SSLS137 - Plaque de béton précontraint avec un câble excentré en flexion

Résumé :

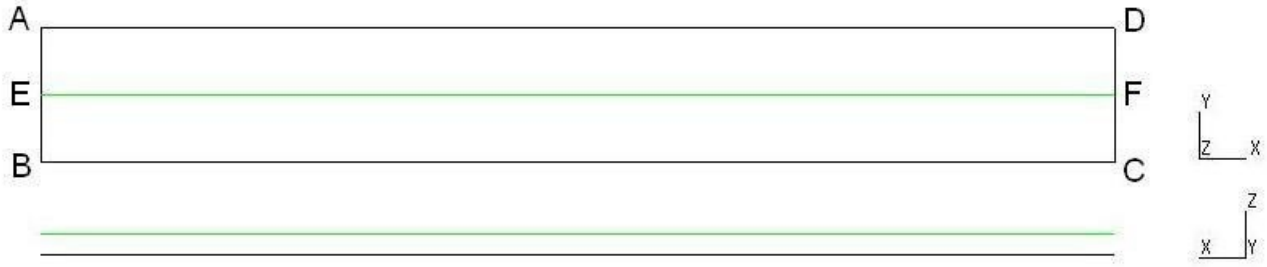
Ce test a pour but de valider la macro-commande CALC_PRECONT pour les éléments coques. La solution de référence est établie à partir de la théorie des poutres. La première modélisation est faite avec des éléments 3D et visent à valider l'utilisation de la théorie des poutres comme référence. Deux modélisations de coques sont ensuite proposées (DKT et Q4GG) ainsi que deux types de mailles différentes (TRIA3, QUAD4) pour chaque modélisation. Enfin, la modélisation F reprend la modélisation D en remplaçant la loi de comportement élastique du béton par la loi de comportement non linéaire GLRC_DAMAGE.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Description

1.1 Géométrie

Le modèle d'étude est une plaque rectangulaire de longueur $L=4\text{m}$, de largeur $l=0.5\text{m}$ et d'épaisseur $t=0.2\text{m}$. Un ferraillage de flexion composé d'une seule armature, traverse la plaque à sa moitié et est excentré d'une distance $e_z=0.075\text{m}$ du plan médian de la plaque suivant l'axe z. D'un point de vue géométrique, on ne connaît que l'aire de la section droite de la barre $A=0.00015\text{m}^2$. La figure ci-dessous illustre la position du câble pour le modèle d'étude. Le plan médian de la plaque est défini par le rectangle $ABCD$ et le câble par le segment EF.



1.2 Propriétés des matériaux

Les propriétés du béton pour la plaque et de l'acier pour le câble sont répertoriées dans le tableau suivant.

Matériau	Béton	Acier
Module d'Young	$4\times10^{10}\,Pa$	$1.93\times10^{11}\,Pa$
Coefficient de Poisson	0.0 *	0.0
Masse volumique	$2500\,kg/m^3$	$7850\,kg/m^3$
Contrainte limite élastique	n/a	$1.94\times10^{11}\,Pa$

*Il est justifié par la suite que le modèle d'étude peut être assimilé à une poutre et qu'on prendra un coefficient de Poisson pour le béton égal à 0.0.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Le côté défini par le segment AB de la plaque est encastré, tous les degrés de liberté de ce côté sont bloqués et les autres bords sont laissés libres pour lui permettre une configuration de type poutre. L'ordre d'application des chargements est défini de la manière suivante.

1.3.1 Chargement 1 :

Il correspond à la mise en tension du câble. On impose une tension dans le câble égale à $3.75\times10^5 N$, et seul le nœud F du câble situé au bord libre de la plaque est actif. Les pertes de tension par relaxation de l'acier et par recul d'ancrage sont négligées.

1.3.2 Chargement 2 :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le deuxième chargement applique une pression $P_0=10^5 Pa$, portée par l'axe $-z$, sur toute la plaque.

1.4 Étapes principales des tests

On utilise la macro-commande DEFI_CABLE_BP pour obtenir les relations cinématiques entre la plaque et le câble ainsi que le chargement lié à la tension dans le câble. Seul le nœud F du câble est considéré actif.

On lance ensuite la macro-commande CALC_PRECONT pour effectuer la mise en précontrainte de la plaque à partir de la tension du câble donnée.

