TTNL02 - Transitoire thermique avec changement de phase

Résumé :

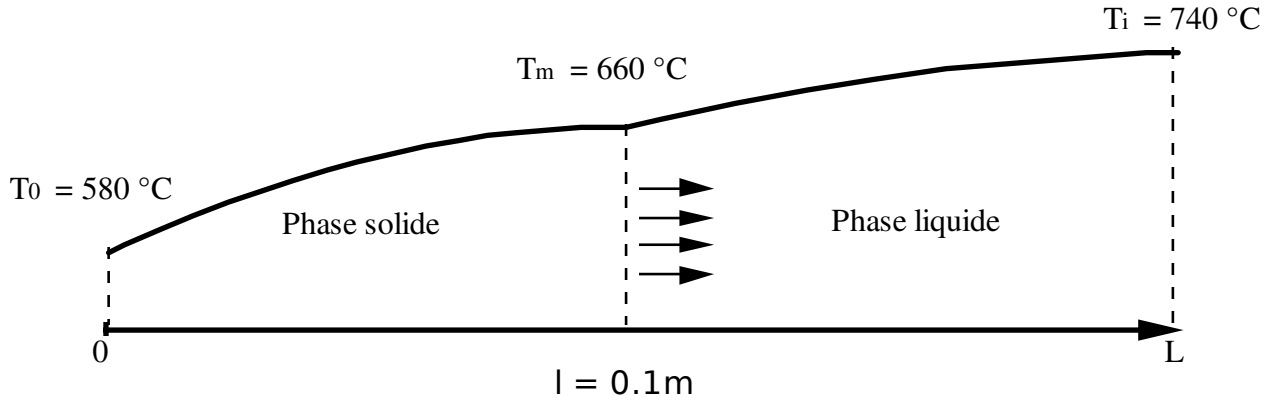
Ce test élémentaire permet de traiter un problème unidirectionnel en thermique transitoire non-linéaire et de vérifier la prise en compte d'un changement de phase liquide/solide par *Code_Aster* en introduisant par l'intermédiaire de l'enthalpie volumique la chaleur latente de fusion. La solution est analytique et fait intervenir les fonctions d'erreur erf et $erfc$. Le problème est traité dans les cas plan et volumique.

Pour les modélisations présentées ici, les écarts des résultats obtenus par *Code_Aster* se situent entre 1 et 4% de la référence calculée analytiquement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés de matériaux

Ce sont les caractéristiques de l'aluminium indicées par s pour la phase solide et par l pour la phase liquide. Elles sont supposées constantes au sein de chaque phase.

Masse volumique	$\rho_S = 2550\, kg/m^3$	$\rho_1 = 2390\, kg/m^3$
Chaleur volumique	$c_S = 3.10^6\, J/m^3 °C$	$c_1 = 2.58\,10^6\, J/m^3 °C$
Conductivité thermique	$k_S = 210\, W/m °C$	$k_1 = 95\, W/m °C$
Chaleur latente de fusion	$L = 437.44\,10^{-3}\, J.kg$	
Température de fusion	$T_m = 660. °C$	
Variation d'enthalpie volumique	$\Delta H = 1.08048\,10^9\, J/m^3$	

1.3 Conditions aux limites et chargements

Température imposée aux extrémités.

$$T_0 = 580 °C \text{ en } x = 0$$
$$T_i = 740 °C \text{ en } x = l$$

1.4 Conditions initiales

Température initiale uniforme

$$T_{init} = T_i = 740 °C$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On dispose d'une solution semi-analytique faisant intervenir les fonctions d'erreurs :

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \text{ et } erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$$

Cette solution est valide pour un milieu semi-infini, elle ne pourra donc être utilisée que dans un domaine de variation limité de la variable de temps.

Soit x_t la position de l'interface solide/liquide. Soient $s_t=\frac{L}{\sqrt{t_{total}}}$ et $\lambda=\frac{s_t}{2\sqrt{d_s}}$ où d_s et d_l désignent la diffusivité des milieux solide et liquide $\left(d_s=\frac{k_s}{c_s}, d_l=\frac{k_l}{c_l}\right)$. La solution de l'équation de la chaleur est de la forme :

$$T_s(x,t)=T_0+\frac{T_m-T_0}{erf(\lambda)}erf\left(\frac{x}{2\sqrt{d_s t}}\right) \text{ si } x\le x_t$$

$$T_l(x,t)=T_i+\frac{T_m-T_i}{erfc\left(\lambda\sqrt{\frac{d_s}{d_l}}\right)}erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{d_l t}}\right) \text{ si } x\ge x_t$$

