SSLV111 - Estimateur d'erreur sur une plaque trouée en élasticité linéaire

Résumé :

Ce test valide et compare les 2 versions de l'estimateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz (version 1 de 1987, notée $ZZ1$, et version 2 de 1992, notée $ZZ2$) appliquées au système de l'élasticité linéaire, en statique.

Il comporte 5 modélisations en contraintes planes, correspondant chacune à un type d'élément fini (TRIA3, QUAD4, TRIA6, QUAD8, QUAD9).
La solution analytique est connue et permet de comparer les erreurs estimées avec l'erreur exacte.

Ce test valide également la version 1 de l'estimateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz appliquée sur 2 modélisations en 3D. La première modélisation comporte les éléments finis HEXA8, PYRAM5 et TETRA4 et la deuxième, des éléments finis PENTA6. La solution ne dépend pas de la valeur suivant l'axe z. Les résultats sont donc comparés aux valeurs analytiques utilisées en 2D.

L'intérêt du test réside :

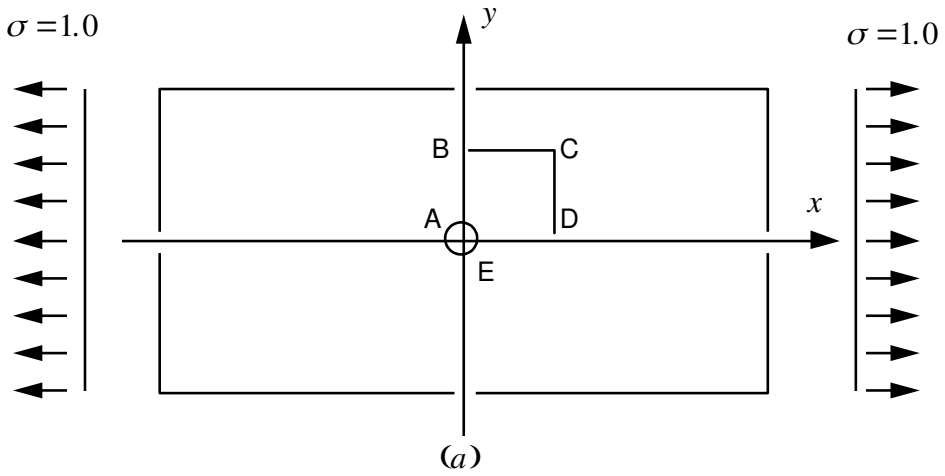
- dans la comparaison entre les contraintes lissées avec $ZZ1$ (lissage global continu) et $ZZ2$ (lissage local à des patchs d'éléments),
- dans la comparaison des estimateurs entre eux,
- dans l'analyse qualitative et quantitative des résultats (erreurs relatives globale et locale)
- dans la validation de l'estimateur en lissage de Zhu-Zienkiewicz version 1 au 3D.

Le test met en évidence le bon comportement de $ZZ2$ sur tous les types d'éléments et les mauvais résultats de $ZZ1$ sur des éléments quadratiques lorsque la solution ne présente pas de forte singularité, ce qui est le cas.

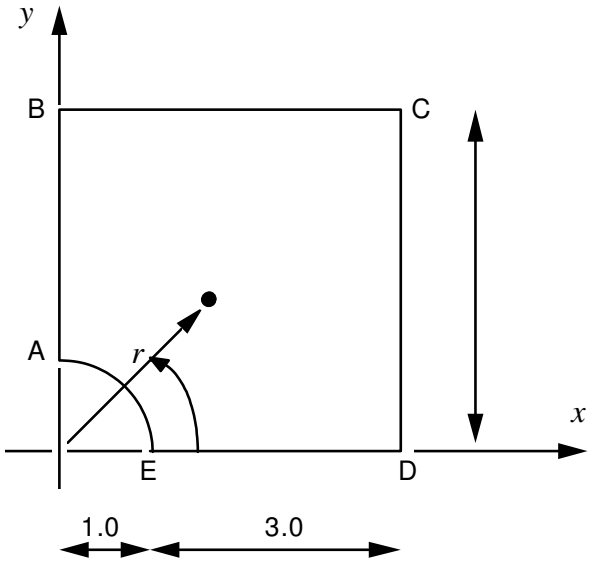
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



(a)



(h)

1.2 Propriétés de matériaux

$E = 1\ 000\ MPa$

$\nu = 0.3$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargements

Sur AB , $u_X = 0$

Sur ED , $u_y = 0$

Sur CD tractions $\begin{cases} F_x = \sigma_{xx}(x = 4.) \\ F_y = \sigma_{xy}(x = 4.) \end{cases}$

Sur BC tractions $\begin{cases} F_x = \sigma_{xy}(y = 4.) \\ F_y = \sigma_{yy}(y = 4.) \end{cases}$

Selon la solution analytique [2].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On considère une portion d'une plaque infinie avec un trou central circulaire, soumise à un chargement unitaire unidirectionnel dans la direction $Ox\ \sigma = 1\ e_x \otimes e_x$.

