SDNV105 - Balancement d'un bloc sur une table

Résumé :

Ce cas-test sert à valider la capacité de DYNA_NON_LINE et des méthodes de contact dans *Code_Aster* disponibles à traiter des problèmes de dynamique non régulière en présence de collisions avec résolution implicite. Le problème consiste à analyser la réponse dynamique d'un bloc rectangulaire homogène pesant posé sur une table, soumis à divers chargements (lâcher, excitation harmonique) : le balancement conduit à des collisions successives avec la table.

On évalue diverses manières de traiter le contact, ainsi que divers choix d'intégration temporelle :

1. traitement du contact par méthode par ressorts de choc pénalisés et intégration temporelle par schéma implicite Newmark-HHT en déplacement (modélisation B, en 2D) ;
2. traitement du contact par méthode continue et intégration temporelle par schéma implicite Newmark-HHT en déplacement (modélisation C, en 2D) ;

Les résultats obtenus sont en relativement bon accord avec les résultats de référence. Ces résultats de référence sont de trois natures :

1. établis analytiquement avec l'hypothèse de corps rigide sans rebond, tandis que la simulation *Code_Aster* est faite avec des corps élastiques, ce qui induit des résultats un peu distants ;
2. établis analytiquement à partir du coefficient de restitution de choc moyen relevé sur la simulation *Code_Aster*, ce qui permet d'assurer la justesse de plusieurs variables dynamiques : vitesses, instants de collision, énergies cinétique, réactions, percussions ;
3. obtenus numériquement avec le logiciel LMGC90 du laboratoire LMGC (Université de Montpellier), avec un θ-schéma en vitesse.

Cependant, on notera que ce problème dynamique est très sensible et donc que la précision peut se dégrader rapidement au cours du transitoire ; de plus, le choix de l'algorithme (méthode de contact, intégration temporelle) a une grande influence. Aussi les tolérances sur les valeurs testées croissent-elles au cours du transitoire. On conseille l'usage du θ-schéma qui est à la fois plus robuste et moins onéreux.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On considère un bloc parallélépipédique homogène pesant reposant initialement sur une table rigide (jeu nul).

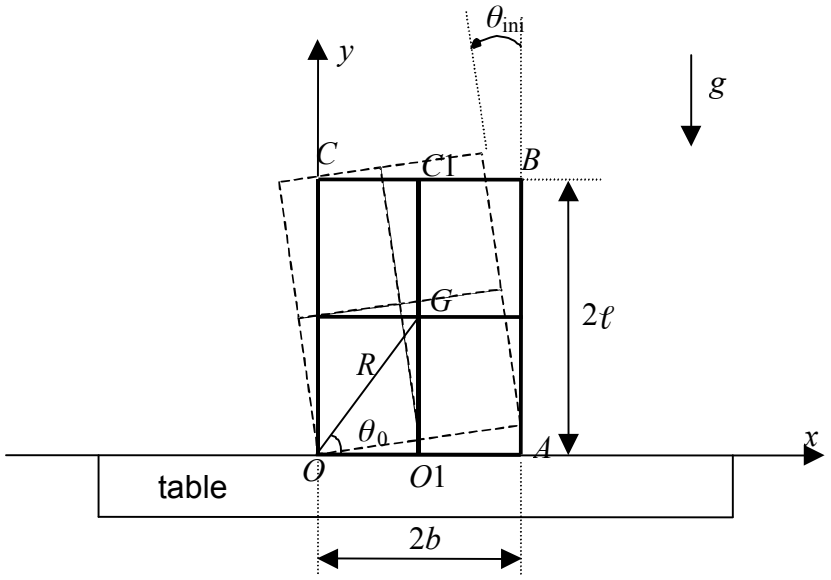


Figure 1.1-a : Vue de face du bloc sur la table.

Données géométriques :
Face du bloc : $2b \times 2l$: $0{,}360\ m \times 0{,}800\ m$. Épaisseur : $e = 1\ m$. On note $R = \sqrt{b^2 + l^2}$ et θ_0 l'angle $(\vec{OQ}, \vec{OG})$. La table a une épaisseur verticale de $0{,}08\ m$.

1.2 Propriétés de matériaux

Caractéristique	bloc	table
Module de Young	$6{,}0\,10^{11}\ Pa$	$1{,}0\,10^{14}\ Pa$
Coefficient de Poisson	0,2	0,3
Masse volumique	$1450\ kg/m^3$	$2500\ kg/m^3$
AMOR_ALPHA	$0.0001\ s$	$0.001\ s$
AMOR_BETA	0.0	0.0

La table est choisie « dure ». Le coefficient de frottement sec de Coulomb entre le bloc et la table est : $\mu = 0{,}9$. Ce coefficient élevé fait privilégier des situations où la rotation autour des coins du bloc se fait sans glissement. Cependant, lors de la pose du bloc pesant sur la table, on admet qu'il y a glissement libre : $\mu = 0{,}0$. La masse du bloc est $417{,}600\ kg$.

On ajoute un amortissement de Rayleigh pour introduire une certaine dissipation matériau à haute fréquence à l'aide du mot-clé AMOR_ALPHA (voir ci-dessus), d'où les forces : $\mathbf{C}\,\dot{\mathbf{U}} = \alpha\,\mathbf{K}\,\dot{\mathbf{U}}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions aux limites

Les translations de la table selon les axes y et z sont bloquées sur la face inférieure de celle-ci.
La translation de la table selon l'axe x est bloquée au point $S1$ en vis-à-vis de $O1$.
Les translations du bloc selon l'axe z sont bloquées.
Le point $O1$ du bloc, milieu de sa base est contraint par : $dx=0$ uniquement pour la phase initiale d'application progressive du chargement de pesanteur.
L'accélération de la pesanteur vaut : $g=9.81\,m/s^2$.
Une condition de contact-frottement est assurée entre la base du bloc et la face supérieure de la table.

Lâcher après inclinaison du bloc, la pesanteur restant constante

La condition de contact-frottement est assurée entre face inférieure du bloc et face supérieure de la table. L'accélération de la pesanteur vaut : $g=9.81\,m/s^2$.

Chargement d'excitation harmonique de la table

À l'étude, non restitué.

1.4 Conditions initiales

Chargement de pesanteur

Le bloc et la table sont initialement au repos : à $t=0$, $dx(0)=0$, $dx/dt(0)=0$ en tout point.

