SDND100 - Lâcher d'un patin frottant avec frottement de type Coulomb

Résumé

On considère le système unidirectionnel à un degré de liberté constitué d'une masse en contact frottant de type Coulomb sur un plan rigide, et d'un ressort l'attachant à un point fixe. La masse est lâchée dans une position initiale hors équilibre. Elle oscille jusqu'à l'arrêt complet au bout d'un temps fini.
Les deux premières modélisations correspondent à la réponse transitoire par recombinaison modale du patin frottant, la troisième correspond à sa réponse transitoire directe. Les trois calculs sont comparés à la solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Direction de déplacement : $\theta = 45°$ dans le plan XY

1.2 Propriétés de matériaux

Raideur du ressort :	$k = 10\,000\ N/m$
Masse ponctuelle :	$m = 1\ kg$
Pesanteur :	$g = 10\ m/s^2$
Coefficient de Coulomb :	$\mu = 0,1$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Le système repose sur le plan $Z = 0$ sur lequel il peut glisser avec un coefficient de frottement de Coulomb de $\mu = 0,1$.

1.4 Conditions initiales

Déplacement initial de la masse : $r_0 = 0,85\ mm$ selon la direction θ .

Vitesse initiale nulle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Pour un système sans amortissement, l'équation différentielle à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} m\ddot{r}+k\,r=\mu\,|F_n| \\ r(t=0)=r_0\geq 0 \\ \dot{r}(t=0)=0 \end{cases} \qquad \text{avec } F_n=-mg\,sign(\dot{r})$$

On montre [bib1] que la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$r(t)=\frac{\mu|F_n|}{k}+(r_0-\frac{\mu|F_n|}{k})\cos\omega_0 t$$

L'amplitude des extrema, qui proviennent tous les $t_{n+1}=\frac{n\pi}{\omega_0}$, obéit à la loi de récurrence suivante :

$$r(t_{n+1})=(-1)^n\left[r_0-\frac{\mu|F_n|}{k}\right]\cos\omega_0 t$$

avec $n=1,2,\ldots,N$ tel que $\left|\frac{r(t_{n+1})}{r_0}\right|<\frac{\mu|F_n|}{k\,r_0}$

Le mouvement s'arrête quand $\left|\frac{r(t_{n+1})}{r_0}\right|<\frac{\mu|F_n|}{k\,r_0}$ à la position $r(t_{n+1})$.

2.2 Résultats de référence

Valeurs des déplacements dans la direction θ pour les instants de changement de signe de la vitesse ($r(t_1), r(t_2), \ldots, r(t_5)$ établis ci-dessus).

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

F. AXISA - Méthodes d'analyse en dynamique non linéaire des structures : non-linéarités de contact - Cours IPSI du 28 au 30 mai 1991

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Un élément de type DIS_T sur une maille POI1 est utilisé pour modéliser le système.
Des conditions de relations entre degrés de liberté sont employées pour imposer au mouvement d'être unidirectionnel dans la direction θ :

```
LIAISON_DDL = _F ( NOEUD = ('NO1','NO1'),
                   DDL = ('DX' 'DY'),
                   COEF_MULT = (0.707, -0.707),
                   COEF_IMPO = 0.)
```

Un obstacle de type PLAN_Z (deux plans parallèles séparés par un jeu) est utilisé pour simuler le plan de glissement. On choisit de prendre pour génératrice de ce plan l'axe Oy, soit NORM_OBST = (0., 1., 0.). L'origine de l'obstacle est ORIG_OBST = (0.,0.,1.). Il reste à définir son jeu qui donne le demi-écartement entre les plans.

Pour qu'il existe une force de réaction du plan sur le système il faut que ce dernier soit légèrement enfoncé dans l'obstacle plan d'une distance δn telle que : $F_n = K_n \cdot \delta n$.
Comme $F_n = mg$, on a alors $\delta n = mg / K_n$.
On a considéré une raideur de choc normale de $20\,N/m$ (raideur fictive qui n'a de sens que pour générer une force de réaction du plan sur le système), on a donc $\delta n = 0{,}5$. L'obstacle PLAN_Z ayant pour origine $Z = 1$ et le solide étant en $Z = 0$; un jeu de $0{,}5\,m$ créera un enfoncement $\delta n = 0{,}5\,m$ d'où JEU : 0.5

Raideur de choc tangentielle : $K_T = 400\,000\,N/m$: elle est grande devant la raideur de l'oscillateur pour que la phase d'arrêt soit modélisée correctement.

