.3
Raideur globale du tapis de ressorts : $K = 10000.0\,N/m$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Le chargement est un chargement de pression de la forme $P = p.(y-b)^2$, avec $p = 5\mathrm{N}/m^4$

Déplacements imposés aux extrémités des ressorts non connectées à la plaque :

- dans l'intervalle de temps $[0,1]$ le déplacement est imposé à 0.0 suivant DX, DY et DZ,
- dans l'intervalle de temps $[1,2]$ le déplacement est imposé à 0.0 suivant DX et DY.
  Suivant DZ il est imposé par la fonction $Dz = (t-1.0)*0.5\mathrm{E}\text{-}02$.

1.4 Conditions initiales

Sans objet pour une analyse statique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul du problème continu

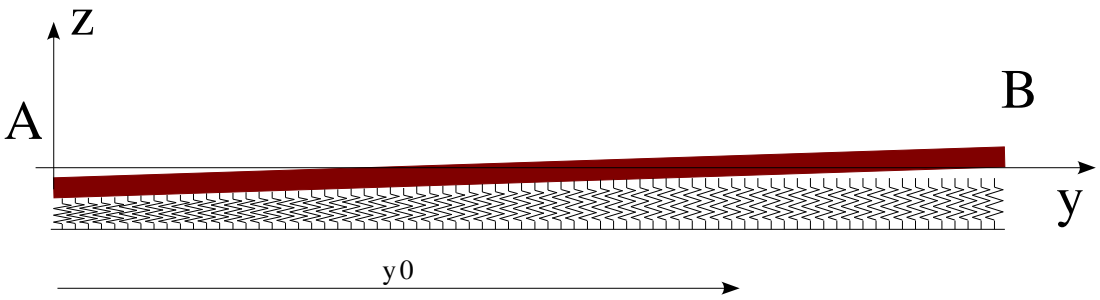


Figure 2.1-a : Schéma de la plaque et des ressorts après chargement.

La résolution du problème consiste à calculer les déplacements verticaux des coins de la plaque et la position du point de décollement vis-à-vis du tapis de ressorts.
Les équations d'équilibres sont les suivantes :
Effort résultant dû au chargement :

$$Fp = \iint_s P.ds = a.p.\frac{b^3}{3} \quad [2.1\text{-}1]$$

Moment résultant au point A dû au chargement :

$$Mp_A = \iint_s P.y.ds = a.p.\frac{b^4}{12} \quad [2.1\text{-}2]$$

La plaque est considérée comme rigide, son déplacement est de la forme $z(y) = U_a\left(1-\frac{y}{y_0}\right)$. Avec U_a le déplacement vertical du point A et y_0 la position du décollement.
Effort de réaction des ressorts :

$$Fr = \iint_s \frac{K}{a.b} U_a\left(1-\frac{y}{y_0}\right) ds = K\, U_a \frac{y_0}{2\,b} \quad [2.1\text{-}3]$$

Moment de réaction des ressorts au point A :

$$Mr_A = \iint_s \frac{K}{a\,b} U_a\left(1-\frac{y}{y_0}\right) y\, ds = K\, U_a \frac{y_0^2}{6\,b} \quad [2.1\text{-}4]$$

La résolution des équations 2.1-1, 2.1-2, 2.1-3, 2.1-4 (équilibre des efforts et des moments) donne le résultat suivant :

$$y_0 = \frac{3\,b}{4} \quad U_a = -\frac{8\,p\,a\,b^3}{9\,K} \text{ on en déduit } U_b = -\frac{U_a}{3}$$

2.2 Méthode de calcul du problème discrétisé

Dans cette analyse le tapis de ressorts n'est plus considéré comme continu. Les ressorts sont régulièrement répartis. Comme précédemment les déplacements verticaux des coins de la plaque et la position de la ligne de décollement vis-à-vis du tapis de ressorts vont être calculés.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

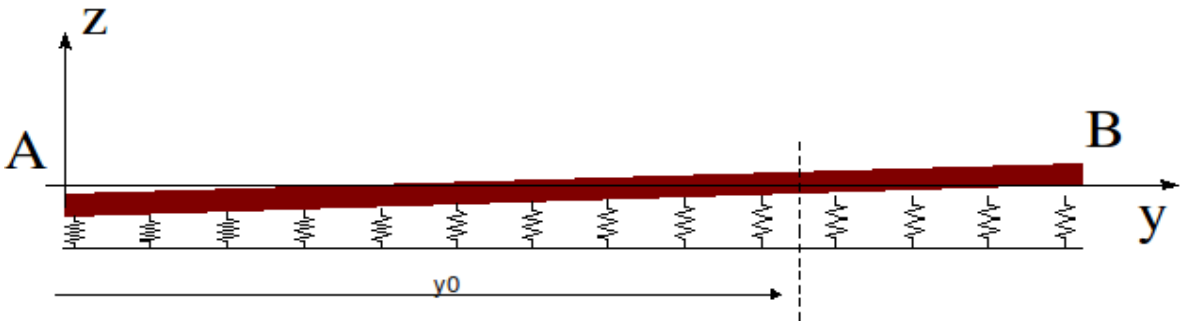


Figure 2.2-a : Schéma de la plaque et des ressorts après chargement.