La solution analytique de ce problème est [bib1] :

$$\sigma_{xx} = 1 - \frac{a^2}{r^2}\left[\frac{3}{2}\cos\theta + \cos(4\theta)\right] + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\cos(4\theta)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{a^2}{r^2}\left[\frac{1}{2}\cos(2\theta) - \cos(4\theta)\right] - \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\cos(4\theta)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{a^2}{r^2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta) + \sin(4\theta)\right] + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\sin(4\theta)$$

où :

- a est le rayon du trou,
- (r, θ) les coordonnées polaires.

2.2 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

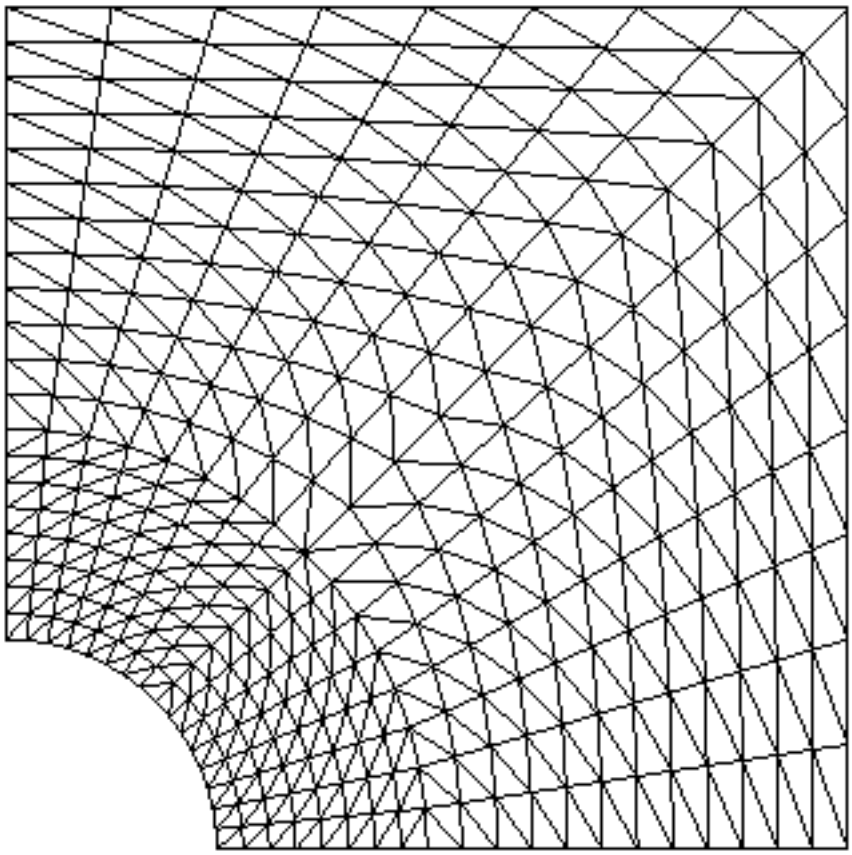
2.3 Références bibliographiques

1) Zhu-Zienkiewicz : The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates - Part 1 : the recovery technique (Int. J. for Num. Methods in Engineering vol. 33, p. 1355 (mai 1992)).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 357.

Nombre de mailles et types : 640 TRIA3.

3.3 Valeurs testées

	Identification	Référence	*Aster*	% différence	tolérance
A	σ_{xx} ZZ1	3.	2.823	–5.91	0.1
	σ_{xx} ZZ2	3.	2.884	–3.85	0.1
	σ_{yy} ZZ1	0.	0.261	-	0.3
	σ_{yy} ZZ2	0.	0.207	-	0.3
	σ_{xy} ZZ1	0.	$-7.4\ 10^{-3}$	-	0.1
	σ_{xy} ZZ2	0.	$-6.1\ 10^{-2}$	-	0.1
P	σ_{xx} ZZ1	1.15625	1.152	–0.37	0.1
	σ_{xx} ZZ2	1.15625	1.145	–0.98	0.1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

