SSNL125 - Traction d'un barreau fragile : endommagement à gradient

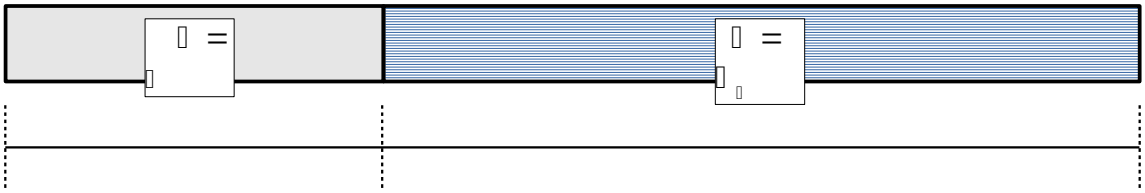
Résumé :

Ce test permet la vérification des lois d'endommagement fragile à gradient ENDO_SCALAIRE modélisation A) et ENDO_FISS_EXP (modélisation B) dans une situation unidimensionnelle non homogène. De par son caractère 1D, ce problème admet une solution analytique qui exhibe deux régimes de couches limites : l'une de longueur finie (existence d'une frontière libre entre la zone endommagée et la zone saine) et l'autre de longueur infinie (elle s'étend jusqu'à la frontière de la pièce).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



La structure étudiée est une barre de $375\,mm$ de long. Le problème étant purement $1\mathrm{D}$, sa section est sans influence.

1.2 Propriétés du matériau

Dans la modélisation A, le matériau obéit à une loi de comportement élastique fragile (ENDO_SCALAIRE) à gradient d'endommagement (modélisation *_GRAD_VARI).

ELAS	ENDO_SCALAIRE	NON_LOCAL
E = $30\,000\,MPa$ NU = 0	SY = $3\,MPa$ GAMMA = 4	C_GRAD_VARI = $1.875\,N$ PENA_LAGR = 1.5

Dans la modélisation B, le matériau obéit à une loi ENDO_FISS_EXP pour laquelle on renseigne les paramètres suivants : E = 30 000 Mpa, NU = 0, ft = 3 MPa, fc=30 MPa (sans incidence sur le résultat 1D), Gf=0.1 N/mm, p=1.5, D=50 mm.

1.3 Conditions de chargement

On impose à la partie gauche de la barre ($125\,mm$ de long) de rester rigide (blocage des degrés de liberté de déplacement). Quant à la partie droite de la barre, elle est soumise à une déformation axiale uniforme ε_0, c'est-à-dire à un déplacement imposé dont la distribution spatiale est linéaire. Un seul paramètre contrôle donc l'intensité du chargement : le niveau de déformation imposée ε_0.
Dans les directions perpendiculaires à l'axe de la barre, les déplacements sont bloqués : le problème est purement $1\mathrm{D}$. En outre, comme le coefficient de Poisson est nul, aucune contrainte de bridage ne se développe dans ces directions.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

Nous considérons une des lois de comportement à gradient d'endommagement [R5.04.01] dont la densité d'énergie libre se présente sous la forme suivante :
$\Phi(\varepsilon, a)=A(a)w(\varepsilon)+\omega(a)+c/2(\nabla a)^2$, où $0\leqslant a\leqslant 1$ désigne la variable d'endommagement et $w(\varepsilon)$ l'énergie de déformation élastique. Pour la loi ENDO_SCALAIRE, $\omega(a)=ka$ et le préfacteur d'endommagement s'écrit comme $A(a)=\left(\frac{1-a}{1+\gamma a}\right)^2$. La solution dépend alors de trois paramètres matériau γ , c , et k (voir [R5.03.18]).

Dans le cas général, deux équations aux dérivées partielles doivent être résolues : l'équation d'équilibre ($\delta\Phi(\varepsilon, a)/\delta\varepsilon=0$) et l'équation de comportement $\delta\Phi(\varepsilon, a)/\delta a=0$. Obtenir une solution analytique s'avère généralement délicat, même pour des structures unidimensionnelles. Pour valider néanmoins ce modèle, on s'attache à un problème plus simple pour lequel l'équation d'équilibre n'a pas besoin d'être résolue, c'est-à-dire que le champ de déplacement est fixé partout. L'équation de comportement est alors pilotée par l'énergie de déformation élastique w connue en tout point de l'espace. Dans ce cas simplifié, la solution semi-analytique est obtenue par une intégration numérique d'une équation différentielle avec les conditions initiales de Cauchy.
Quant à la loi ENDO_FISS_EXP, elle est totalement équivalente à la loi ENDO_SCALAIRE dans une situation de traction uniaxiale. La solution analytique est donc identique à celle pour ENDO_SCALAIRE.