Chargement de lâcher

Le point $C1$, milieu du côté supérieur du bloc est contraint : $dx=-0.008\,m$, soit un angle de 10^{-2}. alors que le point $O1$ est fixé en x. On attend ensuite la stabilisation des vibrations, pour exécuter le lâcher sous la pesanteur, depuis cette position écartée à vitesse initiale nulle en tout point.

Chargement d'excitation harmonique de la table

À l'étude.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

Les résultats de référence sont de deux natures :

- établis analytiquement avec l'hypothèse de corps rigide, sans rebond, tandis que la simulation *Code_Aster* est faite avec des corps élastiques, ce qui induit des résultats un peu distants ;
- établis analytiquement à partir du ratio moyen de perte d'énergie cinétique relevé pendant les collisions sur la simulation *Code_Aster*, ce qui permet d'assurer la justesse de plusieurs variables dynamiques : vitesses, instants de collision, énergies cinétique, réactions, percussions ;
- obtenus numériquement avec le logiciel LMGC90 du laboratoire LMGC (Université de Montpellier), avec un θ-schéma en vitesse, cf. [bib3, bib4].

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Pour plus de détails sur la solution avec l'hypothèse de corps rigide, se reporter à [bib1]. La masse du bloc est : $M=\rho V=4\,\rho\,b\,l\,e$. On considère une éventuelle accélération d'entraînement de la table : $(\ddot{u}_{ent},\ddot{v}_{ent})$. Le paramètre de configuration est noté θ. L'inertie de rotation au centre de gravité est $J_G=\frac{1}{3}M\left(b^2+l^2\right)$, celle au coin O est $J_O=J_G+MR^2$. Les équations du mouvement du bloc, dans le cadre de la modélisation en corps rigide sont :

$$\begin{cases} rocking\ about\ O \ : \ J_O\ddot{\theta}+MR\left(\ddot{v}_{ent}+g\right)\cos\left(\theta_0+\theta\right)-MR\,\ddot{u}_{ent}\sin\left(\theta_0+\theta\right)=0 \quad with \quad \theta\in\mathbb{R}^+ \\ rocking\ about\ A \ : \ J_A\ddot{\theta}-MR\left(\ddot{v}_{ent}+g\right)\cos\left(\theta_0-\theta\right)-MR\,\ddot{u}_{ent}\sin\left(\theta_0-\theta\right)=0 \quad with \quad \theta\in\mathbb{R}^- \end{cases}$$

La pulsation de balancement est : $\omega_{rO}=\sqrt{MgR/J_O}$, soit $\omega_{rO}=\sqrt{3\,g/4\,R}$; avec les données géométriques : $\omega_{rO}=4.0956\,s^{-1}$.

Si l'on analyse la collision frontale de la base du bloc sur une paroi rigide, la durée totale de contact τ (temps d'aller-retour de l'onde élastique) est donnée par :

$$\tau=4\,l\sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

soit ici : $\tau\approx 1.5731\ 10^{-4}\ s$.

Ce qui est associé directement à la fréquence du mode d'extension verticale du bloc, qui est : $f_1=6357\ Hz$. On peut faire la même analyse pour la table : $f_1=625\ kHz$. La fréquence du premier mode de flexion transversale du bloc, considéré comme une poutre d'Euler, rotulée à sa base et libre à son sommet, est : $f_f=8100\ Hz$. Cette valeur donne une idée du type de réponse dynamique du bloc susceptible de se produire lors de la collision après lâcher.

La durée totale de contact τ, lors d'un choc frontal, permet d'estimer la raideur de ressorts de choc à placer aux coins inférieurs du bloc, lorsque l'on envisage une technique de traitement du contact par ressorts de choc : c'est le cas de la modélisation B. On a ainsi :

$$K_{res}=M_{bloc}\frac{\pi^2}{\tau^2}=\frac{\pi^2\,ES}{16\,\ell}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette valeur correspond à une propagation d'onde longitudinale dans un milieu continu. Si on envisage la réponse d'un élément fini linéaire élastique en unidimensionnel, avec matrice de masse consistante, de longueur $2l$, on a :

$$K_{res} = M_{bloc} \frac{3E}{\rho l^2} = \frac{3ES}{l}$$

Pour cette configuration on trouve respectivement : $9.253\,10^{11}\,N/m$ et $4.5\,10^{12}\,N/m$.

2.1.1 Cas de lâcher à partir d'une position inclinée au repos : corps rigide

Comme $\cos^2\theta_0 > \frac{2}{3} \Leftrightarrow l/b < \sqrt{2}/2$, le bloc se balance alternativement d'un coin sur l'autre, cf. [bib1]. On note θ_{in} l'inclinaison initiale, supposée faible. L'équation d'équilibre pour les phases de « vol libre » (valable pour de petits angles, au 1er ordre) se réduit à $\frac{4}{3}MR^2\ddot{\theta} + Mbg - M\ell g\theta = 0$.

La durée du vol libre t_{coll} autour de O avant collision sur l'autre coin A est donc solution de :

$$0 = \frac{b}{l} + \left(\theta_{in} - \frac{b}{l}\right)\cosh\left(t_{coll}\sqrt{\frac{3g\,l}{4R^2}}\right)$$

Pour $\theta_{in} = 10^{-2}$, et les dimensions du bloc considéré, on a : $t_{coll} \approx 0,05440978\ s$. Cet instant correspond au premier impact au coin A.

L'énergie cinétique juste avant la collision est : $E_{kin}^{-} = \frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2 = Mbg\,\theta_{in}$. Elle vaut : $7.37398\,J$.

On en déduit aussi la vitesse angulaire avant la première collision :

$$\dot{\theta}\left(t_{coll}\right) = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{3}{2}bg\,\theta_{in}} \approx -\frac{3}{4}bgt_{coll}/R^2$$

L'équilibre vertical donne la réaction verticale en O :

$$F_O = Mg + Mb\,\ddot{\theta} \approx Mg\left(1 - \frac{3b^2}{4R^2}\right)$$

L'équilibre horizontal donne la réaction horizontale :

$$H_O = M\,l\,\ddot{\theta} \approx -\frac{3Mgb\,l}{4R^2}$$

Leurs valeurs sont : $F_O \approx 3579,25\ N$ et $|H_O| \approx 1149,79\ N$.

