# SSNA105 - Cylindre creux soumis à une pression, viscoélasticité linéaire, contact

**Résumé :**

Ce cas-test permet de valider la loi de LEMAITRE implantée dans *Code_Aster* dans le cas de comportement viscoélastique linéaire. Les résultats trouvés sont comparés à une solution analytique.

Ce test reprend la même modélisation que le cas-test SSNA104A auquel on rajoute un cylindre (pastille) et on traite le contact.

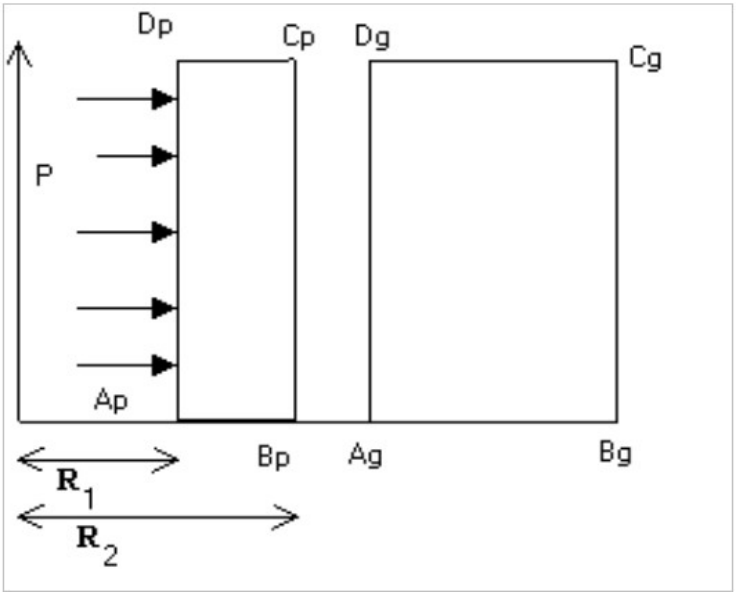


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie

Le schéma n'est pas à l'échelle, l'écart entre les deux cylindres a été amplifié pour une meilleure visibilité.




| | |
|---|---|
| $R_1$ | 0.82 |
| $R_2$ | 0.92 |
| $R_3$ | 1. |
| $R_4$ | 2. |

## 1.2 Propriétés des matériaux

La pastille est composée d'un matériau élastique, la gaine est constituée d'un matériau viscoélastique. Les données élastiques coïncident pour les deux matériaux.
Module d'Young : $E=1\ MPa$
Coefficient de Poisson : $\nu=0.3$

Loi de LEMAITRE :

$$g(\sigma,\lambda,T)=\left(\frac{1}{K}\frac{\sigma}{\lambda^{\frac{1}{m}}}\right)^n \text{ avec } \frac{1}{K}=1\ ,\ \frac{1}{m}=0\ ,\ n=1$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 1.3 Conditions aux limites et chargement

**Conditions aux limites :**
Le cylindre est bloqué en $DY$ sur les côtés $[AP, BP]$, $[AG, BG]$ et $[CP, PD][CG, PG]$.

**Chargement :**
Le cylindre est soumis à une pression interne sur $[DP, AP]$, cette pression est calculée de telle sorte qu'à l'instant $t=0$, la gaine a le même comportement que le cylindre modélisé dans le test ssna104a.

$$p_1(t) = \begin{cases} \left(\frac{r_3}{r_2} - 1\right)\frac{E\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{2r_1^2(1-\nu)} & si \ -1 \le t \le 0 \\ A\left[B\left(r_3 - r_2 + C\left(D + Ge^{-Ekt} + Ht\right)\right) + K\right] & si \ 0 < t \le 5 \end{cases}$$

avec

$A = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_1^2(1-\nu)}$, $B = \frac{E}{r_2(1+\nu)}$, $C = \frac{P_0 r_3^3}{r_4^2 - r_3^2}$ avec $P_0 = 1.\mathrm{E}-3\ MPa$, pression du test ssna104a.

$D = \frac{1}{E}\left((1+\nu)\frac{r_4^2}{r_3^2} + \frac{3}{2}(1-2\nu)\right)$, $G = -\frac{(1-2\nu)^2}{2E}$, $H = \frac{3}{2}k\frac{r_4^2}{r_3^2}$, $K = \frac{P_0 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)$

On traite le contact entre les deux cylindres.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solutions de référence

## 2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

L'ensemble de cette démonstration peut être lue avec plus de détails dans le document [bib1].

