SDND105 – Choc d'un point matériel contre une paroi avec flambage plastique

Résumé :

Ce test valide le comportement d'un obstacle de type choc avec flambage éventuel. La résolution a été réalisée avec l'opérateur DYNA_VIBRA en utilisant le mot clé FLAMBAGE.

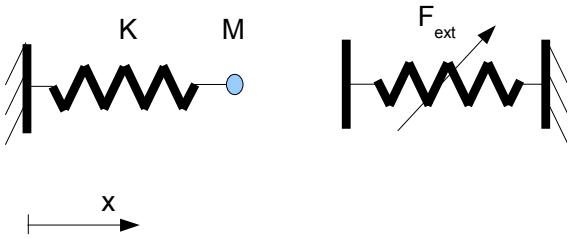
On calcule l'instant de début de flambage (cet instant correspond au premier instant où la force de choc a dépassé le seuil de flambage), la déformation plastique cumulée et l'instant où l'on revient à la position initiale.

Les résultats obtenus sont en accord avec les résultats analytiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

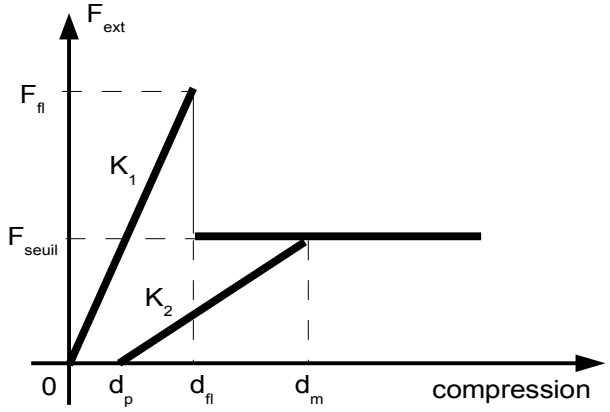


1.2 Propriétés du matériau

Pour les modélisations A et B

$K = 10^{-7}\ N/m$
$M = 1\ kg$

La force de réaction F_{ext} dépend de la compression de la paroi qui suit la loi ci-dessous :



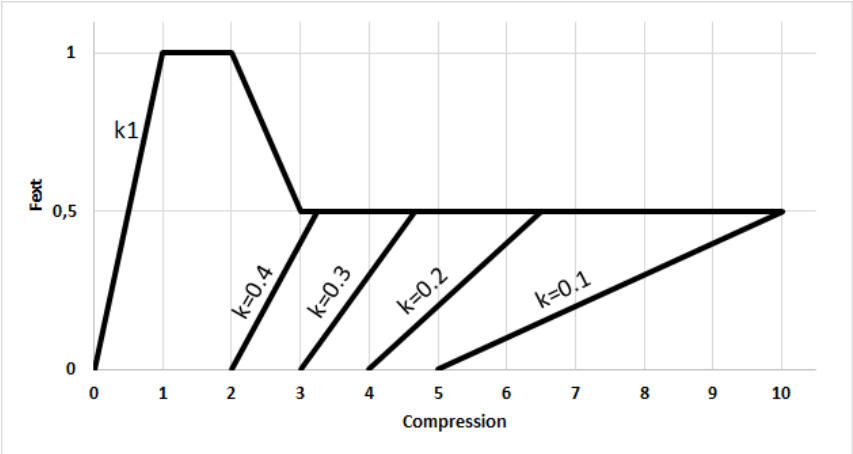
Avec :

$K_1 = 1\ N/m$
$F_{fl} = 1\ N$
$F_{seuil} = 0.5\ N$
$K_2 = 0.5\ N/m$

Pour la modélisation C

La relation force-compression est présentée dans la figure ci-dessous et dans le détail des paramètres.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



Avec :
$K_1 = 1\ N/m$
$F_{fl} = 1\ N$
$F_{seuil} = 0.5\ N$

LARG_PLAT = 1
ENFO_FL = 1
DEPL_POST_FL = [2., 3., 4., 5.]
RIGI_POST_FL = [0.4, 0.3, 0.2, 0.1]

1.3 Conditions aux limites et chargements

On impose le déplacement de la masse mobile M suivant l'axe des x .