Leur rapport est donc $\frac{3bl}{4R^2 - 3b^2} \approx 0.3212$.

Ce rapport est plus faible que le coefficient de frottement choisi : on n'attend donc pas de glissement.

Les équations d'équilibre en percussion de choc aux moments des impacts fournissent pour leur part :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$I_y = -\frac{4\mathrm{R}^2 - 3\mathrm{b}^2}{2\mathrm{R}^2} Mb\,\omega_- \quad \text{tandis que} \quad \frac{|I_x|}{|I_y|} = \frac{3\mathrm{b}\,l}{4\mathrm{R}^2 - 3\mathrm{b}^2} \approx 0.3212$$

Ce rapport est plus faible que le coefficient de frottement choisi : on n'attend donc pas de glissement.

À chaque impact une part de l'énergie cinétique est transmise du bloc à la table ; puisque, lors de la collision, on admet qu'il n'y a pas de rebond (c'est-à-dire que juste à l'instant de la collision, le point impacté a une position fixée), on identifie alors un « coefficient de restitution » équivalent reliant le ratio des vitesses angulaires avant et après la collision (on rappelle qu'en phase de « vol libre », les accélérations sont quasi constantes, donc les vitesses quasi affines) :

$$\omega_+ = \frac{2R^2 - 3b^2}{2R^2}\,\omega_- \approx 0.7474\ \omega_-$$

Ce même ratio correspond à celui des intervalles de temps entre deux collisions successives (au 1er ordre).

On en déduit le ratio entre les énergies cinétiques après et avant chaque collision : 0.5586086 (en raison du carré). Ce même ratio correspond à celui des angles de rotation du bloc après et avant chaque collision, car on admet qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie durant la rotation libre entre deux collisions, ce qui fournit les valeurs des déplacements verticaux maximaux des coins du bloc.

L'intervalle de temps entre deux collisions successives $k \to k+1$ est donné par l'angle de rotation maximal θ_k atteint lors de la phase juste après la collision k (ou θ_{k-1} atteint lors de la phase juste avant la collision k) :

$$\Delta t_{k\to k+1} \approx \frac{8R^2}{3bg}\dot{\theta}_k^+ = 4R\sqrt{\frac{2\theta_k}{3bg}} = \frac{4R^2 - 6b^2}{R}\sqrt{\frac{2\theta_{k-1}}{3bg}}$$

Comme le ratio θ_k / θ_{k-1} à deux collisions successives est identique (au 1er ordre) à celui des énergies cinétiques $E_{kin}^{+k} / E_{kin}^{-k}$, alors on a aussi :

$$\Delta t_{k\to k+1} / \Delta t_{k-1\to k} \approx \sqrt{E_{kin}^{+k} / E_{kin}^{-k}} = \omega_+ / \omega_-$$

2.1.2 Cas de lâcher à partir d'une position inclinée au repos : corps élastique

On ne possède pas de référence théorique complète sous cette hypothèse. Par contre, en admettant la faiblesse de l'énergie stockée sous forme vibratoire, on a les résultats suivants.

La phase de « vol libre » (rotation autour des coins) est caractérisée encore par l'équation d'équilibre du corps rigide en rotation (valable pour de petits angles) :

$$\frac{4}{3}MR^2\,\ddot{\theta} = -Mbg + M\,l\,g\,\theta$$

D'où les réactions : $F_O = Mg + Mb\,\ddot{\theta} \approx Mg\left(1 - \frac{3b^2}{4R^2}\right)$ et $H_O = M\,l\,\ddot{\theta} \approx -\frac{3Mgb\,l}{4R^2}$, soit : $F_O \approx 3579{,}25\ N$ et $|H_O| \approx 1149{,}79\ N$. Ces valeurs sont valables pour toutes les phases de vol libre entre deux collisions.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On obtient aussi la vitesse angulaire juste avant la première collision : $\dot{\theta}\left(t_{coll}\right)=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{3}{2}bg\,\theta_{in}}$ et l'énergie cinétique : $E_{kin}^{-}\left(t_{coll}\right)=Mbg\,\theta_{in}=\frac{2}{3}MR^{2}\,\dot{\theta}_{-}^{2}\left(t_{coll}\right)$. L'instant de la première collision doit être le même qu'en analyse en corps rigide : $0{,}05440978\ s$; l'énergie cinétique à la première collision étant aussi : $7{,}373981\ J$.

Le contact étant maintenu sur une certaine durée dans la simulation numérique avec l'hypothèse de corps déformables, contrairement au cas des corps rigides, la restitution de choc n'a pas la même phénoménologie.
Aussi décide-t-on de prendre la valeur trouvée par la simulation par *Code_Aster* pour identifier un coefficient de restitution, lequel est employé pour reconstituer la succession des collisions ultérieures.

On décide ainsi de prendre par la valeur moyenne de $\sqrt{E_{kin}^{+k}/E_{kin}^{-k}}$ sur les 5 collisions étudiées le coefficient de restitution : 0.79, que l'on choisit pour les prédictions successives. Cette valeur est supérieure à celle obtenue en hypothèse de corps rigide sans rebond, cf. [§ 2.1.1], ce qui est légitime.

En suivant l'hypothèse d'absence de vibration durant la phase de vol libre de balancement, l'intervalle de temps entre deux collisions successives $k\to k+1$ est donné par l'angle de rotation maximal θ_k atteint lors de la phase juste après la collision k :

$$\Delta t_{k\to k+1}\approx\frac{8\,R^{2}}{3\,bg}\dot{\theta}_{k}^{+}=4\,R\sqrt{\frac{2\,\theta_{k}}{3\,bg}}$$

Par ailleurs, on observe numériquement que la phase de rebond « retarde » le redémarrage du mouvement de balancement à chaque collision. On adopte alors une valeur moyenne du rapport entre les intervalles de temps entre deux collisions successives de : 0.77 .

Les résultats que l'on tire ensuite à partir de cette valeur sont listés dans le tableau 2.3.