La commande STAT_NON_LINE est aussi utilisée pour appliquer le chargement de pression sur la plaque. On extrait ensuite la valeur maximale du déplacement sur le bord libre de la plaque au nœud D , ceci afin de les comparer aux valeurs de référence et ainsi de valider la mise en tension des câbles de précontrainte pour les éléments coques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

Pour chaque modélisation, l'objectif est de retrouver la bonne tension initiale de précontrainte du câble après l'application de CALC_PRECONT mais aussi de déterminer le déplacement maximal de la plaque au nœud D suivant l'axe z après application de la pression.

2.1 Résultats de référence

Pour déterminer le déplacement maximal, on utilise la théorie des poutres travaillant en flexion. Pour une poutre encastrée à une extrémité et libre de l'autre sous chargement réparti, le déplacement maximal à l'extrémité libre appelé flèche, est donné par :

$$f = -\frac{qL^4}{8\mathrm{EI}}$$

q : la force répartie en N/m .

L : la longueur de la poutre en m .

E : le module de Young de la plaque, donc du béton en Pa .

$I = \frac{t^3 l}{12}$: le moment quadratique de la poutre par rapport à l'axe y en m^4 .

Pour la force de pression :

Grâce à son excentrement, le câble participe à la rigidité du modèle :

$$(EI)_{eq} = E_b \frac{t^3 l}{12} + E_a a_x l \times e_z^2$$

$a_x = \frac{A}{dx}$: est le taux de ferraillage.

$$(EI)_{eq} = 13.50\, MN.m^2$$

La flèche sous le chargement de pression se calcule ainsi :

$$f_p = \frac{-P_0 l \times L^4}{8(EI)_{eq}}$$

Alors :

$$f_p = -0.118552\mathrm{m}$$

Pour la mise en tension du câble de précontrainte :

Le câble mis en tension applique alors un effort de compression $-F_0$ et un moment fléchissant $-e_z F_0$ sur l'extrémité libre de la plaque.

Avec le principe de superposition, l'expression de la contrainte normale est :

$$\sigma_x = \frac{-F_0}{tl}\left(1 + \frac{12 e_z z}{t^2}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Si on néglige les effets du coefficient de Poisson le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{cases} u(x,y,z)=\dfrac{-F_0}{E_b tl}\left(1+\dfrac{12\,e_z z}{t^2}\right)x \\ v(x,y,z)=0 \\ w(x,y,z)=\dfrac{F_0}{E_b tl}\left(\dfrac{6\,e_z}{t^2}x^2\right) \end{cases}$$

Les déplacements sont donnés à l'extrémité libre de la poutre au nœud D, soit en $(4,0.5,0)$:

$$\begin{cases} u(x,y,z)=-0.375\text{mm} \\ v(x,y,z)=0 \\ w(x,y,z)=16.875\text{mm} \end{cases}$$

Par superposition, le déplacement maximal théorique de la plaque précontrainte sous la force de pression est de :

$$f_{tot}=f_p+w$$

$$f_{tot}=-0.101677\text{m}$$

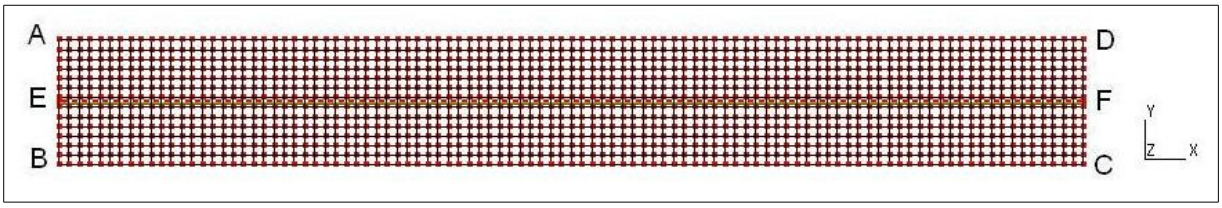
2.2 Incertitude sur la solution

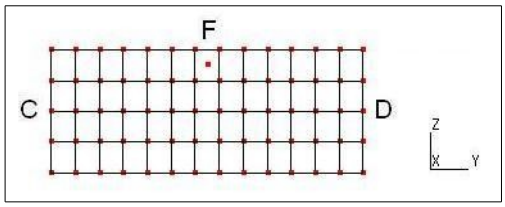
Solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation





- Modélisation : 3D
- Type d'éléments finis : Hexaèdre (HEXA8), dimension de $0.05\mathrm{m}$ pour la hauteur et de $0.04\mathrm{m}$ pour la longueur et de $0.04\mathrm{m}$ au maximum pour la largeur.