1.4 Conditions initiales

Pour les modélisations A et B

À l'instant initial, la masse mobile est juste en contact contre la paroi (jeu initial nul) avec une vitesse initiale égale à $2\,m/s$.
La paroi n'a pas encore subi de déformation plastique (paroi non flambée).

Pour la modélisation C

À l'instant initial, la masse mobile est juste en contact contre la paroi (jeu initial nul) avec une vitesse initiale égale à $2.828427125\,m/s$.
À l'état initial, la paroi n'a pas encore subi de déformation plastique (paroi non flambée).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

Le problème consiste à analyser la réponse d'une masse mobile soumise à une vitesse initiale non nulle et venant choquer contre une paroi qui suit une loi de comportement de type flambage.

L'équation d'équilibre du système s'écrit :

$$M\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+Kx=F_{ext} \quad (1)$$

La résolution de (1) se déroule en plusieurs phases : avant flambage de la paroi, chargement après flambage, déchargement après flambage et vol libre.

2.1.1 Première phase

Avant le flambage, la force de réaction vaut : $F_{ext}=-K_1 x$

La solution de l'équation (1) se met sous la forme suivante : $x(t)=A_1\sin\omega_1 t+B_1\cos\omega_1 t$

Avec : $\omega_1^2=\frac{K+K_1}{M}$

En tenant compte des conditions initiales : $x(0)=0$ et $\frac{\partial x}{\partial t}(0)=v_0$

On identifie : $A_1=\frac{v_0}{\omega_1}$ et $B_1=0$

Soit : $x(t)=\frac{v_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t$

On atteint le seuil limite de flambage F_{fl} à l'instant t_{fl}, tel que : $x(t_{fl})=d_{fl}=\frac{F_{fl}}{K_1}$.

D'où : $t_{fl}=\frac{1}{\omega_1}Arc\sin(\frac{F_{fl}\omega_1}{K_1 v_0})$

et $\frac{\partial x}{\partial t}(t_{fl})=v_{fl}$

2.1.2 Deuxième phase

La phase suivante est la phase de chargement après flambage ; la force de réaction est constante tant que la vitesse reste positive. Cette force de réaction vaut : $F_{ext}=-F_{seuil}$ et la solution de l'équation (1) s'écrit : $x(t)=A_2\sin\omega_0 t+B_2\cos\omega_0 t-\frac{F_{seuil}}{M\,\omega_0^2}$

Avec : $\omega_0^2=\frac{K}{M}$

Comme $\omega_0^2\ll 1$, on peut effectuer un développement limité des fonctions trigonométriques.
Soit : $x(t)=A_{21}t^2+B_{21}t+C_{21}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En tenant compte des conditions initiales $x(t_{fl})=d_{fl}$ et $\frac{\partial x}{\partial t}(t_{fl})=v_{fl}$, on obtient :

$$A_{21}=(\frac{v_{fl}t_{fl}}{2}-\frac{d_{fl}}{2}-\frac{F_{seuil}^2}{4M})\omega_0^2-\frac{F_{seuil}}{2M}$$

$$B_{21}=v_{fl}+\frac{F_{seuil}t_{fl}}{M}+(d_{fl}t_{fl}-\frac{v_{fl}t_{fl}^2}{2})\omega_0^2$$

$$C_{21}=d_{fl}-\frac{F_{seuil}t_{fl}^2}{2M}-v_{fl}t_{fl}-\frac{d_{fl}t_{fl}^2}{2}\omega_0^2$$

L'instant auquel la vitesse s'annule est : $t_m=-\frac{B_{21}}{2A_{21}}$

En négligeant les termes en ω_0^2, on déduit : $t_m=t_{fl}+\frac{M\,v_{fl}}{F_{seuil}}$,

et le déplacement maximal vaut : $x(t_m)=d_m$

Cela permet d'obtenir la déformation plastique cumulée : $d_p=d_m-\frac{F_{seuil}}{K_2}$

2.1.3 Troisième phase

Cette phase correspond au déchargement, la force de réaction vaut : $F_{ext}=-K_2(x-d_p)$

La solution de l'équation (1) s'écrit : $x(t)=A_3\sin\omega_2 t+B_3\cos\omega_2 t+\frac{K_2 d_p}{K+K_2}$

Avec : $\omega_2^2=\frac{K+K_2}{M}$

En tenant en compte des conditions initiales $x(t_m)=d_m$ et $\frac{\partial x}{\partial t}(t_m)=0$,

on obtient : $A_3=(d_m-\frac{K_2 d_p}{K+K_2})\sin\omega_2 t_m$ et $B_3=(d_m-\frac{K_2 d_p}{K+K_2})\cos\omega_2 t_m$.