La percussion verticale est l'intégrale sur la durée de contact lors de la collision des réactions verticales de choc :

$I_{y}=\int_{t_{0}}^{t_{1}}f_{y}(t)\,dt\ \ (N.m)$ que l'on compare à $I_{y}=-\frac{4\mathrm{R}^{2}-3\mathrm{b}^{2}}{2\mathrm{R}^{2}}Mb\,\omega_{-}$

Comme leur obtention exacte par la simulation numérique est délicate, on testera aussi le rapport avec la percussion horizontale $|I_{x}|/|I_{y}|\approx 0.3212$, qui est plus faible que le coefficient de frottement choisi (on ne doit donc pas avoir de glissement).

2.1.3 Cas d'entraînement harmonique

À l'étude, non restitué. Pour plus de détails, se reporter à [bib2].

2.2 Grandeurs et résultats de référence

Voici la liste des instants d'impact étudiés et les grandeurs calculées, sous l'hypothèse corps rigide. On compare également avec les résultats obtenus par le logiciel LMGC90 (v2), de l'Université de Montpellier, employant un θ-schéma d'intégration temporelle en vitesse pour un pas de temps $\Delta t=10^{-4}\,s$, et une méthode de traitement du contact en vitesse.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Phase Impact n°	Instants (*s*)	Déplacement vertical (*m*) maximal du coin	Vitesse verticale (*m*/*s*) maximale du coin juste avant collision	Énergie cinétique (*J*) maximale du bloc juste avant collision
initialisation	0.0000	0,003600 en A	0,0000	0,0000
$0 \Rightarrow 1$		0,002011 en O		
1	0.05440978		– 0,133572 en A	7,373981
LMGC90	0.0546	0,1898 en O (– 5.6%)	– 0,13325 (– 0.24%)	7.23255 (–1.918 %)
$1 \Rightarrow 2$		0,001123 en A		
2	0. 13574		– 0,099832 en O	4,119169
LMGC90	0.1324		– 0,10053 (0.71%)	4.04688 (1.756 %)
$2 \Rightarrow 3$		0,000628 en O		
3	0. 196529		– 0,074615 en A	2,301003
LMGC90	0.1929			2.25311 (–2.081 %)
$3 \Rightarrow 4$		0,000351 en A		
4	0. 241961		– 0,055767 en O	1,28536
LMGC90	0.2359			1.26174 (– 1.841 %)
$4 \Rightarrow 5$		0,000196 en O		
5	0.27592		– 0,04168 en A	0,718013
LMGC90	0.2693			

Tableau 2.1. Solutions analytiques sous l'hypothèse corps rigide, sans rebond. Comparaison avec la solution obtenue avec le logiciel LMGC90 (v2), de l'Université de Montpellier.

Phase Impact n°	Instants (s)	Ratio des vitesses angulaires	Réaction verticale sur le coin	Réaction horizontale sur le coin	Percussion I_y verticale sur le coin
$0 \Rightarrow 1$			3579,25 N en O	– 1149,8 N en O	
1	0.054409	0.7474			48,73 N.s en A
$1 \Rightarrow 2$			3579,25 N en A	1149,8 N en A	
2	0.13574	0.7474			36,42 N.s en O
$2 \Rightarrow 3$			3579,25 N en O	– 1149,8 N en O	
3	0.196529	0.7474			27,22 N.s en A
$3 \Rightarrow 4$			3579,25 N en A	1149,8 N en A	
4	0. 241961	0.7474			20,35 N.s en O
$4 \Rightarrow 5$			3579,25 N en O	– 1149,8 N en O	
5	0.27592	0.7474			15,21 N.s en A

Tableau 2.2. Solutions analytiques sous l'hypothèse corps rigide, sans rebond.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Phase Impact n°	Instants (*s*)	Déplacement vertical (*m*) maximal du coin	Vitesse verticale (*m*/*s*) extrémale du coin juste avant collision	Énergie cinétique (*J*) maximale du bloc juste avant collision	Percussion I_y verticale sur le coin
initialisation	0.0000	0,003600 en A	0,0000	0,0000	
$0 \Rightarrow 1$					
1	0.05440978	0,002247 en O	– 0,13357229 en A	7,373981	48,73 N.s en A
$1 \Rightarrow 2$					
2	0.138201	0,001402 en A	– 0,1055221 en O	4,6021	37,52 N.s en O
$2 \Rightarrow 3$					
3	0. 202720	0,000875 en O	– 0,083362 en A	2,8722	28,89 N.s en A
$3 \Rightarrow 4$					
4	0. 252400	0,000546 en A	– 0,065856 en O	1,7925	22,24 N.s en O
$4 \Rightarrow 5$					
5	0.29065	0,000341 en O	– 0,052026 en A	1,1187	17,12 N.s en A

Tableau 2.3. Solutions interprétées analytiquement à partir de coefficients de restitution de choc moyens estimés numériquement avec *Code_Aster*.

2.3 Incertitudes sur la solution

Solution analytique obtenue en hypothèse de corps rigide sans rebond ; solution élastique quasi-analytique exploitant une valeur énergétique obtenue par simulation, caractérisant la restitution de choc.

2.4 Références bibliographiques

1 F. VOLDOIRE : VHTR 2015: Graphite core seismic design: Non-linear dynamics of blocks; oscillations and contact-impacts. Bibliographical survey, analytical results. Note technique EDF/AMA HT-62/04/010/A, mars 2005.

2 F. VOLDOIRE : VHTR 2015: Graphite core seismic design: Non-linear dynamics of blocks; oscillations and contact-impacts. First finite element modelling methodologies. Note technique EDF/AMA HT-62/05/018/A, février 2006.

3 [P. Chabrand, O. Chertier, and F. Dubois. Complementarity methods for multibody friction and contact problems in finite deformations. Int. J. Num. Meth. Eng., 51:553–578, 2001.

4 F. VOLDOIRE, M. Kham : Projet OMERSI. Livrable T342 : Cas-test de structures basculantes et glissantes dans Code_Aster, couplage Code_Aster LMGC90. CR-AMA-07.289, 2/2008.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation B

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On opte pour une modélisation plane, avec des éléments finis 2D en contraintes planes (modélisation C_PLAN) et des éléments discrets ponctuels, support de ressorts de choc.