	σ_{yy} ZZ1	–0.15625	–0.150	–3.81	0.1
	σ_{yy} ZZ2	–0.15625	–0.145	–7.00	0.1
	σ_{xy} ZZ1	–0.125	–0.117	–6.11	0.1
	σ_{xy} ZZ2	–0.125	–0.124	–0.68	0.1
Maille M1	e_{abs} ZZ1		$1.33\ 10^{-4}$		1.10^{-3}
	e_{abs} ZZ2		$8.13\ 10^{-5}$		1.10^{-3}
	e_{rel} ZZ1		6.63%		0.1
	e_{rel} ZZ2		4.05%		0.1
Ω	e_{abs} ZZ1	$0.445\ 10^{-2}$	$0.424\ 10^{-2}$	–4.76	
	e_{abs} ZZ2	$0.445\ 10^{-2}$	$0.451\ 10^{-2}$	+1.31	
	e_{rel} ZZ1	3.44%	3.28%		
	e_{rel} ZZ2	3.44%	3.49%		
	θ ZZ1		0.952		
	θ ZZ2		1.013		

3.4 Remarques

$\theta = \frac{\text{erreur estimée}}{\text{erreur exacte}}$ est l'indice d'effectivité de l'estimateur.

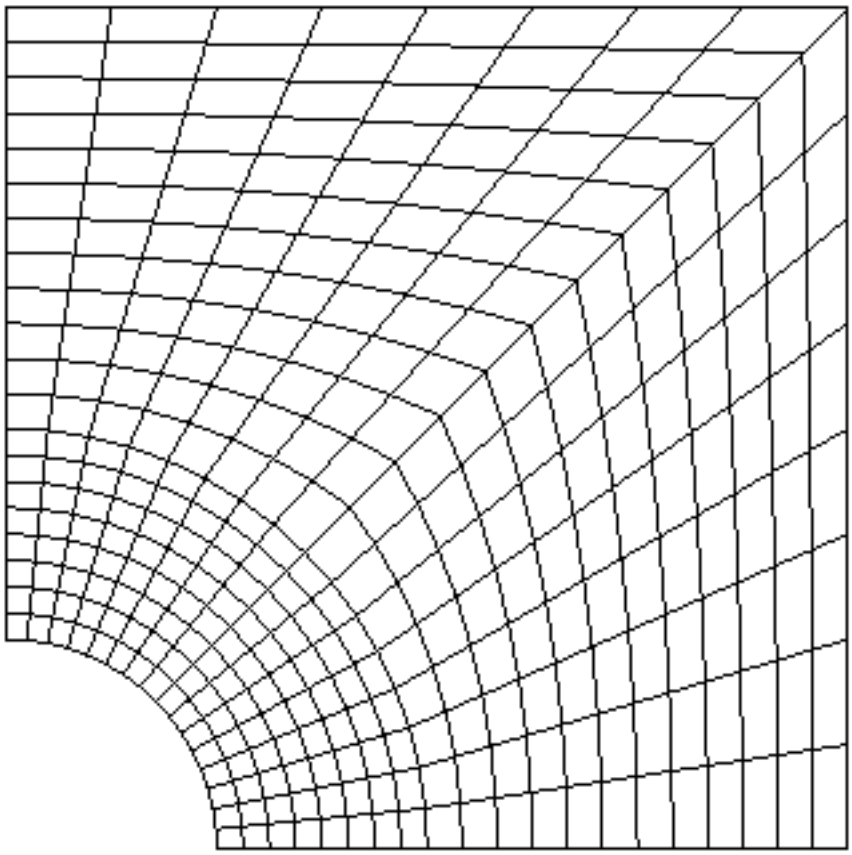
Contenu du fichiers résultats :

- erreurs absolues et relatives globales par les 2 méthodes,
- valeurs maximales et minimales des contraintes et des erreurs,
- listes des mailles où l'erreur relative est supérieure à 10%.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 357.

Nombre de mailles et types : 320 QUAD4.

4.3 Valeurs testées

Identification		Référence	*Aster*	% différence	tolérance
A	σ_{xx} ZZ1	3.	3.017	0.57	0.1
	σ_{xx} ZZ2	3.	2.971	- 0.95	0.1
	σ_{yy} ZZ1	0.	0.17	-	0.3
	σ_{yy} ZZ2	0.	0.136	-	0.3
	σ_{xy} ZZ1	0.	$2.8\ 10^{-3}$	-	0.1
	σ_{xy} ZZ2	0.	$-1.04\ 10^{-2}$	-	0.1
P	σ_{xx} ZZ1	1.15625	1.168	0.98	0.1
	σ_{xx} ZZ2	1.15625	1.153	–0.26	0.1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