La force de réaction s'annule lorsque le déplacement du point matériel atteint la valeur de la déformation plastique cumulée d_p.

Comme $K\ll K_2$, on fait l'approximation suivante : $\frac{K_2 d_p}{K+K_2}\approx d_p$.

Ainsi, l'instant t_d qui correspond à l'annulation de la force de réaction est tel que :
$x(t_d)=d_p=A_3\sin\omega_2 t_d+B_3\cos\omega_2 t_d+d_p$

Soit : $\sin\omega_2 t_m\sin\omega_2 t_d+\cos\omega_2 t_m\cos\omega_2 t_d=\cos\omega_2(t_d-t_m)=0$.

D'où : $t_d=t_m+\frac{\pi}{2\omega_2}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.1.4 Quatrième phase

La phase suivante correspond à la phase de vol libre $F_{ext}=0$.

La solution de l'équation (1) s'écrit : $x(t)=A_4\sin\omega_0 t+B_4\cos\omega_0 t$

Les conditions initiales sont :

$$x(t_d)=d_p \text{ et } \frac{\partial x}{\partial t}(t_d)=v_d=\omega_2(x_m-\frac{K_2 d_p}{K+K_2})\sin\omega_2(t_m-t_d)$$

Ce qui donne :

$$A_4=d_p\sin\omega_0 t_d+\frac{v_d}{\omega_0}\cos\omega_0 t_d$$

$$B_4=d_p\cos\omega_0 t_d-\frac{v_d}{\omega_0}\sin\omega_0 t_d$$

Comme $\omega_0^2\ll 1$, en effectuant un développement limité des fonctions trigonométriques jusqu'à l'ordre 2, la solution se met sous la forme suivante :

$$x(t)=A_{41}t^2+B_{41}t+C_{41}$$

Avec :

$$A_{41}=\frac{\omega_0^2}{2}[v_d t_d-d_p(1-\frac{\omega_0^2 t_d^2}{2})]$$

$$B_{41}=d_p t_d\omega_0^2+v_d(1-\frac{\omega_0^2 t_d^2}{2})$$

$$C_{41}=d_p(1-\frac{\omega_0^2 t_d^2}{2})-v_d t_d$$

En négligeant les termes en ω_0^2, on obtient :

$$x(t)=v_d t+d_p-v_d t_d.$$

Et on déduit l'instant t_0 de passage à la position initiale ($x=0$).

Soit : $t_0=t_d-\frac{d_p}{v_d}$.

2.1.5 Solution de référence de la modélisation C

Les conditions initiales choisies permettent d'avoir une énergie de $4J$, qui doit conduire à une compression totale de $6.5m$ et une compression résiduelle de $4m$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Grandeurs et résultats de référence

Pour les modélisations A et B

On se propose de tester les grandeurs suivantes :
t_{fl} : instant de début de flambage ;
d_p : déformation plastique cumulée ;
t_0 : instant de repassage à la position initiale (après flambage et décharge).

Compte tenu des valeurs numériques des données d'entrée, on obtient :

$t_{fl}=\frac{\pi}{6}$ (exprimé en secondes)
$d_p=3$ (exprimée en mètres)
$t_0=\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}+\frac{\pi+6}{\sqrt{2}}$ (exprimé en secondes)

Pour la modélisation C

Compression résiduelle $d_p=4$ (exprimée en mètres)
Vitesse de rebond après le choc $V_{rebond}=-1.118033989$ (exprimée en mètres par seconde)

2.3 Incertitudes sur la solution

La solution de référence est analytique (au second ordre près).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On modélise le système avec un point matériel et un obstacle de type PLAN_Y.