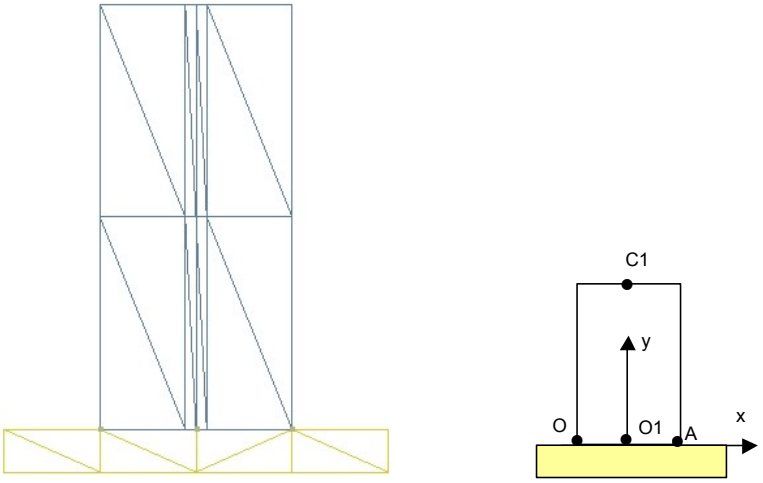


Figure 4.1-a : Modélisation et maillage

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage fait : 25 nœuds, 34 mailles SEG2 et 20 mailles TRIA6 . Voici la liste des groupes de nœuds et de mailles utiles dans la modélisation :

Nom groupe	Contenu
O	Nœud inférieur bas gauche du bloc et maille-point
A	Nœud inférieur bas droit du bloc et maille-point
O1	Nœud inférieur milieu du bloc et maille-point
C	Nœud supérieur milieu du bloc
CTBLO	Mailles SEG2 contour du bloc
CONHAUT	Mailles SEG2 base du bloc
CONBAS	Mailles SEG2 de la table sous la base du bloc
BLOCK	Mailles du bloc

On crée un nouveau maillage ma_poi pour ajouter les 3 mailles-points POI1 sur les nœuds O, A et O1, qui seront support des éléments discrets de ressort DIS_T. La table ne fait pas partie du modèle construit. On appelle mo le modèle associé au problème.

3.3 Caractéristiques des chargements

Le contact-frottement entre bloc et table est traité par des ressorts de choc ponctuels placés en O, A et O1. On affecte un matériau DIS_CONTACT et des caractéristiques DISCRET et ORIENTATION aux éléments de ressorts (pour les placer verticalement). Les caractéristiques choisies sont :

- dans AFFE_CARA_ELEM :

```
        DISCRET avec       CARA='K_T_D_N', VALE=(30000000000.0, 10000000.0, 0.0,),)
                           CARA='A_T_D_N', VALE=(0.1,1.0,0.0,),),),
        ORIENTATION avec   CARA='VECT_X_Y', VALE=(0.0,-1.0,0.0,1.0,0.0,0.0,),),);
```


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- dans DEFI_MATERIAU :
  DIS_CONTACT avec RIGI_NOR=30000000000.0, RIGI_TAN=10000000.0,
  AMOR_NOR=5000000.0, COULOMB=0.9, JEU=0.0.

La raideur normale est telle que les 3 ressorts en parallèle redonne la valeur du ressort déterminée au [§2.1].

Ensuite, dans DYNA_NON_LINE, on emploiera la relation de comportement DIS_CHOC sur ces éléments. Les éléments discrets, étant tridimensionnels, sont bloqués en z.

La pesanteur est simulée par une rampe, préalable à l'inclinaison du bloc, opérée par un déplacement imposé. Ces phases sont stabilisées à leur valeur nominale par un fort amortissement numérique, préalable à l'étude dynamique.

3.4 Caractéristiques de l'intégration en temps

On opte pour un schéma, implicite en temps, de Newmark, d'accélération moyenne modifiée..

Pour les phases de mise en place sous l'action de la pesanteur verticale et d'initialisation du lâcher (par décalage en rotation initiale du bloc), on choisit un pas de temps de $0.0125\,s$, et un schéma d'intégration en temps en α-méthode mot-clé « HHT » : ALPHA=-0.30, MODI_EQUI='NON' pour la pesanteur de 0 à g (de $t=-2.0\,s$ à $t=-1.0\,s$), puis on a choisi ALPHA=-0.60 pour la phase d'inclinaison du bloc (de $t=-1.25\,s$ à $t=0\ s$).

L'initialisation du lâcher à $t=0\ s$ se fait à partir d'une vitesse nulle dans le bloc et du déplacement induit par l'inclinaison. Pour les phases de vol libre (balancement), le pas de temps est réglé par $\Delta t=\sqrt{\frac{h}{50\,g}}$ où h est une dimension caractéristique de la chute. On choisit : $\Delta t=0.00125\ s$. On prend les paramètres de Newmark d'accélération moyenne : $\alpha=0.$, via le mot-clé « HHT ».

Pour les phases incluant les collisions et les légers rebonds immédiatement consécutifs, induits par la pénétration provoquée par la pénalisation du contact (due aux éléments de ressorts), on change d'intégration, en optant pour un schéma d'accélération moyenne modifiée : α-méthode « HHT », avec MODI_EQUI='NON' ou vrai schéma « HHT », avec MODI_EQUI='OUI' et $\alpha=-0.1$ (c'est-à-dire en introduisant un léger amortissement numérique), avec un pas de temps raffiné $\Delta t_r=0.000025\,\mathrm{s}$. Ainsi, on a la succession :

N° impact	Intervalle (s)	méthode	valeur de α	Pas de temps
	0,00000 à 0,00250	α-méthode	$\alpha=-0.1$	2.5 10^{-5} s
1	0,05375 à 0,05875	α-méthode	$\alpha=-0.1$	2.5 10^{-5} s
2	0,13375 à 0,15000	α-méthode	$\alpha=-0.1$	2.5 10^{-5} s
3	0,19250 à 0,21000	HHT	$\alpha=-0.1$	2.5 10^{-5} s
4	0,23250 à 0,24250	HHT	$\alpha=-0.1$	2.5 10^{-5} s
5	0,27000 à 0,27750	HHT	$\alpha=-0.1$	2.5 10^{-5} s

On constate un léger rebond peu après chaque collision (et une légère pénétration). Il est nécessaire pour que la simulation soit correcte que ce rebond soit intégré avec le pas de temps raffiné. De plus, le choix du pas de temps n'est pas indépendant de la valeur de la raideur normale de choc et de l'amortissement normal de choc, cf. [§ 4.3]. On constate que les instants de collision arrivent plus précocement qu'avec la méthode de contact de Lagrange non pénalisée, cf. [§ 4.4].