	σ_{yy} ZZ1	–0.15625	–0.158	1.28	0.1
	σ_{yy} ZZ2	–0.15625	–0.152	–2.83	0.1
	σ_{xy} ZZ1	–0.125	–0.121	–2.99	0.1
	σ_{xy} ZZ2	–0.125	–0.124	–0.94	0.1
Maille M1	e_{abs} ZZ1		$1.57\ 10^{-4}$		1.10^{-3}
	e_{abs} ZZ2		$2.40\ 10^{-4}$		1.10^{-3}
	e_{rel} ZZ1		5.79%		0.1
	e_{rel} ZZ2		8.83%		0.1
Ω	e_{abs} ZZ1	$0.320\ 10^{-2}$	$0.294\ 10^{-2}$	–8.1	
	e_{abs} ZZ2	$0.320\ 10^{-2}$	$0.307\ 10^{-2}$	–4.2	
	e_{rel} ZZ1	2.48%	2.28%		
	e_{rel} ZZ2	2.48%	2.37%		
	θ ZZ1		0.919		
	θ ZZ2		0.958		

4.4 Remarques

$\theta = \frac{\text{erreur estimée}}{\text{erreur exacte}}$ est l'indice d'effectivité de l'estimateur.

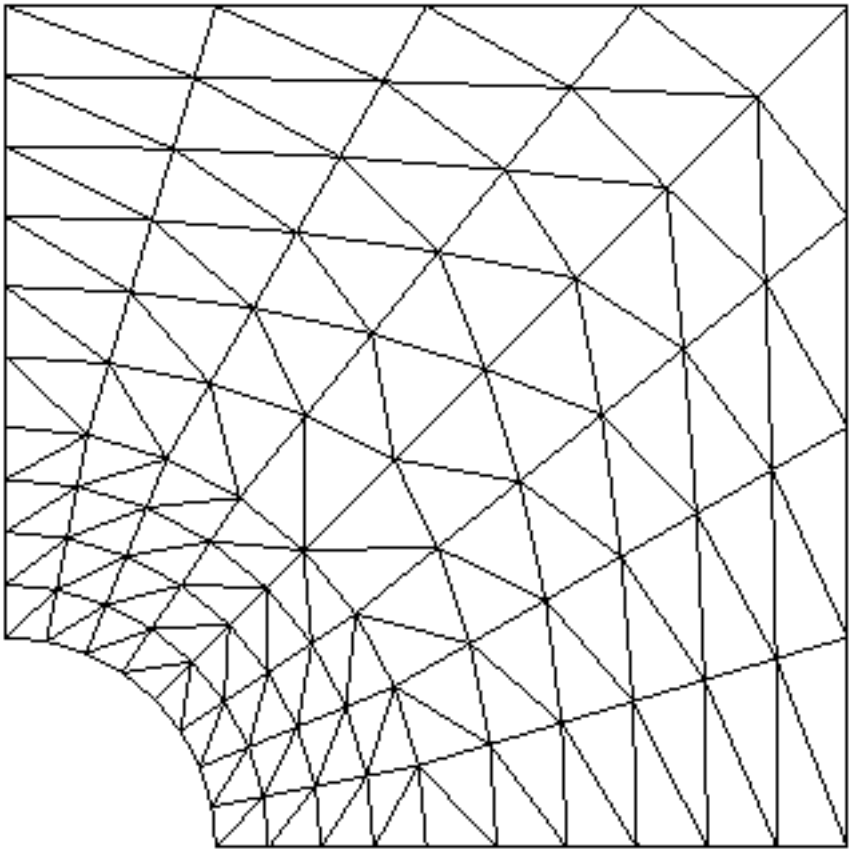
Contenu du fichiers résultats :

- erreurs absolues et relatives globales par les 2 méthodes,
- valeurs maximales et minimales des contraintes et des erreurs,
- listes des mailles où l'erreur relative est supérieure à 10%.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation



5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 357.

Nombre de mailles et types : 160 TRIA6.

5.3 Valeurs testées

	Identification	Référence	*Aster*	% différence	tolérance
A	σ_{xx} ZZ1	3.	2.975	–0.83	0.1
	σ_{xx} ZZ2	3.	2.957	–1.43	0.1
	σ_{yy} ZZ1	0.	$6.86\ 10^{-2}$	-	0.3
	σ_{yy} ZZ2	0.	$7.52\ 10^{-2}$	-	0.3
	σ_{xy} ZZ1	0.	$-3.12\ 10^{-2}$	-	0.3
	σ_{xy} ZZ2	0.	–0.155	-	0.3
P	σ_{xx} ZZ1	1.15625	1.166	0.85	0.1
	σ_{xx} ZZ2	1.15625	1.153	–0.25	0.1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