On évalue les grandeurs obtenues suite au flambage dû au choc en utilisant le mot clé FLAMBAGE de l'opérateur DYNA_VIBRA.

On vérifie également les différentes méthodes de résolution (EULER, ADAPT_ORDRE2 et DEVOGE). Avec le schéma en temps adaptatif ADAPT_ORDRE2 on définit (en secondes) :

- le pas de temps initial : PAS = 0.0002,
- la valeur maximale du pas de temps : PAS_MAXI = 0.001,
- la valeur minimale du pas de temps : PAS_MINI = 2.E-8.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2
Nombre de maille : 1 **SEG2**

3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs des grandeurs liées au flambage de la paroi.

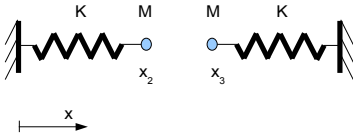
Identification	Référence	Type de référence	Précision
t_{fl}	$\frac{\pi}{6}s$	'ANALYTIQUE'	0.1 %
d_p	3 m	'ANALYTIQUE'	0.1 %
$x(t_0)=x(\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}+\frac{\pi+6}{\sqrt{2}})$	0 m	'ANALYTIQUE'	3.E-3 m

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Pour cette modélisation, on considère deux points matériels mobiles selon le schéma suivant :



Le système est parfaitement symétrique. On obtient la même formulation que la modélisation A si on choisit des rigidités normales de choc égales à la moitié des rigidités choisies pour la modélisation A.

En effet, si on note : $x_2 = -x_3 = x$
La force de réaction F_{ext} se met sous la forme suivante :

Pendant la première phase : $F_{ext} = -K_1(x_2 - x_3) = -2K_1 x$
Pendant la deuxième phase : $F_{ext} = -F_{seuil}$
Pendant la troisième phase : $F_{ext} = -K_2(x_2 - x_3 - 2d_p) = -2K_2(x - d_p)$
Pendant la quatrième phase : $F_{ext} = 0$

On modélise le problème avec un obstacle de type BI_PLAN_Y.

À l'instant initial, les deux points matériels sont en contact avec une vitesse initiale égale à $2 m/s$.

On évalue les grandeurs obtenues suite au flambage dû au choc en utilisant le mot clé FLAMBAGE de l'opérateur DYNA_VIBRA, avec les schémas en temps EULER et ADAPT_ORDRE2.
Avec le schéma en temps adaptatif ADAPT_ORDRE2, on définit (en secondes) :

- le pas de temps initial : PAS = 0.001,
- la valeur maximale du pas de temps : PAS_MAXI = 0.005.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4
Nombre de mailles : 2 **SEG2**

4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs des grandeurs liées au comportement de flambage pendant le choc.

Identification	Référence	Type de référence	Précision
t_{fl}	$\frac{\pi}{6} s$	'ANALYTIQUE'	0.01 %
d_p	3 m	'ANALYTIQUE'	0.01 %
$x(t_0) = x(\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3} + \frac{\pi+6}{\sqrt{2}})$	0 m	'ANALYTIQUE'	1.E-4 m

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation on réutilise la modélisation A pour tester une forme plus complexe de la loi de flambage.

On modélise le système avec un point matériel et un obstacle de type PLAN_Y.

On évalue les grandeurs obtenues suite au flambage dû au choc en utilisant le mot clé FLAMBAGE de l'opérateur DYNA_VIBRA.

On vérifie également les différentes méthodes de résolution (EULER, ADAPT_ORDRE2 et DEVOGE). Avec le schéma en temps adaptatif ADAPT_ORDRE2 on définit (en secondes) :

- le pas de temps initial : PAS = 0.0002,
- la valeur maximale du pas de temps : PAS_MAXI = 0.001,
- la valeur minimale du pas de temps : PAS_MINI = 2.E-8.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2
Nombre de maille : 1 **SEG2**

5.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs des grandeurs liées au flambage de la paroi.

Identification	Référence	Type de référence	Précision
d_p	4 m	'ANALYTIQUE'	0.01 %
V_{rebond}	-1.118033989 m/s	'ANALYTIQUE'	0.01 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Synthèse des résultats

Les écarts entre les solutions obtenues avec Aster et les solutions analytiques sont très faibles.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)