L'instant final est : $0.285\,s$, afin d'avoir les 5 premières collisions.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les non-linéarités sont intégrées avec la méthode de Newton, avec matrice tangente réactualisée à chaque itération. Les précisions requises sur l'équilibre sont : `resi_glob_rela`=10^{-6}, `resi_glob_maxi`=10^{-3} (ce qui est assez strict !). Le nombre d'itérations de Newton maximal est : 15.

On ne prévoit de subdivision que pour la phase initiale d'inclinaison du bloc.
Le nombre total de pas de temps pour l'étude du balancement est de 2140 pas.

3.5 Grandeurs testées et résultats

3.5.1 Cas de lâcher-balancement à partir d'une position inclinée au repos

Plusieurs valeurs sont testées non pas par instants, mais par valeurs extrémales sur un intervalle de temps, car cela est plus pertinent. Des tests de non-régression, avec faible tolérance, ont été ajoutés afin de pister les évolutions des algorithmes.

Valeurs de **déplacements** (`depl`), Type de référence `'ANALYTIQUE'` :

Identification	Instant (s)	Référence	*Aster*	Erreur relative %
D_y group_no O (m)	Valeur min sur [0, 0.33] s	0.000000	– 3.0079 10 $^{-6}$	0.00 %
D_y group_no O (m)	Valeur max sur [0, 0.33] s	Corps rigide : 0.002011 Avec recalage : 0.00225	0.00198832	– 1.13 % – 11.51 %
D_y group_no A (m)	Valeur min sur [0, 0.33] s	0.00000	– 4.94 10 $^{-6}$	0.00 %
D_y group_no A (m)	Valeur max sur [0, 0.33] s	0.00360	0.0035958	– 0.117 %

Valeurs de **vitesses** (`vite`), Type de référence `'ANALYTIQUE'` :

Identification	Instant (s)	Référence	*Aster*	Erreur relative %
V_y group_no O (m/s)	Valeur min sur [0, 0.33] s	Corps rigide : – 0.09983 Avec recalage : – 0.10552	– 0.098934	– 0.90 % – 6.24 %
V_y group_no O (m/s)	Valeur min sur [0.17, 0.33] s	Corps rigide : – 0.074614 Avec recalage : – 0.08336	– 0.051964	– 30.36 % – 37.66 %
V_y group_no A (m/s)	Valeur min sur [0, 0.33] s	– 0.13357	– 0.132746	– 0.617 %

Valeurs de **réactions** aux coins : sur les éléments discrets de ressorts (`sief_elga`), Type de référence `'ANALYTIQUE'` :

Identification	Instant (s)	Référence	*Aster*	Erreur relative %
N grou_no O (N)	Valeur max sur [0, 0.05] s	3580.0	3604.36	0.680 %
N grou_no A (N)	Valeur max sur [0.06, 0.12] s	3580.0	3611.13	0.870 %
VY grou_no O (N)	Valeur min sur [0, 0.05] s	– 1150.0	-1152.71	0.236 %
VY grou_no A (N)	Valeur max sur [0.07, 0.12] s	1150.0	1258.71	9.45 %

Valeurs d'**énergie cinétique** sur le bloc seul (`totale`), Type de référence `'ANALYTIQUE'` :

Identification	Instant (s)	Référence (J)	*Aster*	Erreur relative %
Énergie cinétique (J)	Valeur max sur [0.0, 0.28] s	Corps rigide : 7.37398	7.28314	– 1.23 %
Énergie cinétique (J)	Valeur max sur [0.10, 0.28] s	Corps rigide : 4.1192 Avec recalage : 4.6021	4.04539	– 1.79 % – 12.1%
Énergie cinétique (J)	Valeur max sur [0.15, 0.28] s	Corps rigide : 2.3010 Avec recalage : 2.8722	2.17093	– 5.653 % – 24.42%
Énergie cinétique	Valeur max sur	Corps rigide : 1.2854	1.11604	– 13.18 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

(J)	[0.22, 0.28] s	Avec recalage : 1.7925		– 37.7 %
Énergie cinétique (J)	Valeur max sur [0.26 , 0.28] s	Corps rigide : 0.7180 Avec recalage : 1. 1187	0.57368	– 20.1 % – 48.7 %

Valeurs des **instants de collision**, Type de référence 'ANALYTIQUE' :

Identification	énergie (J)	Référence (s)	*Aster*	Erreur relative %
Instant 1 ère collision (s)	Valeur max sur [0.0, 0.33] s	Corps rigide : 0.0544098	0.054375	– 0.064 %
Instant 2 ème collision (s)	Valeur max sur [0.10, 0.33] s	Corps rigide : 0.13574 Avec recalage : 0.13820	0.134900	– 0.619 % – 2.388 %
Instant 3 ème collision (s)	Valeur max sur [0.15, 0.33] s	Corps rigide : 0.196529 Avec recalage : 0.20272	0.19365	– 1.465 % – 4.474 %
Instant 4 ème collision (s)	Valeur max sur [0.22, 0.33] s	Corps rigide : 0.241961 Avec recalage : 0.25240	0.23560	– 2.629 % – 6.66 %
Instant 5 ème collision (s)	Valeur max sur [0.28 , 0.33] s	Corps rigide : 0.27592 Avec recalage : 0.29065	0.26570	– 3.70 % – 8.58 %

3.6 Remarques

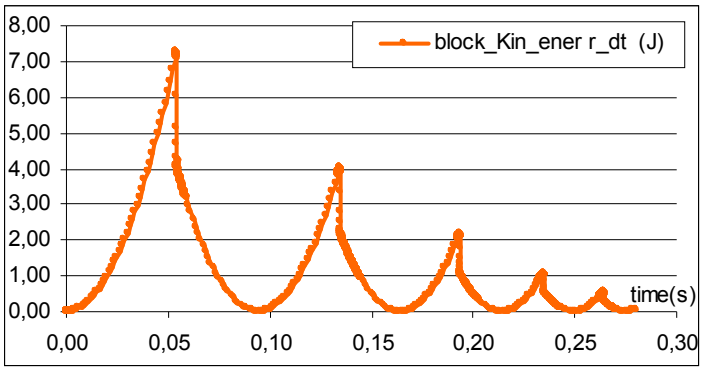


Figure 4.6-a : Évolution de l'énergie cinétique (J) du bloc.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation C

4.1 Caractéristiques de la modélisation

On opte pour une modélisation plane, avec des éléments finis 2D en contraintes planes (modélisation C_PLAN). Le contact-frottement entre bloc et table est traité par la méthode «formulation hybride continue », cf. [R5.03.52] et un schéma d'intégration implicite, formulé en déplacement.