Pas de temps utilisé pour l'intégration temporelle : 5.10^{-4s}.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1
Nombre de mailles et types : 1 POI1

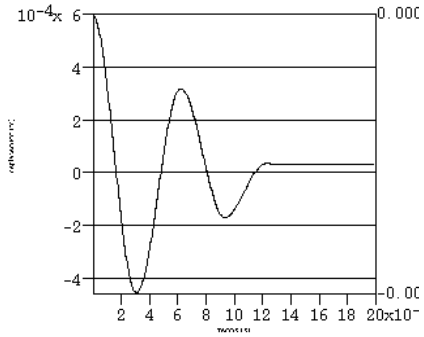
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

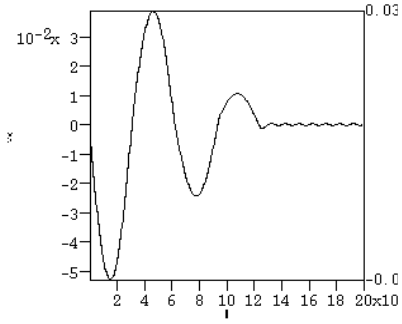
Valeurs des déplacements (en mètres) dans la direction θ pour les instants de changement de signe de la vitesse sur la période de temps $(0;0.3s)$.

Identification	instant (s)	Référence
$DY=r2\,cos45$	$\pi\times10^{-2}$	–4.596E–4
$DY=r3\,cos45$	$2\pi\times10^{-2}$	3.182E–4
$DY=r4\,cos45$	$3\pi\times10^{-2}$	–1.768E–4
$DY=r5\,cos45$	$4\pi\times10^{-2}$	3.536E–5

On présente ci dessous l'évolution du déplacement et de la vitesse au point $NO1$



Déplacement du point $NO1$



Vitesse du point $NO1$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans la modélisation B, on considère le patin et le plan comme deux structures mobiles. Chaque structure est alors modélisée par un nœud et un élément de type POI1. Le nœud $NO2$ est supposé bloqué, il matérialise le plan de frottement. On impose des conditions de relations entre degrés de liberté au nœud $NO1$ (qui modélise le patin) pour que le mouvement soit unidirectionnel dans la direction θ.

Un obstacle de type BI_PLAN_Z (deux plans parallèles mobiles séparés par un jeu) est utilisé pour simuler le plan de glissement. On choisit de prendre pour génératrice de ce plan l'axe Oy, soit NORM_OBST = (0., 1., 0.). Par défaut, l'origine de l'obstacle est située à mi distance des nœuds $NO1$ et $NO2$. Il reste à définir les paramètres DIST_1 et DIST_2 qui représentent l'épaisseur de matière autour des nœuds de choc.

Pour qu'il existe une force de réaction du plan sur le système il faut que ce dernier soit légèrement enfoncé dans l'obstacle plan d'une distance δn telle que : $F_n = K_n \cdot \delta n$.
Comme $F_n = mg$, on a alors $\delta n = mg / K_n$.
On a considéré une raideur de choc normale de $20\,N/m$ (raideur fictive qui n'a de sens que pour générer une force de réaction du plan sur le système), on a donc $\delta n = 0{,}5\,m$. Sachant que les deux nœuds $NO1$ et $NO2$ sont géométriquement confondus, on choisit par exemple DIST_1 = DIST_2 = $\delta n/2$.

Raideur de choc tangentielle : $K_T = 400\,000\,N/m$: elle est grande devant la raideur de l'oscillateur pour que la phase d'arrêt soit modélisée correctement.

Pas de temps utilisé pour l'intégration temporelle : $5.10^{-4}\,s$.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2
Nombre de mailles et types : 2 POI1

4.3 Grandeurs testées et résultats

Valeurs des déplacements (en mètres) dans la direction de l'oscillateur pour les instants de changement de signe de la vitesse sur la période de temps $(0\,;0.3\,s)$.

Identification	instant (s)	Référence
$DY = r2\,cos45$	$\pi \times 10^{-2}$	–4.596E–4
$DY = r3\,cos45$	$2\pi \times 10^{-2}$	3.182E–4
$DY = r4\,cos45$	$3\pi \times 10^{-2}$	–1.768E–4
$DY = r5\,cos45$	$4\pi \times 10^{-2}$	3.536E–5

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation correspond à la réponse transitoire directe du patin frottant.

La direction normale de contact est l'axe local X qui correspond dans le cas test à l'axe global Z. Le plan de glissement est le plan local (Y, Z) soit le plan (X, Y) dans le repère global. On oriente donc l'élément de choc à un nœud, avec le mot clé ORIENTATION de l'opérateur AFFE_CARA_ELEM de la façon suivante :

```
ORIENTATION= _F( MAILLE='EL1',  CARA: 'VECT_X_Y' ,
                 VALE = ( 0., 0., -1., 0., 1., 0. ) )
```

Pour pouvoir obtenir une force de réaction du plan sur le système il faut que ce dernier soit légèrement enfoncé dans l'obstacle plan d'une distance δn telle que : $F_n = K_n \cdot \delta n$.
La réaction équilibre le poids du patin, on a donc : $F_n = mg$ c'est-à-dire $\delta n = mg / K_n$.
On a considéré une raideur de choc normale de $20\,N/m$ (raideur fictive qui n'a de sens que pour générer une force de réaction du plan sur le système), on a donc $\delta n = 0{,}5$ d'où DIST_1 = 0.5.