	σ_{yy} ZZ1	–0.15625	–0.167	6.92	0.1
	σ_{yy} ZZ2	–0.15625	–0.153	–1.87	0.1
	σ_{xy} ZZ1	–0.125	–0.127	1.52	0.1
	σ_{xy} ZZ2	–0.125	–0.124	–0.58	0.1
Maille M1	e_{abs} ZZ1		$1.81\ 10^{-4}$		1.10^{-3}
	e_{abs} ZZ2		$2.92\ 10^{-4}$		1.10^{-3}
	e_{rel} ZZ1		4.69%		0.1
	e_{rel} ZZ2		7.56%		0.1
Ω	e_{abs} ZZ1	$0.152\ 10^{-2}$	$0.123\ 10^{-2}$	–19	
	e_{abs} ZZ2	$0.152\ 10^{-2}$	$0.167\ 10^{-2}$	+9.9	
	e_{rel} ZZ1	1.17%	0.95%		
	e_{rel} ZZ2	1.17%	1.29%		
	θ ZZ1		0.810		
	θ ZZ2		1.099		

5.4 Remarques

$\theta = \frac{\text{erreur estimée}}{\text{erreur exacte}}$ est l'indice d'effectivité de l'estimateur.

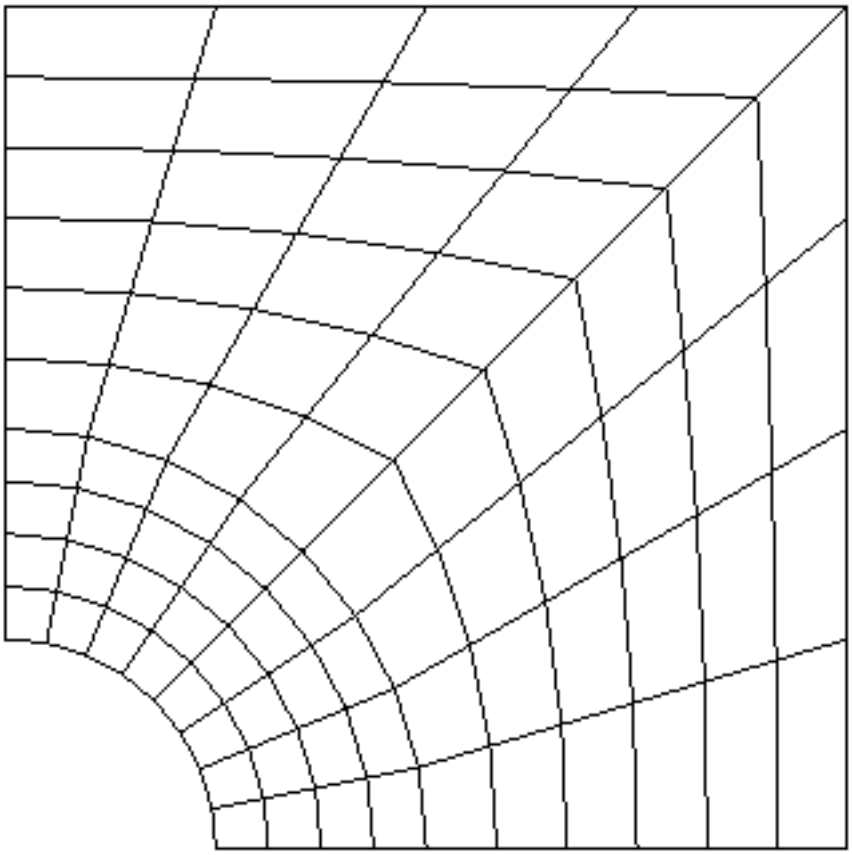
Contenu du fichiers résultats :

- erreurs absolues et relatives globales par les 2 méthodes,
- valeurs maximales et minimales des contraintes et des erreurs,
- listes des mailles où l'erreur relative est supérieure à 10%.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation



6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 277.

Nombre de mailles et types : 80 QUAD8.

6.3 Valeurs testées

	Identification	Référence	*Aster*	% différence	tolérance
A	σ_{xx} ZZ1	3.	3.063	2.11	0.1
	σ_{xx} ZZ2	3.	3.037	1.24	0.1
	σ_{yy} ZZ1	0.	0.101	-	0.3
	σ_{yy} ZZ2	0.	$2.47\ 10^{-2}$	-	0.3
	σ_{xy} ZZ1	0.	$-5.8\ 10^{-3}$	-	0.3
	σ_{xy} ZZ2	0.	$-2.41\ 10^{-2}$	-	0.3
P	σ_{xx} ZZ1	1.15625	1.170	1.19	0.1
	σ_{xx} ZZ2	1.15625	1.153	–0.29	0.1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