La plaque est découpée en 13 éléments sur sa largeur, en 100 sur sa longueur et en 4 sur son épaisseur.
L'armature en acier est modélisée par des éléments BARRE. Le câble est discrétisé en 101 éléments.

3.2 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur du déplacement au nœud D suivant l'axe z.

Nœud	Composante	Valeur de référence (m)	Précision
D	DZ	0,000000 -0.101677	$2.0\mathrm{E}{-2}$

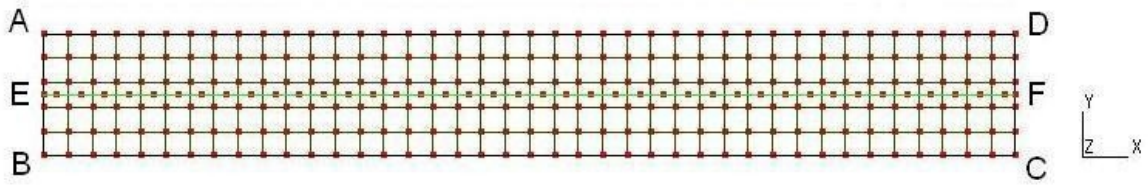
On teste aussi la tension dans plusieurs éléments du câble.

Maille	Valeur de référence (N)	Précision
M564	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}{-8}$
M562	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}{-8}$
M547	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}{-8}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



- Modélisation : DKT
- Type d'éléments finis : Quadrangle (QUAD4), dimension de $0.1\mathrm{m}$.

La plaque est alors découpée en 5 éléments sur sa largeur et en 40 sur sa longueur.
L'armature en acier est modélisée par des éléments BARRE . Le câble est discrétisé en 41 éléments étant donné que chaque nœud du câble se situe au milieu d'un élément quadrangle.

4.2 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur du déplacement au nœud D suivant l'axe z .

Nœud	Composante	Valeur de référence (m)	Précision
D	DZ	-0.101677 0,000000	$1.0\mathrm{E}-2$

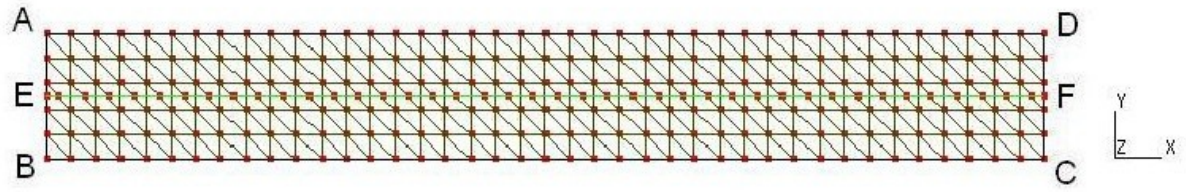
On teste aussi la tension dans plusieurs éléments du câble.

Maille	Valeur de référence (N)	Précision
M119	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}-8$
M122	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}-8$
M130	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}-8$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation



- Modélisation : DKT
- Type d'éléments finis : Triangle (TRIA3), dimension de $0.1\mathrm{m}$.

Deux éléments triangles sont créés à partir d'un élément quadrangle du modèle de la modélisation précédente.
La plaque est alors découpée en 5 éléments sur sa largeur et en 40 sur sa longueur.
L'armature en acier est modélisée par des éléments BARRE. Le câble est discrétisé en 41 éléments.

5.2 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur du déplacement au nœud D suivant l'axe z .

Nœud	Composante	Valeur de référence (m)	Précision
D	DZ	-0.101677 0,000000	$1.0\mathrm{E}-2$

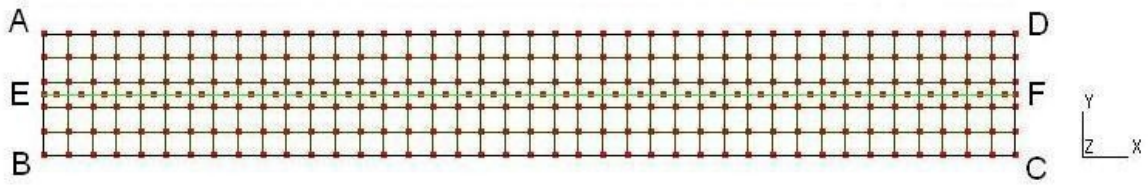
On teste aussi la tension dans plusieurs éléments du câble.

Maille	Valeur de référence (N)	Précision
M110	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}-8$
M116	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}-8$
M127	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}-8$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation



- Modélisation : Q4GG
- Type d'éléments finis : Quadrangle (QUAD4), dimension de $0.1\mathrm{m}$.