La donnée de t_{total} suffit à définir la solution, on fixe donc $t_{total}=420.$

2.2 Résultats de référence

TEMPS : Abscisse	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
.000	580.	580.	580.	580.	580.	580.
.005	682.43	661.33	647.50	638.74	632.69	628.20
.010	726.05	705.75	692.06	682.43	675.24	669.63
.015	738.11	728.70	718.44	709.60	702.23	696.06
.020	739.86	737.22	731.99	726.05	720.27	714.94
.025	740.	739.50	737.56	734.47	730.81	727.00
.030	740.	739.93	739.39	738.11	736.20	733.88
.035	740.	739.99	739.88	739.45	738.61	737.40
.040	740.	740.	739.98	739.86	739.55	739.00
.045	740.	740.	740.	739.97	739.87	739.65
.050	740.	740.	740.	740.	739.97	739.89
.055	740.	740.	740.	740.	740.	739.97
.060	740.	740.	740.	740.	740.	740.
.065	740.	740.	740.	740.	740.	740.
.070	740.	740.	740.	740.	740.	740.
.075	740.	740.	740.	740.	740.	740.
.080	740.	740.	740.	740.	740.	740.
.085	740.	740.	740.	740.	740.	740.
.090	740.	740.	740.	740.	740.	740.
.095	740.	740.	740.	740.	740.	740.
.100	740.	740.	740.	740.	740.	740.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

TEMPS : Abscisse	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
.000	580.	580.	580.	580.	580.	580.
.005	624.68	621.84	619.48	617.48	615.25	614.25
.010	665.09	661.33	657.43	653.65	650.37	647.49
.015	690.83	686.33	682.43	678.99	675.95	673.22
.020	710.11	705.75	701.81	698.25	709.92	692.06
.025	723.23	719.60	716.17	712.95	720.89	707.09
.030	731.34	728.70	726.05	723.43	728.48	718.44
.035	735.89	734.18	732.34	730.43	733.42	726.53
.040	738.21	737.22	736.07	734.79	736.44	731.99
.045	739.29	738.77	738.11	737.33	738.18	735.47
.050	739.74	739.50	739.15	738.71	739.12	737.56
.055	739.91	739.81	739.65	739.42	739.60	738.75
.060	739.97	739.93	739.86	739.75	739.83	739.39
.065	739.99	739.98	739.95	739.90	739.93	739.72
.070	740.	739.99	739.98	739.96	739.97	739.88
.075	740.	740.	740.	739.99	739.99	739.95
.080	740.	740.	740.	740.	740.	739.98
.085	740.	740.	740.	740.	740.	739.99
.090	740.	740.	740.	740.	740.	740.
.095	740.	740.	740.	740.	740.	740.
.100	740.	740.	740.	740.	740.	740.

(En $^{\circ}C$, en fonction de l'abscisse en mètre et du temps en secondes).

Remarque :

On se limite aux variations pendant les 6 premières secondes, au-delà de 10 secondes la condition au limite à l'extrémité $x=1$ n'est plus assurée.

2.3 Incertitude sur la solution

Inconnue, due à l'évaluation des fonctions d'erreur.

2.4 Références bibliographiques

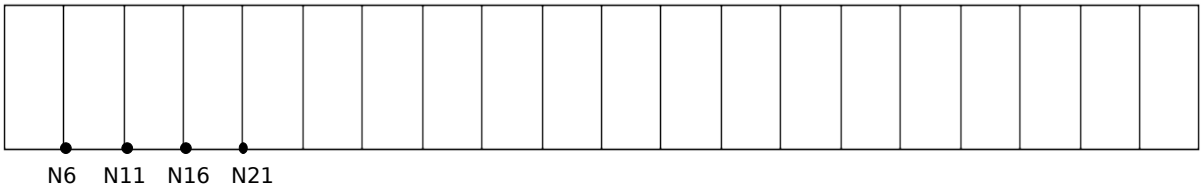
•M. Necati Özisik - Heat Conduction - Chapter 10 : Phase-change problems example 10-3 - John Wiley & Sons.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation 2D :

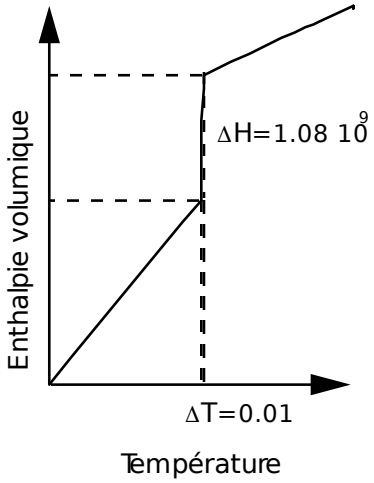


3.2 Caractéristiques du maillage

20 QUAD8

3.3 Remarque

La chaleur latente de fusion est fournie par l'intermédiaire de l'enthalpie sur un intervalle de $0.01\,°C$.