	σ_{yy} ZZ1	–0.15625	–0.162	3.54	0.1
	σ_{yy} ZZ2	–0.15625	–0.153	–1.87	0.1
	σ_{xy} ZZ1	–0.125	–0.124	–1.09	0.1
	σ_{xy} ZZ2	–0.125	–0.124	–0.84	0.1
Maille M1	e_{abs} ZZ1		$6.1\ 10^{-5}$		1.10^{-3}
	e_{abs} ZZ2		$2.1\ 10^{-4}$		1.10^{-3}
	e_{rel} ZZ1		1.45%		0.1
	e_{rel} ZZ2		5.01%		0.1
Ω	e_{abs} ZZ1	$9.01\ 10^{-4}$	$2.90\ 10^{-4}$	+67.9 (!)	
	e_{abs} ZZ2	$9.01\ 10^{-4}$	$8.88\ 10^{-4}$	–1.5	
	e_{rel} ZZ1	0.697%	0.22%		
	e_{rel} ZZ2	0.697%	0.687%		
	θ ZZ1		0.321		
	θ ZZ2		0.985		

6.4 Remarques

$\theta = \frac{\text{erreur estimée}}{\text{erreur exacte}}$ est l'indice d'effectivité de l'estimateur

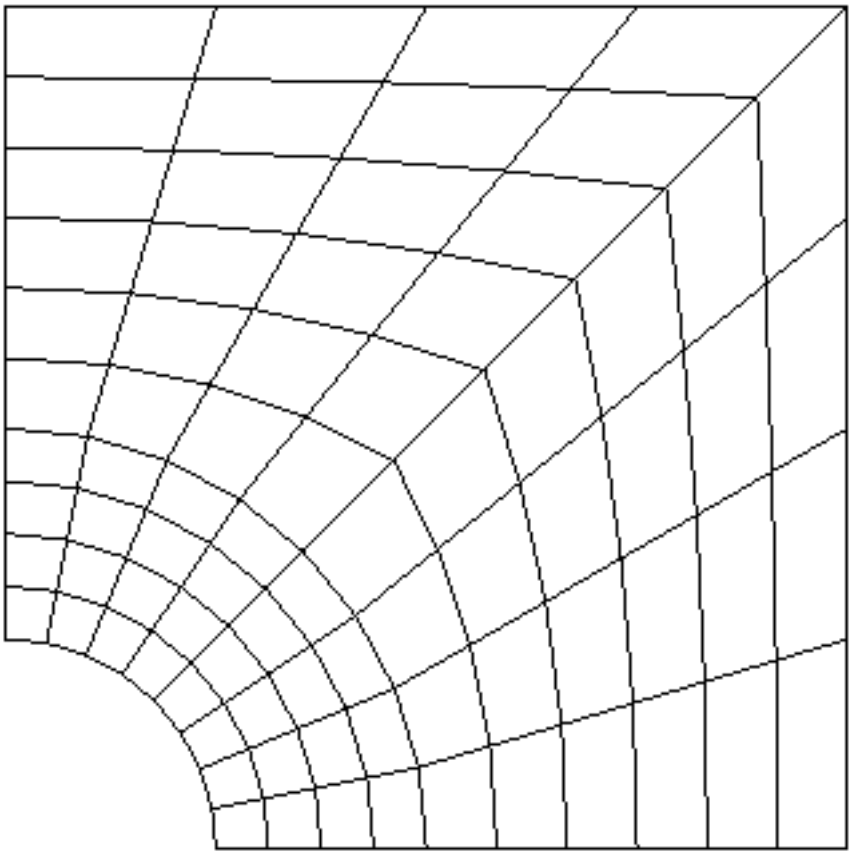
Contenu du fichiers résultats :

- erreurs absolues et relatives globales par les 2 méthodes,
- valeurs maximales et minimales des contraintes et des erreurs,
- listes des mailles où l'erreur relative est supérieure à 10%.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation



7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 357.

Nombre de mailles et types : 80 QUAD9.

7.3 Valeurs testées

	Identification	Référence	*Aster*	% différence	tolérance
A	σ_{xx} ZZ1	3.	3.070	2.33	0.1
	σ_{xx} ZZ2	3.	3.004	0.14	0.1
	σ_{yy} ZZ1	0.	0.113	-	0.3
	σ_{yy} ZZ2	0.	0.04	-	0.3
	σ_{xy} ZZ1	0.	$-1.4\ 10^{-3}$	-	0.1
	σ_{xy} ZZ2	0.	$1.89\ 10^{-2}$	-	0.1
P	σ_{xx} ZZ1	1.15625	1.170	1.19	0.1
	σ_{xx} ZZ2	1.15625	1.152	–0.33	0.1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

