SSNA104 - Cylindre creux soumis à une pression, viscoélasticité linéaire

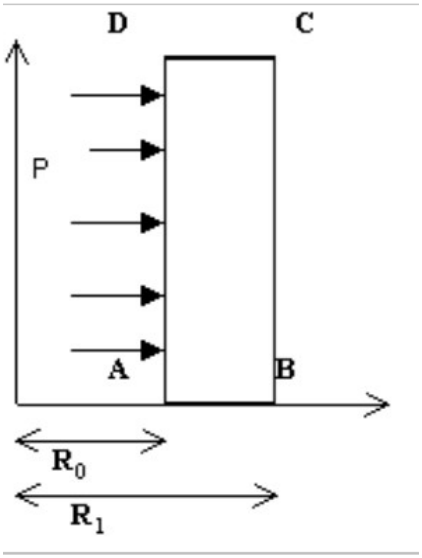
Résumé :

Ce cas-test permet de valider les lois de LEMAITRE et LEMA_SEUIL implantée dans *Code_Aster* dans le cas de comportement viscoélastique linéaire. Les résultats trouvés sont comparés à une solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Dimensions du cylindre :

R_0	$1\,m$
R_1	$2\,m$

Figure 1.1-a : Coupe du cylindre creux et chargement

1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young : $E=1\,MPa$
Coefficient de Poisson : $\nu=0.3$

Loi de LEMAITRE :

$$g(\sigma,\lambda,T)=\left(\frac{1}{K}\frac{\sigma}{\lambda^{\frac{1}{m}}}\right)^n \text{ avec } \frac{1}{K}=1\ ,\ \frac{1}{m}=0\ ,\ n=1$$

Loi LEMA_SEUIL :

$$g(\sigma,\lambda,T)=A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\right)\Phi \text{ avec } A=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \Phi=1 \text{ sur tout le maillage}$$

$$S=10^{-10}$$

étant donné la valeur des différents paramètres matériaux, les deux lois sont absolument identiques et peuvent donc être comparés à la même solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargement

Conditions aux limites :
Le cylindre est bloqué en DY sur les côtés $[AB]$ et $[CD]$.

Chargement :
Le cylindre est soumis à une pression interne sur $[DA]\ P0 = 1.\mathrm{E}-3\ MPa$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

L'ensemble de cette démonstration peut être lue avec plus de détails dans le document [bib1].

Dans le cas d'un matériau isotrope viscoélastique linéaire, on peut décrire le comportement au cours du temps à l'aide de deux fonctions $I(t)$ et $K(t)$ de telle sorte que les déformations et les contraintes peuvent s'écrire :

$$\varepsilon(t)=(I+K)*\frac{d\sigma(t)}{d\tau}-K*\frac{d(Tr(\sigma(t)))}{d\tau}\boldsymbol{I_3}$$

où I_3 désigne la matrice identité de rang 3

et $*$ le produit de convolution : $(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$

On trouve $I(t)=\frac{1}{E}+kt$, $K(t)=\frac{\nu}{E}+\frac{1}{2}kt$

On impose la pression P_0 à l'instant $t=0$, la pression interne vaut $p(t)=H(t)\,P_0$ où $H(t)=\begin{cases}0 & si \quad t-\tau<0\\ 1 & si \quad t-\tau\geq 0\end{cases}$ avec dans ce cas $\tau=0$

On utilise la transformée de Laplace Carson $f^+(n)=L(f(t))=n\int_0^\infty f(t)e^{-nt}dt$

D'où $p^+=P_0$

La solution du problème élastique équivalent est :

$$\sigma^+=\begin{pmatrix}\gamma\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right) & 0 & 0\\ 0 & \gamma\left(1+\frac{r_1^2}{r^2}\right) & 0\\ 0 & 0 & \sigma_Z^+\end{pmatrix} \text{ où } \gamma=\frac{P_0 r_0^2}{r_1^2-r_0^2}$$

On détermine σ_Z^+ par la condition sur ε_Z^+ donnée par les conditions aux limites :

$$\varepsilon_Z^+=0=(I^++K^+)\sigma_Z^+-K^+(2\gamma+\sigma_Z^+)=I^+\sigma_Z^+-2K^+\gamma$$

D'où $\sigma_Z^+=\gamma\left(1+\frac{(2\nu-1)p}{p+Ek}\right)$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On trouve par la transformée de Laplace inverse $\sigma_z(t)=\gamma(1-(1-2\nu)e^{-Eht})$, de même en appliquant la transformée de Laplace inverse sur σ_r et σ_θ, on trouve

$$\sigma^+=\begin{pmatrix}\gamma\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right) & 0 & 0\\ 0 & \gamma\left(1+\frac{r_1^2}{r^2}\right) & 0\\ 0 & 0 & \gamma(1-(1-2\nu)e^{-Eht})\end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\dot{\varepsilon_V}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}k\gamma\left(\frac{1-2\nu}{3}e^{-Ekt}-\frac{r_1^2}{r^2}\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2}k\gamma\left(\frac{1-2\nu}{3}e^{-Ekt}-\frac{r_1^2}{r^2}\right) & 0\\ 0 & 0 & -k\gamma((1-2\nu)e^{-Eht})\end{pmatrix}$$

et en intégrant avec $\varepsilon_V(0)=0$;

$$\dot{\varepsilon_V}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\gamma\left(\frac{1-2\nu}{3}e^{-Ekt}-k\frac{r_1^2}{r^2}t\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\gamma\left(\frac{1-2\nu}{3}e^{-Ekt}-k\frac{r_1^2}{r^2}t\right) & 0\\ 0 & 0 & -\gamma\frac{(1-2\nu)}{E}(1-e^{-Eht})\end{pmatrix}.$$

On en déduit le déplacement radial

$$w(r,t)=r\gamma\left[\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\frac{r_1^2}{r^2}+\frac{1-2\nu}{2}(3-(1-2\nu)e^{-Ekt})\right]+\frac{3}{2}k\frac{r_1^2}{r^2}t\right]$$

2.2 Résultats de référence

Déplacement DX sur le nœud B et les contraintes $SIXX$, $SIYY$ et $SIZZ$ en B

2.3 Incertitude sur la solution

0% : solution analytique

2.4 Références bibliographiques

Ph. De BONNIERES : Deux solutions analytiques de problèmes axisymétriques en viscoélasticité linéaire et avec contact unilatéral, Note HI-71/8301

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est modélisé en axisymétrie.

3.2 Caractéristiques du maillage

1000 mailles QUAD4

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence
$DX(B)$	0.9	2.14498 E–3
$SIXX(B)$	0.9	0.0
$SIYY(B)$	0.9	2.7912 E–4
$SIZZ(B)$	0.9	6.66 E–4

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est modélisé en axisymétrie

4.2 Caractéristiques du maillage

1000 mailles QUAD4

4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence
$DX(B)$	0.9	2.14498 E–3
$SIXX(B)$	0.9	0.0
$SIYY(B)$	0.9	2.7912 E–4
$SIZZ(B)$	0.9	6.66 E–4

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Les résultats calculés par *Code_Aster* sont en accord avec les solutions analytiques mais dépendent très fortement du raffinement du maillage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)