2.1 Caractérisation de la solution

Plus précisément, on considère une barre dont une partie est astreinte à demeurer sans déformation tandis que l'autre est soumise à une déformation homogène. On étudie alors la couche limite d'endommagement qui se développe à l'interface de ces deux zones. L'équation différentielle de comportement est la suivante dans les zones où le critère est atteint, c'est-à-dire là où l'endommagement évolue :

$$c\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}-\frac{\partial A}{\partial a}w-k=0 \text{ , où } \frac{\partial A}{\partial a}(a)=-2(1+\gamma)\frac{(1-a)}{(1+\gamma a)^3}\text{ ,} \qquad \text{éq 2.1-1}$$

où x désigne la variable d'espace.

L'énergie de déformation élastique w est connue dans chacune des deux parties de la barre : $w=0$ à gauche et $w(\varepsilon_0)=const$ à droite. La solution est donnée par une fonction continue dérivable $a\in C^1(-L_0, L_1)$.

On dispose de trois conditions aux limites suivantes :

$$\frac{da}{dx}(-L_0)=\frac{da}{dx}(L_1)=0 \text{ et } a(-L_0)=0 \qquad \text{éq 2.1-2}$$

ainsi que deux conditions d'interface :

$$\left[|a|\right]_{x=0}=0 \qquad \left[\left|\frac{da}{dx}\right|\right]_{x=0}=0 \qquad \text{éq 2.1-3}$$

Au total, nous avons donc cinq conditions aux limites pour cinq inconnues. Malgré ce fait, le problème est « mal posé » pour pouvoir être résolu numériquement, car les conditions aux limites sont définies aux différents points de l'espace. Nous procédons dans la suite à l'identification des inconnues à l'aide des conditions aux limites enfin d'obtenir une équation différentielle ordinaire de type Cauchy-Lipschitz.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Résolution du problème dans la zone déchargée

On suppose que l'extrémité gauche de la barre $x=-L_0$ se situe suffisamment loin de l'interface $x=0$ pour que l'hypothèse d'une couche limite de longueur finie dans la zone déchargée reste valide. Notons alors $b_0>0$ la longueur (*a priori* dépendante du niveau de déformation ε_0 dans la zone chargée) sur laquelle se développe cette couche limite.

Dans la partie $x\in\left[L_0,-b_0\right]$ l'endommagement n'évolue pas et reste nul :

$$a(x)=0 \text{ sur } \left[-L_0,-b_0\right] \qquad \text{éq 2.2-1}$$

Dans la partie $x\in\left[-b_0,0\right]$, le critère est atteint et le champ d'endommagement évolue selon l'équation [éq 2.1-1], qui se simplifie considérablement dans cette partie de la barre puisque l'énergie de déformation élastique y est nulle :

$$c\frac{d^2a}{dx^2}=k \text{ sur } \left[-b_0,0\right] \qquad \text{éq 2.2-2}$$

Par définition de b_0, on dispose des conditions suivantes :

$$a(-b_0)=0 \text{ et } \frac{da}{dx}(-b_0)=0 \qquad \text{éq 2.2-4}$$

On peut alors exprimer analytiquement la variable d'endommagement en intégrant [éq 2.2-2] :

$$a(x)=\frac{k}{2c}(x+b_0)^2 \text{ sur } \left[-b_0,0\right] \qquad \text{éq 2.2-5}$$

On connaît alors les valeurs de l'endommagement et de sa dérivée à l'interface $x=0$, en fonction de l'inconnue b_0 :

$$a(0^-)=\frac{kb_0^2}{2c} \text{ et } a'(0^-)=\frac{kb_0}{c} \qquad \text{éq 2.2-6}$$

et l'endommagement à l'interface a_0 étant strictement compris entre 0 et 1, on en déduit l'encadrement suivant de la longueur b_0 :

$$0<a_0<1 \quad \Rightarrow \quad 0<b_0<\sqrt{\frac{2c}{k}} \qquad \text{éq 2.2-7}$$

Il suffit donc de prendre la partie gauche de la barre plus longue que $\sqrt{2c/k}$ pour être certain d'avoir le profil d'endommagement confiné à gauche.