3.4 Valeurs testées

Les nœuds observés ont pour coordonnée $y=0.0$

Identification température	Référence
t = 0.5 s N6 (x = 0.005)	682.43
t = 1.0 s N6 (x = 0.005)	661.33
t = 3.0 s N6 (x = 0.005)	628.20
t = 6.0 s N6 (x = 0.005)	614.25
t = 0.5 s N11 (x = 0.010)	726.05
t = 1.0 s N11 (x = 0.010)	705.75
t = 3.0 s N11 (x = 0.010)	669.63

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

t = 6.0 s N11 (x = 0.010)	647.49
t = 0.5 s N16 (x = 0.015)	738.11
t = 1.0 s N16 (x = 0.015)	728.70
t = 3.0 s N16 (x = 0.015)	696.06
t = 6.0 s N16 (x = 0.015)	673.22
t = 0.5 s N21 (x = 0.020)	739.86
t = 1.0 s N21 (x = 0.020)	737.22
t = 3.0 s N21 (x = 0.020)	714.94
t = 6.0 s N21 (x = 0.020)	692.06

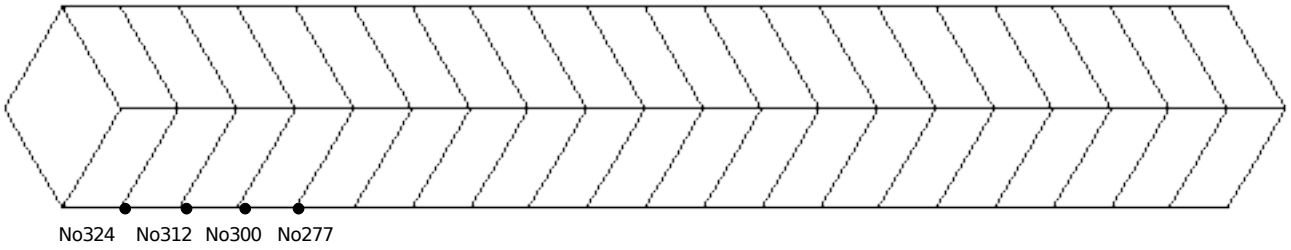
Le calcul par éléments finis nécessite une discrétisation en temps de $\Delta t = 5.10^{-4} s$ au moins pour les premiers pas. La condition au limite imposée à l'origine faisant passer brusquement la température de $740.°C$ à $580.°C$. On observe au niveau des premiers pas de temps quelques oscillations qui se stabilisent ensuite assez rapidement, malgré tout la température maximum est dépassée, il n'y a pas respect du maximum discret. Ce phénomène est observé lors des chocs thermiques, seul un traitement numérique particulier au niveau de la matrice de masse peut remédier à ce dernier.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation 3D :



4.2 Caractéristiques du maillage

20 HEXA20

4.3 Valeurs testées

Les nœuds observés ont pour coordonnées : $x=y=0.005$

Identification	Référence
Température	
t = 0.5 s No324 (z = 0.005)	682.43
t = 1.0 s No324 (z = 0.005)	661.33
t = 3.0 s No324 (z = 0.005)	628.20
t = 6.0 s No324 (z = 0.005)	614.25
t = 0.5 s No312 (z = 0.010)	726.05
t = 1.0 s No312 (z = 0.010)	705.75
t = 3.0 s No312 (z = 0.010)	669.63
t = 6.0 s No312 (z = 0.010)	647.49
t = 0.5 s No300 (z = 0.015)	738.11
t = 1.0 s No300 (z = 0.015)	728.70
t = 3.0 s No300 (z = 0.015)	696.06
t = 6.0 s No300 (z = 0.015)	673.22
t = 0.5 s No277 (z = 0.020)	739.86
t = 1.0 s No277 (z = 0.020)	737.22
t = 3.0 s No277 (z = 0.020)	714.94
t = 6.0 s No277 (z = 0.020)	692.06

5 Synthèses des résultats

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'erreur obtenue par rapport à la solution analytique reste raisonnable pour les points d'observation listés dans les tableaux. Signalons toutefois que le choc thermique imposé au début du transitoire provoque des oscillations (lorsqu'on observe la variation de la température en un point au cours du temps) qui s'amortissent rapidement et qui ont disparues au temps $t=0.5\,s$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)