La raideur de choc tangentielle considérée est $K_T = 400\,000\,N/m$, le coefficient de Coulomb vaut 0,1.

La loi de comportement de choc est donc définie de la façon suivante dans DEFI_MATERIAU :

```
DIS_CONTACT =_F ( RIGI_NOR= 20.,
                  DIST_1 = 0.5,
                  RIGI_TAN = 400000.,
                  COULOMB = 0.1)
```

On utilise un pas de temps de $5.10^{-4} s$ pour l'intégration temporelle.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1
Nombre de mailles et types : 1 POI1

5.3 Grandeurs testées et résultats

Valeurs des déplacements dans la direction de l'oscillateur pour les instants approchés de changement de signe de la vitesse sur la période de temps $(0\,;\,0.2\,s)$.

Identification	instants (s)	Référence
$DY = r2\,cos45$	$\pi \times 10^{-2}$	–4,585E–04
$DY = r3\,cos45$	$2\pi \times 10^{-2}$	3,173E–04
$DY = r4\,cos45$	$3\pi \times 10^{-2}$	–1,754E–04
$DY = r5\,cos45$	$4\pi \times 10^{-2}$	3,550E–05

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation correspond à la modélisation B, dans laquelle l'option de frottement unidirectionnel est activée. On considère le patin et le plan comme deux structures mobiles. Chaque structure est alors modélisée par un nœud et un élément de type POI1. Le nœud $NO2$ est supposé bloqué, il matérialise le plan de frottement. On impose des conditions de relations entre degrés de liberté au nœud $NO1$ (qui modélise le patin) pour que le mouvement soit unidirectionnel dans la direction θ.

Un obstacle de type BI_PLAN_Z (deux plans parallèles mobiles séparés par un jeu) est utilisé pour simuler le plan de glissement. On choisit de prendre pour génératrice de ce plan l'axe Oy, soit NORM_OBST = (0., 1., 0.). Par défaut, l'origine de l'obstacle est située à mi distance des nœuds $NO1$ et $NO2$. Il reste à définir les paramètres DIST_1 et DIST_2 qui représentent l'épaisseur de matière autour des nœuds de choc.

Le frottement unidirectionnel implique que le coefficient de frottement n'est plus isotrope dans le plan défini précédemment. Il vaut 0 suivant l'axe renseigné dans NORM_OBST et μ dans la direction perpendiculaire. Pour un angle θ de $\pi/2$, ceci correspond à diviser le coefficient de frottement par $\sqrt{(2)}$, par rapport à la modélisation B.

Pour qu'il existe une force de réaction du plan sur le système il faut que ce dernier soit légèrement enfoncé dans l'obstacle plan d'une distance δn telle que : $F_n = K_n \cdot \delta n$.
Comme $F_n = mg$, on a alors $\delta n = mg / K_n$.
On a considéré une raideur de choc normale de $20\,N/m$ (raideur fictive qui n'a de sens que pour générer une force de réaction du plan sur le système), on a donc $\delta n = 0{,}5\,m$. Sachant que les deux nœuds $NO1$ et $NO2$ sont géométriquement confondus, on choisit par exemple DIST_1 = DIST_2 = $\delta n/2$.

Raideur de choc tangentielle : $K_T = 400\,000\,N/m$: elle est grande devant la raideur de l'oscillateur pour que la phase d'arrêt soit modélisée correctement.

Pas de temps utilisé pour l'intégration temporelle : $5.10^{-4}\,s$.

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2
Nombre de mailles et types : 2 POI1

6.3 Grandeurs testées et résultats

Valeurs des déplacements dans la direction de l'oscillateur pour les instants approchés de changement de signe de la vitesse sur la période de temps $(0\,;0.2\,s)$.

Identification	instants (s)	Référence
$DY = r2\cos 45$	$\pi \times 10^{-2}$	–5,010E–04
$DY = r3\cos 45$	$2\pi \times 10^{-2}$	4,010E–04
$DY = r4\cos 45$	$3\pi \times 10^{-2}$	–3,010E–04
$DY = r5\cos 45$	$4\pi \times 10^{-2}$	2,010E–04

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

La solution analytique du problème avec frottement est reproduite avec une très bonne précision ($<0.5\%$). Cela demande néanmoins l'utilisation d'un paramètre de raideur tangente assez élevé par rapport à la rigidité du système ainsi qu'un pas de temps d'intégration relativement réduit.
Sur cet exemple, le calcul non linéaire direct est beaucoup plus coûteux en temps de calcul que celui sur base modale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)