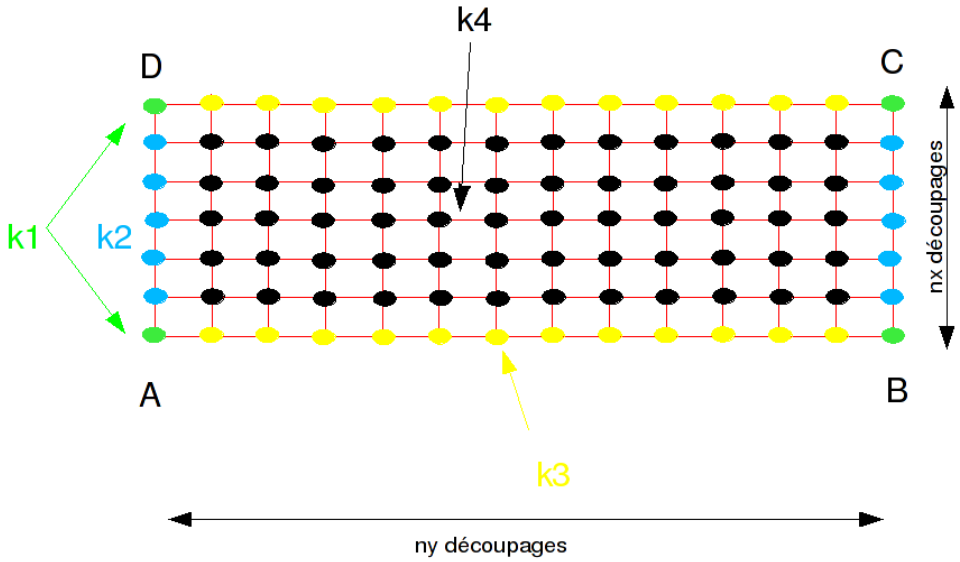


Figure 2.2-b : Discrétisation de la plaque dans le plan (x, y).

La figure ci-dessus repère les ressorts en fonction de leur raideur. Cette raideur est calculée par l'option RIGI_PARA_SOL de la commande AFFE_CARA_ELEM. L'affectation des valeurs se fait en fonction de la surface de la zone qu'ils affectent. Si K est la raideur globale du tapis de ressort, on a donc :

$$\mathrm{k4}=\frac{\mathrm{K}}{nx\,ny} \qquad \mathrm{k2}=\mathrm{k3}=\frac{\mathrm{k4}}{2}=\frac{\mathrm{K}}{2\,nx\,ny} \qquad \mathrm{k1}=\frac{\mathrm{k4}}{4}=\frac{\mathrm{K}}{4\,nx\,ny} \qquad [2.2\text{-}1]$$

Les équations d'équilibre sont les suivantes :
Effort de réaction des ressorts :

$$Fr_{(j)}=U_a\cdot\left[K_x^{'}+K_x^{''}\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(1-j\frac{b}{ny\,y_0}\right)\right] \qquad [2.2\text{-}2]$$

Moment de réaction des ressorts le long de la ligne AB :

$$Mr_{(j)}=U_a\cdot K_x^{''}\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(1-j\frac{b}{ny\,y_0}\right)\cdot j\frac{b}{ny} \qquad [2.2\text{-}3]$$

avec $K_x^{'}=(2\,\mathrm{k1}+\mathrm{k2}(nx-1))$ $K_x^{''}=(2\,\mathrm{k3}+\mathrm{k4}(nx-1))$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$n\frac{b}{ny}\leq y_0\leq(n+1)\frac{b}{ny}$$

La résolution des équations (équilibre des efforts et des moments) donne la solution de l'équilibre :

$$U_a=\frac{p\,a\,b^3\,ny(3\,ny-8\,n-4)}{6\,K(1+n+n^2)}\qquad y_0=\frac{b\,n(1+n)(3\,ny-8\,n-4)}{3\,ny(ny+2\,n(ny-2)-4\,n^2)} \quad [2.2\text{-}4]$$

où n et y_0 doivent respecter les conditions suivantes :

$$n.\frac{b}{ny}\leq y_0\leq(n+1)\frac{b}{ny}\qquad 0\leq y_0\leq b\qquad n \text{ entier}$$

2.3 Grandeurs et résultats de référence

Les grandeurs testées seront les déplacements verticaux aux 4 coins de la plaque.