2.3 Résolution du problème dans la zone chargée

Cette partie de la barre voit une déformation homogène $\varepsilon_0>0$ associée à une énergie de déformation élastique w_0. Dans cette zone, la couche limite n'est plus bornée et s'étend asymptotiquement vers la

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

réponse homogène. On supposera donc que l'extrémité droite de la barre $x=L_1$ se situe suffisamment loin de l'interface $x=0$ pour pouvoir faire l'approximation d'une dérivée nulle pour le champ d'endommagement « à l'infini ». Au voisinage de l'extrémité droite de la barre, l'équation de comportement [éq 2.1-1] se réduit alors à :

$$\frac{-\partial A}{\partial a}(a_\infty) w_0 = k \qquad \text{éq 2.3-1}$$

où a_∞ désigne la valeur asymptotique du champ d'endommagement. Compte tenu de l'expression de $\partial A/\partial a$ (*cf.* [éq 2.1-1]), on peut alors paramétrer le niveau de chargement par la seule valeur a_∞ :

$$\text{pour } a_\infty \in]0,1[, \quad w_0 = \frac{k}{2(1+\gamma)} \frac{(1+\gamma a_\infty)^3}{(1-a_\infty)} \qquad \text{éq 2.3-2}$$

D'autre part, l'équation différentielle non linéaire [éq 2.1-1] peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{c}{2} 2 a' a'' = a'(A'(a) w - k) \qquad \text{éq 2.3-3}$$

elle admet donc une intégrale première :

$$\forall\, x \in [0, L_1], \quad \left[\frac{c}{2}\left(\frac{da}{dx}(s)\right)^2\right]_0^x = \left[A(a(s)) + k\, a(s)\right]_0^x \qquad \text{éq 2.3-4}$$

On rappelle que la condition d'interface [éq 2.1-3] impose un raccord C^1 en $x=0$, en tenant compte des expressions liant $a(0^+)$ et $a'(0^+)$ à la longueur b_0 de la couche limite on peut alors écrire :

$$a_0 = a(0^+) = \frac{k b_0^2}{2c} \text{ et } a'_0 = a'(0^+) = \sqrt{\frac{2k}{c} a_0} \qquad \text{éq 2.3-5}$$

De plus, les conditions aux limites [éq 2.1-2] assurent la nullité de la dérivée de l'endommagement en $x=L_1$, en faisant l'approximation $a(L_1)=a_\infty$, l'intégrale première [éq 2.3-4] évaluée en $x=L_1$ revient à :

$$A(a_0) w_0 + k\, a_0 - \frac{c}{2} a'^2_0 = A(a_\infty) w_0 + k\, a_\infty \qquad \text{éq 2.3-6}$$

L'équation [éq 2.3-6] se simplifie d'après [éq 2.3-5], elle se réduit alors au trinôme du second degré suivant d'inconnue a_0 :

$$\left(f(a_\infty)\gamma^2 - 1\right) a_0^2 + 2\left(f(a_\infty)\gamma + 1\right) a_0 + \left(f(a_\infty) - 1\right) = 0 \text{ où } f(a_\infty) = A(a_\infty) + \frac{k\, a_\infty}{w_0} \qquad \text{éq 2.3-7}$$

On dispose donc d'une relation simple entre le paramètre de chargement a_∞ et la valeur a_0 de l'endommagement ainsi que de sa dérivée a'_0 à l'interface.

La résolution de l'EDO non linéaire [éq 2.1-1] sur $[0, L_1]$ a été réalisée en la ramenant à un système différentiel d'ordre 1, intégré numériquement avec un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4 (en espace).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La mise en œuvre de ce schéma ne nécessite que la connaissance des conditions initiales $\left(a_{0,} a'_{0}\right)$ associées à chaque paramètre de chargement a_{∞}, ce qui est assuré par la relation [éq 2.3-7]

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.4 Résolution du problème dans la barre entière

Afin de calculer la solution de référence sur toute la barre, on adopte le schéma suivant :

- choix d'un paramètre de chargement $a_\infty \in]0,1[$
- Résolution dans la partie chargée :
  - détermination avec [éq 2.3-2] de l'énergie de déformation élastique w_0 associée
  - détermination avec [éq 2.3-7] du jeu de conditions aux limites (a_0, a'_0)
  - intégration numérique avec un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4
- Résolution dans la partie déchargée :
  - détermination avec [éq 2.3-7] et [éq 2.3-5] de la taille b_0 de la couche limite dans la zone déchargée
  - obtention avec [éq 2.2-5] du champ analytique $a(x)$ dans cette zone

2.5 Application numérique

Pour l'élasticité, l'écrouissage et le paramètre non local, on adopte les caractéristiques suivantes :

$$E = 3.10^4 MPa \quad \sigma^y = 3. MPa \quad c = 1.875 N$$
$$\nu = 0. \qquad \gamma = 4.$$

éq 2.5-1

Ces choix conduisent à une énergie de déformation élastique seuil :

$$w_y = 1.5\,10^{-4} MPa$$

éq 2.5-2

2.6 Résultats de référence

La solution de référence est obtenue en prenant une barre de longueur $-L_0 = -125\,mm$ et $L_1 = 250\,mm$. On examine la valeur du champ d'endommagement a pour trois niveaux de chargement et en deux endroits, l'un dans la zone déchargée, l'autre dans la zone chargée.