**Phase sans contact**

On veut trouver la valeur de $p_1(t)$ à appliquer sur la paroi interne de la pastille pour laquelle le contact a lieu.
Pour la pastille, on trouve :

$$\sigma=\begin{pmatrix} \gamma\left(1-\frac{r_2^2}{r^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma\left(1+\frac{r_2^2}{r^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu\gamma \end{pmatrix} \text{ où } \gamma=\frac{p_1(t)r_1^2}{r_2^2-r_1^2}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{1+\nu}{E}\gamma\left[1-2\nu+\frac{r_2^2}{r^2}\right]=\frac{w}{r}\,.$$

La condition de contact s'écrivant : $w(r_3)-w(r_2)=0$ , on a $r_3-r_2=r_2\frac{2(1+\nu)\gamma}{E}(1-\nu)$

D'où $\gamma=\left(\frac{r_3}{r_2}-1\right)\frac{E}{2(1-\nu)^2}$

$$p_1\lim=\left(\frac{r_3}{r_2}-1\right)\frac{E(r_2^2-r_1^2)}{2r_1^2(1-\nu)^2}\,.$$

**Phase avec contact**

On veut qu'à partir de l'instant $t=0$ , la gaine a le même comportement que dans le test ssna104a.
Lorsqu'il y a contact, on a :

$$w_P(r_2)=W_G(r_3)+r_3-r_2\,,$$

donc en récupérant la valeur des déplacements dans le test ssna104, on doit obtenir :

$$w_P(r_2)=r_3-r_2+\frac{p_0r_3^3}{r_4^2-r_3^2}\left\{\frac{1}{E}\left((1+\nu)\frac{r_4^2}{r_3^2}+\frac{1-2\nu}{2}(3-(1-2\nu)e^{-Ekt})\right)+\frac{3}{2}k\frac{r_4^2}{r_3^2}t\right\}\,.$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le champ de contrainte de la pastille est donné par

$$\sigma=\begin{pmatrix}\gamma_1\left(1-\frac{r_2^2}{r^2}\right)-\gamma_0\left(1-\frac{r_2^2}{r^2}\right) & 0 & 0\\ 0 & \gamma_1\left(1+\frac{r_2^2}{r^2}\right)-\gamma_0\left(1+\frac{r_2^2}{r^2}\right) & 0\\ 0 & 0 & \sigma_Z\end{pmatrix}$$

avec $\gamma_1=\frac{p_1 r_1^2}{r_2^2-r_1^2}$ et $\gamma_0=\frac{p_0 r_1^2}{r_2^2-r_1^2}$ .

Comme $\varepsilon_Z=\frac{1+\nu}{E}\sigma_Z-\frac{\nu}{E}(2(\gamma_1-\gamma_0)+\sigma_Z)=0$ , on trouve : $\sigma_Z=2\nu(\gamma_1-\gamma_0)$ .

On a donc $\varepsilon_\theta=\frac{1+\nu}{E}\sigma_\theta-\frac{\nu}{E}(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_Z)=\frac{1+\nu}{E}\left[(1-2\nu)(\gamma_1-\gamma_0)+\gamma_1\frac{r_2^2}{r^2}-\gamma_0\frac{r_1^2}{r^2}\right]=\frac{w}{r}$

$w_P(r_2)=\frac{1+\nu}{E}r_2\left[2(1-\nu)\gamma_1-\gamma_0\left(1-2\nu+\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\right]$, on trouve $p_1(t)$ donné par la formule un peu plus haut.

## 2.2 Résultats de référence

Déplacement $DX$ sur le nœud $B$

## 2.3 Incertitude sur la solution

$0\%$ : solution analytique

## 2.4 Références bibliographiques


- Ph. De BONNIERES, deux solutions analytiques de problèmes axisymétriques en viscoélasticité linéaire et avec contact unilatéral, Note HI-71/8301




Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est modélisé en axisymétrie. Le contact est traité par la formulation discrète.

## 3.2 Caractéristiques du maillage

600 mailles QUAD4
160 mailles SEG2

## 3.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification | Instants | Référence | Tolérance |
|---|---|---|---|
| $DX(B)$ | 0.9 | 2,1400 E–3 | RELATIF – 0,95 % |
| $SIXX(B)$ | 0.9 | 0 | ABSOLU – 9,6E-6 |
| $SIYY(B)$ | 0.9 | 2,7912 E–4 | RELATIF – 3,40% |
| $SIZZ(B)$ | 0.9 | 6,6000 E–4 | RELATIF – 2,00% |

# 4 Modélisation B

## 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est modélisé en axisymétrie. Le contact est traité par la formulation continue.

## 4.2 Caractéristiques du maillage

600 mailles QUAD4
16 0 mailles SEG2

## 4.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification | Instants | Référence | Tolérance (%) |
|---|---|---|---|
| $DX(B)$ | 0.9 | 2.14 E–3 | 1.2 % |
| $SIXX(B)$ | 0.9 | 0.0 | |
| $SIYY(B)$ | 0.9 | 2.7912 E–4 | 3.5 % |
| $SIZZ(B)$ | 0.9 | 6.66 E–4 | 2.5 % |

# 5 Synthèse des résultats

Les résultats calculés par *Code_Aster* sont en accord avec les solutions analytiques mais dépendent très fortement du raffinement du maillage. Les deux méthodes de prise en compte du contact (formulation discrète et continue) donnent les mêmes résultats.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)