2.4 Incertitudes sur la solution

Aucunes, la solution est analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

La plaque est modélisée par des éléments DKT. Les ressorts sont modélisés par des SEG2 affectés d'une modélisation DIS_T dont les caractéristiques sont des K_T_D_L. Ce sont des discrets en translation ayant une matrice diagonale, voir la documentation de AFFE_CARA_ELEM.

3.2 Caractéristiques du maillage

La plaque est découpé avec $ny=16$ et $nx=4$. Les dimensions de la plaque sont $a=1\,m$ et $b=2\,m$

3.3 Grandeurs testées et résultats

Pour le pas de temps n°1, les déplacements des extrémités des ressorts, non connectés à la plaque, sont imposés à zéro. Les résultats de *Code_Aster* sont comparés avec la solution discrète, qui correspond à la solution du problème modélisé. Cette solution est obtenue pour $n=12$, équation 2.2-4.

Nature des résultats	$U_A=U_D$	$U_B=U_C$
Solution continue	$\frac{-4}{1125}$	$\frac{4}{3375}$
Solution discrète ($n=12$)	$\frac{-208}{58875}$	$\frac{176}{153075}$
Tolérance	2.0E-04	7.0E-03

Pour le pas de temps n°2, les déplacements des extrémités des ressorts, non connectés à la plaque, sont déplacés de $+5.0\text{E-}03\,m$. Les résultats de *Code_Aster* sont comparés avec la solution discrète, qui correspond à la solution du problème modélisé.

Nature des résultats	$U_A=U_D$	$U_B=U_C$
Solution continue	$\frac{-4}{1125}+\frac{5}{1000}$	$\frac{4}{3375}+\frac{5}{1000}$
Solution discrète ($n=12$)	$\frac{-208}{58875}+\frac{5}{1000}$	$\frac{176}{153075}+\frac{5}{1000}$
Tolérance	4.0E-04	2.0E-04

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

La plaque est modélisée en $2D$ en déformations planes, par des éléments QUAD4. Les ressorts sont modélisés par des SEG2 affectés d'une modélisation 2D_DIS_T dont les caractéristiques sont des K_T_D_L. Ce sont des discrets en translation ayant une matrice diagonale, voir la documentation de AFFE_CARA_ELEM.

4.2 Caractéristiques du maillage

La plaque est découpée avec $ny=16$. La longueur de la plaque est $b=2\,m$.

4.3 Grandeurs testées et résultats

Pour le pas de temps n°1, les déplacements des extrémités des ressorts, non connectés à la plaque, sont imposés à zéro. Les résultats de *Code_Aster* sont comparés avec la solution discrète, qui correspond à la solution du problème modélisé. La solution d'équilibre est obtenue pour $n=12$, équation 2.2-4.

Nature des résultats	U_A	U_B
Solution continue	$\frac{-4}{1125}$	$\frac{4}{3375}$
Solution discrète ($n=12$)	$\frac{-208}{58875}$	$\frac{176}{153075}$
Tolérance	8.0E-07	8.0E-07

Pour le pas de temps n°2, les déplacements des extrémités des ressorts, non connectés à la plaque, sont déplacés de $+5.0\text{E-}03\,m$. Les résultats de *Code_Aster* sont comparés avec la solution discrète, qui correspond à la solution du problème modélisé.

Nature des résultats	U_A	U_B
Solution continue	$\frac{-4}{1125}+\frac{5}{1000}$	$\frac{4}{3375}+\frac{5}{1000}$
Solution discrète ($n=12$)	$\frac{-208}{58875}+\frac{5}{1000}$	$\frac{176}{153075}+\frac{5}{1000}$
Tolérance	8.0E-07	8.0E-07

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

L'utilisation des éléments discrets, affectés sur des nœuds ou des segments, avec un matériau de type DIS_CONTACT et utilisé avec STAT_NON_LINE (comportement COMP_INCR et relation DIS_CHOC) permet de modéliser un comportement unilatéral des ressorts.
En $2D$ comme en $3D$, l'utilisation du mot clé RIGI_PARASOL de la commande AFFE_CARA_ELEM permet d'affecter aux ressorts des raideurs proportionnelles à la longueur ou à la surface des éléments auxquels ils sont connectés.
Le comportement étant unilatéral, il est nécessaire que *Code_Aster* fasse plusieurs itérations pour trouver la position d'équilibre. Il est également possible de rencontrer des problèmes de convergence liés à une perte de précision, dû à un mauvais conditionnement de la matrice de raideur au cours des itérations. La raideur des ressorts pouvant s'annuler d'une itération à l'autre.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)