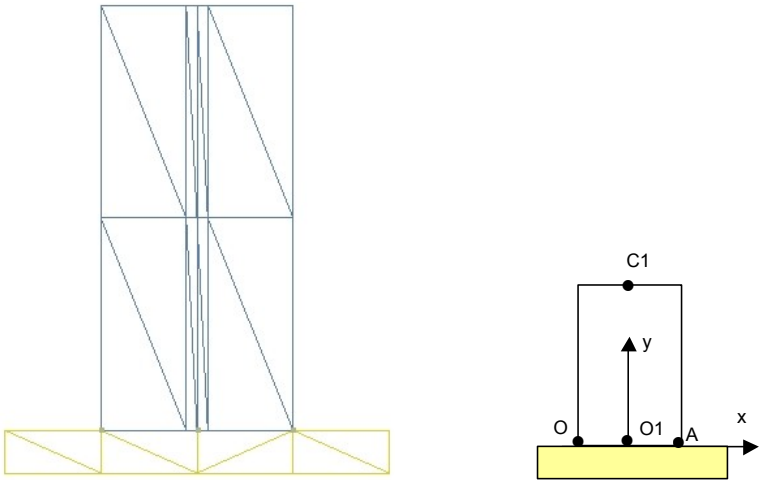


Figure 5.1-a : Modélisation et maillage

4.2 Caractéristiques du maillage

On appelle mo le modèle (voir fig. 5.1-a) associé au problème. Le maillage fait : 25 nœuds, 34 mailles SEG2 et 12 mailles QUA4. Voici la liste des groupes de nœuds et de mailles utiles dans la modélisation :

Nom groupe	Contenu
O	Nœud inférieur bas gauche du bloc
A	Nœud inférieur bas droit du bloc
O1	Nœud inférieur milieu du bloc
C	Nœud supérieur milieu du bloc
S0	Nœud de la table en contact avec O
S1	Nœud de la table en contact avec O1
S2	Nœud de la table en contact avec A
CTGROUND	Nœuds du bas de la table
CTBLO	Mailles SEG2 contour du bloc
CONHAUT	Mailles SEG2 base du bloc
CONBAS	Mailles SEG2 de la table sous la base du bloc
BLOCK	Mailles du bloc
GROUN	Mailles de la table

4.3 Caractéristiques des chargements

Le contact-frottement entre bloc et table est traité par la méthode continue, l'appariement étant par méthode maître-esclave, la normale choisie étant celle du maître :

- Groupe mailles maîtres : CONBAS ;
- Groupe mailles esclaves : CONHAUT.

On adopte une réactualisation géométrique.
La table est bloquée en x au point S1, et en y sur sa base CTGROUND .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La pesanteur est simulée par une rampe, préalable à l'inclinaison du bloc, opérée par un déplacement imposé. Ces phases sont stabilisées à leur valeur nominale par un fort amortissement numérique, préalable à l'étude dynamique.

4.4 Caractéristiques de l'intégration en temps

On opte pour un schéma, implicite en temps, de Newmark, d'accélération moyenne modifiée.

Pour les phases de mise en place sous l'action de la pesanteur verticale et d'initialisation du lâcher (par décalage en rotation initiale du bloc), on choisit un pas de temps de $0.0125\,s$, et un schéma d'intégration en temps en α-méthode mot-clé « HHT » : ALPHA=-0.30, MODI_EQUI='NON' pour la pesanteur de 0 à g (de $t=-2.0\,s$ à $t=-1.0\,s$), puis on a choisi ALPHA=-0.60 pour la phase d'inclinaison du bloc (de $t=-1.25\,s$ à $t=0\ s$).
L'initialisation du lâcher à $t=0\,s$ se fait à partir d'une vitesse nulle dans le bloc et du déplacement induit par l'inclinaison. Pour les phases de vol libre (balancement), le pas de temps est réglé par $\Delta t=\sqrt{\frac{h}{50\,g}}$ où h est une dimension caractéristique de la chute. On choisit : $\Delta t=0.0025\ s$. On prend les paramètres de Newmark d'accélération moyenne : $\alpha=0.$, via le mot-clé « HHT ».

Pour les phases incluant les collisions, on change d'intégration, en optant pour un schéma d'accélération moyenne modifiée : α-méthode « HHT », avec MODI_EQUI='NON', avec $\alpha=-0.2$ et un pas de temps raffiné $\Delta t_r=0.000010\ s$. Ainsi, on a la succession :

N° impact	Intervalle (s)	α-méthode	Pas de temps
	0,0000 - 0,0025	$\alpha=-0.1$	10^{-5} s
1	0,0525 - 0,0600	$\alpha=-0.2$	10^{-5} s
2	0,1400 - 0,1450	$\alpha=-0.2$	10^{-5} s
3	0,2050 - 0,2150	$\alpha=-0.2$	10^{-5} s
4	0,2575 - 0,2650	$\alpha=-0.2$	10^{-5} s
5	0,2975 - 0,3100	$\alpha=-0.2$	10^{-5} s

On constate un léger rebond peu après chaque collision. Il est nécessaire pour que la simulation soit correcte que ce rebond soit intégré avec le pas de temps raffiné.

L'instant final est : $0.32\,s$, afin d'avoir les 5 premières collisions. Cependant afin d'avoir un test moins coûteux, on s'arrête après la seconde collision : on s'arrête en pratique à l'instant $0.145\,s$.

Comme le SOLVEUR, METHODE 'LDLT' ne marche pas avec la méthode continue, on prend la METHODE 'MULT_FRONT', avec RENUM 'MDA', car RENUM 'METIS' peut coûter cher en temps System selon les machines.

4.5 Grandeurs testées et résultats

Plusieurs valeurs sont testées non pas par instants, mais par valeurs extrémales sur un intervalle de temps, car cela est plus pertinent. Des tests de non-régression, avec faible tolérance, ont été ajoutés afin de pister les évolutions des algorithmes. On se limite ici à trois phases de vol libre.