	σ_{yy} ZZ1	–0.15625	–0.162	3.44	0.1
	σ_{yy} ZZ2	–0.15625	–0.153	–2.11	0.1
	σ_{xy} ZZ1	– 0.125	–0.124	–1.06	0.1
	σ_{xy} ZZ2	–0.125	–0.124	–0.94	0.1
Maille M1	e_{abs} ZZ1		6.1 10^{-5}		1.10^{-3}
	e_{abs} ZZ2		2.1 10^{-4}		1.10^{-3}
	e_{rel} ZZ1		1.45%		0.1
	e_{rel} ZZ2		5.01%		0.1
Ω	e_{abs} ZZ1	8.99 10^{-4}	2.75 10^{-4}	+69.4 (!)	
	e_{abs} ZZ2	8.99 10^{-4}	8.55 10^{-4}	–4.9	
	e_{rel} ZZ1	0.695%	0.21%		
	e_{rel} ZZ2	0.695%	0.66%		
	θ ZZ1		0.306		
	θ ZZ2		0.951		

7.4 Remarques

$\theta = \frac{\text{erreur estimée}}{\text{erreur exacte}}$ est l'indice d'effectivité de l'estimateur

Contenu du fichiers résultats :

- erreurs absolues et relatives globales par les 2 méthodes,
- valeurs maximales et minimales des contraintes et des erreurs,
- listes des mailles où l'erreur relative est supérieure à 10%.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Synthèse des résultats en 2D

		TRIA3	QUAD4	TRIA6	QUAD8	QUAD9
e_{rel}	exacte	3.44%	2.48%	1.17%	0.697%	0.695%
	$ZZ1$	3.28%	2.28%	0.95%	0.22%	0.21%
	$ZZ2$	3.49%	2.37%	1.29%	0.687%	0.66%
θ	$ZZ1$	0.952	0.919	0.810	0.321	0.306
	$ZZ2$	1.013	0.958	1.099	0.985	0.951

Les contraintes aux nœuds sont, dans l'ensemble, mieux approximées avec $ZZ2$, surtout pour les éléments d'ordre 2. Si on fait tendre h vers 0, les taux de convergence avec h de $\left\|\sigma^{ex} - \sigma^{*}\right\|$ sont supérieurs par la méthode $ZZ2$ pour tous les types d'éléments à ceux de la méthode $ZZ1$ (σ^{*} est la contrainte lissée).

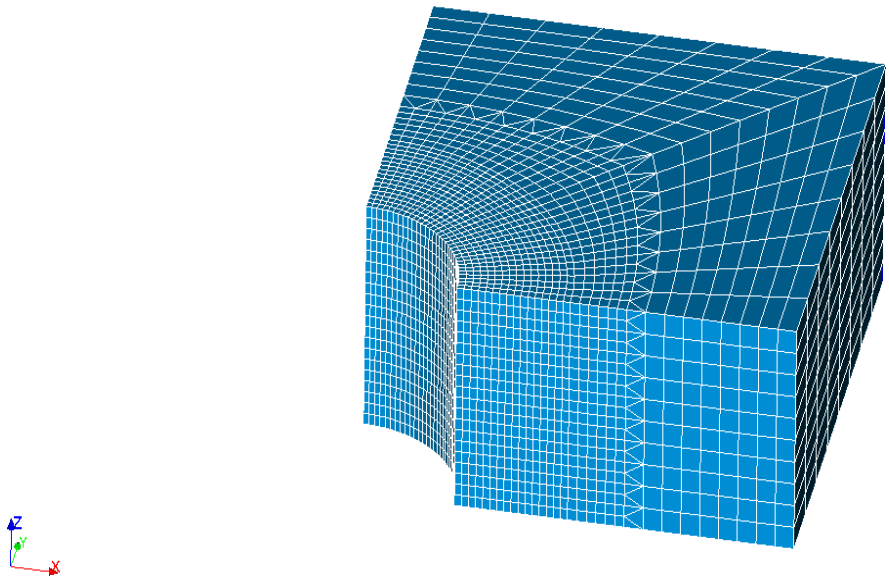
L'estimateur $ZZ1$ n'est pas fiable pour les éléments d'ordre 2, les contraintes nodales restent correctes. On peut vérifier dans ce cas particulier que $\theta \to 0$ quand $h \to 0$, ce qui montre que le lissage global continu s'avère insuffisant pour estimer l'erreur dans le cas d'une solution sans singularité (cas de ce test).

$ZZ2$ est par contre fiable et asymptotiquement exact ($\theta \to 1$ quand $h \to 0$).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Modélisation F

9.1 Caractéristiques de la modélisation



9.2 Géométrie

Les dimensions suivant les axe x et y sont les mêmes qu'en 2D. La plaque a une dimension suivant z de 2.
Les points d'observation A, P, C et E ont les mêmes x et y qu'en 2D et sont situés dans le plan z=0.