ε_0	w_0 (MPa)	$a(x=-7.5\,mm)$	$a(x=+7.5\,mm)$
2,70000000000000E-04	1,09350000000000E-003	1,93274688119012E-02	1,41846675324338E-01
7,34846922834953E-04	8,10053999999999E-003	1,39107889370765E-01	3,80008828951670E-01
1,10464444958548E-02	1,83060308787201E+000	6,14240950943351E-01	9,77312427816067E-01

Table 2.6-1 - Résultats de référence

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

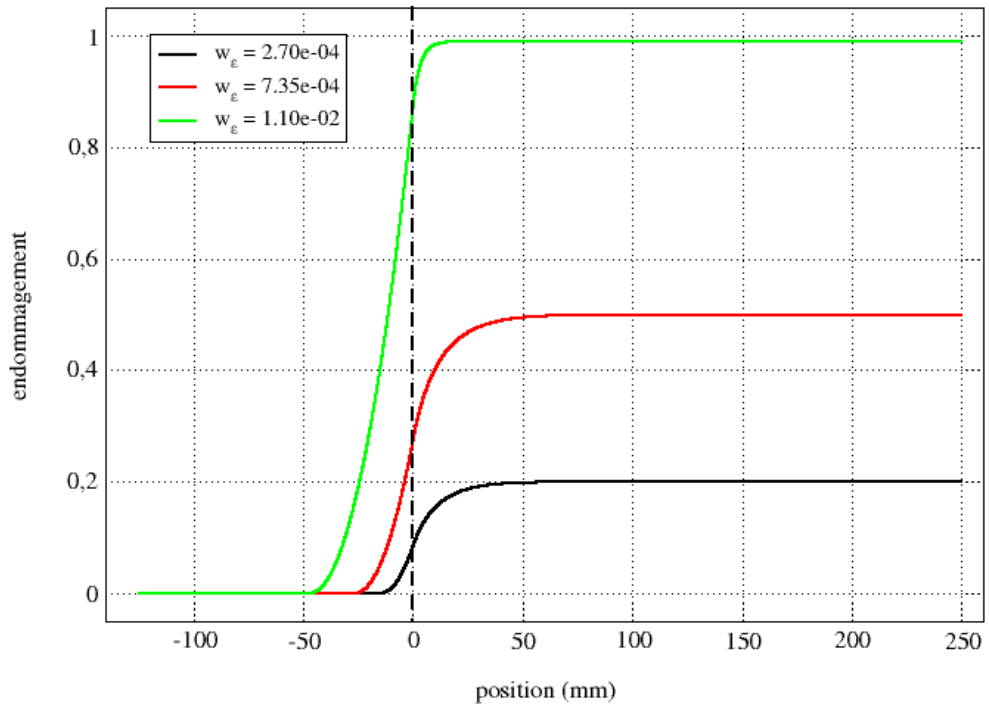


Figure 2.6-1 : Profil d'endommagement pour la solution de référence

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisations A et B

3.1 Caractéristiques de la modélisation et du maillage

Il s'agit d'une modélisation axisymétrique (AXIS_GRAD_VARI). La géométrie correspondante est un rectangle, c'est-à-dire que le barreau est disposé de manière verticale et sa section (sans influence) est circulaire.

Le maillage est constitué d'un seul élément selon le rayon. Selon l'axe, les éléments ont une taille de $2.5\,mm$. Le maillage ainsi engendré est finalement constitué de 150 éléments quadrangulaires à 8 nœuds.

3.2 Grandeurs testées et résultats

On valide la modélisation et l'algorithme d'intégration de lois non locales en examinant le niveau d'endommagement (variable interne $V1$) aux différents niveaux de chargement et aux différents lieux géométriques listés dans la [Table 2.6-1]. Les résultats sont réunis dans l'extrait du fichier de résultat ci-dessous.

Identification	Instant	Référence
$V1(x=-7.5)$	2,70000000000000E-04	1,93274688119012E-02
$V1(x=+7.5)$	2,70000000000000E-04	1,41846675324338E-01
$V1(x=-7.5)$	7,34846922834953E-04	1,39107889370765E-01
$V1(x=+7.5)$	7,34846922834953E-04	3,80008828951670E-01
$V1(x=-7.5)$	1,10464444958548E-02	6,14240950943351E-01
$V1(x=+7.5)$	1,10464444958548E-02	9,77312427816067E-01

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Synthèse des résultats

On note un très bon accord entre la modélisation et la solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)