Valeurs de **déplacements** (depl), Type de référence 'ANALYTIQUE' :

Identification	Instant (s)	Référence	*Aster*	Erreur relative %
D_y group_no O (m)	Valeur min sur [0, 0.33] s	0.000000	– 1.8916210 $^{-10}$	0.00 %
D_y group_no O (m)	Valeur max sur [0, 0.33] s	Corps rigide : 0.002011 Avec recalage : 0.00225	0.00233214	15.97 % 3.79 %
D_y group_no A (m)	Valeur min sur [0, 0.33] s	0.00000	– 1.0265 10 $^{-10}$	0.00 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D_y group_no A (m)	Valeur max sur [0, 0.33] s	0.00360	0.0035999	– 0.06 %

Valeurs de **vitesses** (vite), Type de référence 'ANALYTIQUE' :

Identification	Instant (s)	Référence	*Aster*	Erreur relative %
V_y group_no O (m/s)	Valeur min sur [0, 0.33] s	Corps rigide : – 0.09983 Avec recalage : – 0.10552	– 0.107117	7.30 % 4.16 %
V_y group_no A (m/s)	Valeur min sur [0, 0.33] s	– 0.13357	– 0.132807	– 0.571 %

Valeurs de **réactions** aux coins (CONT_NOEU), composantes normale (RN) et tangentielle (RX), Type de référence 'ANALYTIQUE' :

Identification	Instant (s)	Référence	*Aster*	Erreur relative %
RN grou_no O (N)	Valeur max sur [0, 0.05] s	3580.0	3599.52	0.545 %
RN grou_no A (N)	Valeur max sur [0.06, 0.12] s	3580.0	3597.66	0.493 %
RX grou_no O (N)	Valeur min sur [0, 0.05] s	– 1150.0	– 1137.17	– 1.12 %
RX grou_no A (N)	Valeur max sur [0.07, 0.12] s	1150.0	1141.47	– 0.742 %

Valeurs de **percussions** aux coins (CONT_NOEU intégrées autour des instants de collision), Type de référence 'ANALYTIQUE' :

Identification	Instant (s)	Référence	*Aster*	Erreur relative %
RN grou_no A (N)	Valeur intégrée sur [0.05440, 0.05455]	48.73	41.9301	– 13.9 %
RX grou_no A (N)	Valeur intégrée sur [0.05440, 0.05455]	15.65	11.2919	– 27.8 %

Valeurs d'**énergie cinétique** sur le bloc seul (totale) :

Identification	Instant (s)	Référence (J)	*Aster*	Erreur relative %
Énergie cinétique (J)	Valeur max sur [0.0, 0.33] s	Corps rigide : 7.37398	7.28973	– 1.14 %
Énergie cinétique (J)	Valeur max sur [0.1, 0.33] s	Corps rigide : 4.1192 Avec recalage : 4.6021	4.74225	15.1 % 3.04%

Valeurs des **instants de collision, Type de référence 'ANALYTIQUE' :**

Identification	énergie (J)	Référence (s)	*Aster*	Erreur relative %
Instant 1 ère collision (s)	Valeur max sur [0.0, 0.33] s	Corps rigide : 0.0544098	0.054400	– 0.018 %
Instant 2 ème collision (s)	Valeur max sur [0.10, 0.33] s	Corps rigide : 0.13574 Avec recalage : 0.13820	0.14154	5.05 % 2.42 %

4.6 Remarques

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

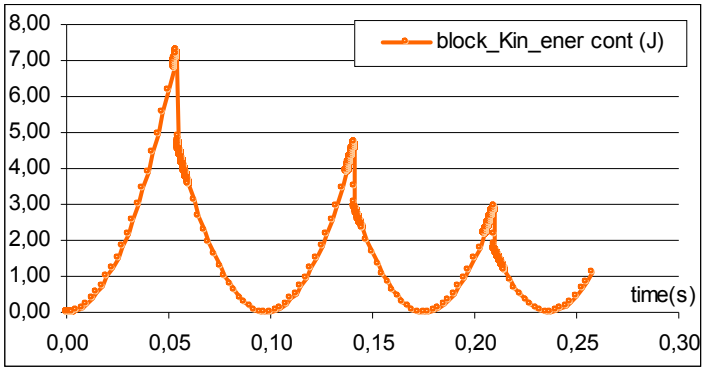


Figure 5.6-a : Évolution de l'énergie cinétique (J) du bloc (méthode continue en déplacements).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus avec le *Code_Aster*, en dynamique avec schéma d'intégration temporelle implicite, exprimé sur les déplacements, sont à peu près conformes à ceux attendus par comparaison à la solution analytique : erreur inférieure à 12% sur les instants de collision (sur l'ensemble des cinq collisions modélisées). On obtient des résultats contenus dans la plage des deux modèles analytiques possibles : celui du corps rigide sans aucun rebond et celui ajusté en tenant compte d'un rebond élastique, d'où un plus fort coefficient de restitution de choc.

On constate des différences de prédiction entre les méthodes de traitement du contact choisie. La méthode de pénalisation (par ressorts discrets de choc), qui ne fonctionne qu'en prévoyant aussi de l'amortissement localisé, fait baisser le coefficient de restitution de choc, donc approche plus les valeurs des instants de collision du modèle analytique de corps rigide sans rebond.

Ces valeurs sont très proches de celles obtenues par un logiciel dédié, LMGC90, développé à l'Université de Montpellier, reposant sur un θ-schéma d'intégration temporelle en vitesse et proposant deux méthodes pour traiter le contact (en jeu, en vitesse), qui donnent ici toutes deux les mêmes prédictions.

Par contre, avec la méthode de contact « exacte » de *Code_Aster* – continue – associée à un schéma d'intégration temporelle implicite de la famille Newmark-HHT, exprimé sur les déplacements, on obtient plutôt des résultats régis par la solution analytique ajustée en tenant compte du rebond.

Certains résultats sont légèrement différents d'une machine à l'autre : de l'ordre du % sur les énergies, les instants de collision et les vitesses à partir du $3^{ème}$ rebond. Les réactions sont plus stables. La méthode par ressorts discrets de choc semble moins sensible au choix de la machine d'exécution.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)