9.3 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 17622.

Nombre de mailles et types : 15360 HEXA8, 800 PYRAM5, 640 TETRA4.

9.4 Valeurs testées

Les contraintes sont testées aux points A, P, C et E.

Identification			Référence	tolérance
A	σ_{xx}	ZZ1	3.	0.06
	σ_{yy}	ZZ1	0.	0.3
	σ_{xy}	ZZ1	0.	0.1
P	σ_{xx}	ZZ1	1.15625	0.015
	σ_{yy}	ZZ1	-0.15625	0.04
	σ_{xy}	ZZ1	-0.125	0.07
C	σ_{xx}	ZZ1	1.02978	0.01
	σ_{yy}	ZZ1	-0.02978	0.045
	σ_{xy}	ZZ1	-0.01562	0.09

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

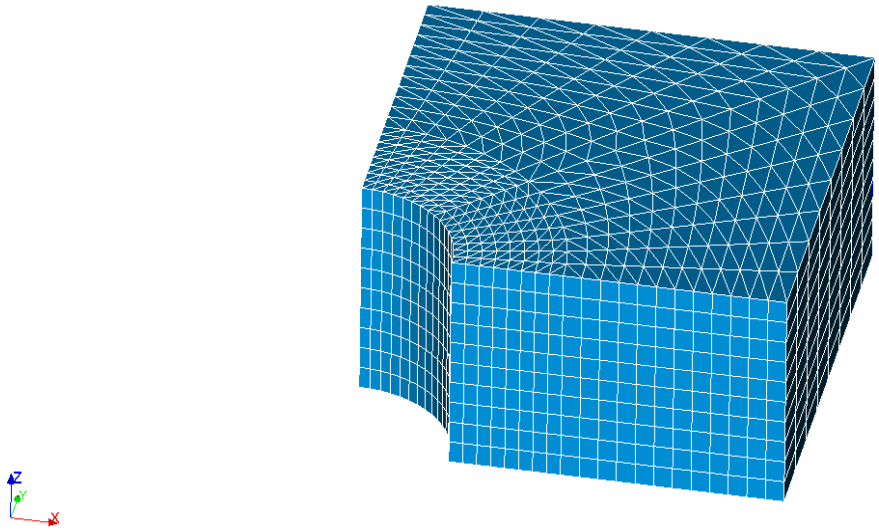
E	σ_{xx}	ZZ1	-1.0	0.15
	σ_{yy}	ZZ1	0.0	0.3
	σ_{xy}	ZZ1	0.0	0.05

Les erreurs sont testées sur la maille M6727.

Identification	Référence	tolérance
Estimateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz :		
e_{abs} aux éléments	0.0	1.10^{-3}
e_{rel} aux éléments	0.0	10
Estimateur d'erreur en mécanique :		
e_{abs} aux éléments	0.0	0.02
e_{rel} aux éléments	0.0	23.0
e_{abs} aux noeuds par élément	0.0	0.02
e_{rel} aux noeuds par élément	0.0	23.0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Modélisation G



10.1 Géométrie

Les dimensions suivant les axe x et y sont les mêmes qu'en 2D. La plaque a une dimension suivant z de 2.
Les points d'observation A, P, C et E ont les mêmes x et y qu'en 2D et sont situés dans le plan z=0.

10.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 3927.

Nombre de mailles et types : 6400 PENTA6.

10.3 Valeurs testées

Les valeurs testées sont situées dans le plan z=0.

Identification			Référence	tolérance
A	σ_{xx}	ZZ1	3.	0.06
	σ_{yy}	ZZ1	0.	0.33
	σ_{xy}	ZZ1	0.	0.1
P	σ_{xx}	ZZ1	1.15625	0.01
	σ_{yy}	ZZ1	0.15625	0.054
	σ_{xy}	ZZ1	-0.125	0.07
C	σ_{xx}	ZZ1	-0.02978	0.021
	σ_{yy}	ZZ1	1.02978	0.01
	σ_{xy}	ZZ1	-0.01562	0.095
E	σ_{xx}	ZZ1	-1.	0.15

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

σ_{yy}	ZZ1	0.0	0.3
σ_{xy}	ZZ1	0.0	0.05

Les erreurs sont testées sur la maille M2145.

Identification	Référence	tolérance
Estimateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz :		
e_{abs} aux éléments	0.0	1.10^{-3}
e_{rel} aux éléments	0.0	17.6
Estimateur d'erreur en mécanique :		
e_{abs} aux éléments	0.0	6.10^{-3}
e_{rel} aux éléments	0.0	13.5
e_{abs} aux noeuds par élément	0.0	6.10^{-3}
e_{rel} aux noeuds par élément	0.0	13.5

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)