La plaque est alors découpée en 5 éléments sur sa largeur et en 40 sur sa longueur.
L'armature en acier est modélisée par des éléments BARRE. Le câble est discrétisé en 41 éléments.

6.2 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur du déplacement au nœud D suivant l'axe z .

Nœud	Composante	Valeur de référence (m)	Précision
D	DZ	0,000000 -0.101677	$1.0\mathrm{E}{-2}$

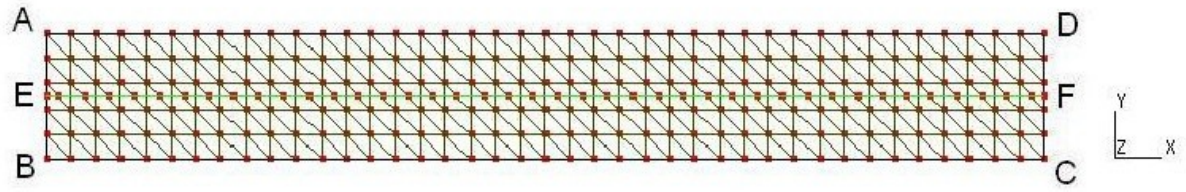
On teste aussi la tension dans plusieurs éléments du câble.

Maille	Valeur de référence (N)	Précision
M119	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}{-8}$
M122	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}{-8}$
M130	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}{-8}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation



- Modélisation : Q4GG
- Type d'éléments finis : Triangle (TRIA3), dimension de $0.1\mathrm{m}$.

Deux éléments triangles sont créés à partir d'un élément quadrangle du modèle de la modélisation précédente.
La plaque est alors découpée en 5 éléments sur sa largeur et en 40 sur sa longueur.
L'armature en acier est modélisée par des éléments BARRE. Le câble est discrétisé en 41 éléments.

7.2 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur du déplacement au nœud D suivant l'axe z .

Nœud	Composante	Valeur de référence (m)	Précision
D	DZ	0,000000 -0.101677	$1.0\mathrm{E}-2$

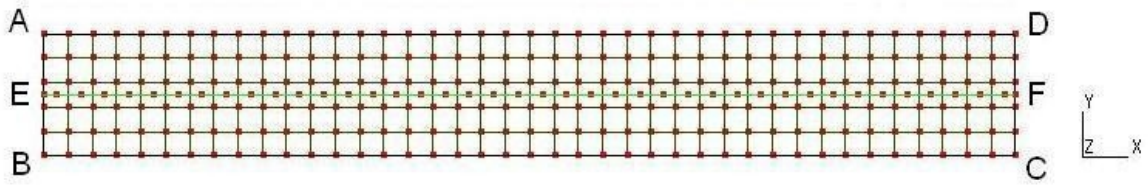
On teste aussi la tension dans plusieurs éléments du câble.

Maille	Valeur de référence (N)	Précision
M110	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}-8$
M116	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}-8$
M127	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}-8$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation



- Modélisation : Q4GG
- Type d'éléments finis : Quadrangle (QUAD4), dimension de $0.1\mathrm{m}$.

La plaque est alors découpée en 5 éléments sur sa largeur et en 40 sur sa longueur. Elle est modélisée par la loi non linéaire GLRC_DAMAGE.
Le câble en acier est modélisé par des éléments BARRE. Le câble est discrétisé en 41 éléments.

8.2 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur du déplacement au nœud D suivant l'axe z .

Nœud	Composante	Valeur de référence (m)	Précision
D	DZ	0,000000 -0.101677	$1.0\mathrm{E}{-2}$

On teste aussi la tension dans plusieurs éléments du câble.

Maille	Valeur de référence (N)	Précision
M119	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}{-8}$
M122	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}{-8}$
M130	3.75×10^{5}	$1.0\mathrm{E}{-8}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Synthèse

Les résultats obtenus avec la modélisation A correspondent bien à la solution analytique proposée à partir de la théorie des poutres . Cela valide donc le choix du modèle de poutre comme référence.

Dans les modélisations B à E (DKT et Q4GG), les valeurs des contraintes dans le câble en sortie de CALC_PRECONT sont bien celles attendues. D'autre part, les valeurs de flèche obtenues sont quasiment identiques à la solution analytique. On remarque que le pourcentage d'erreur est moins important avec la modélisation DKT pour ce cas d'étude, mais surtout que l'erreur sur la flèche est bien moindre qu'avec la modélisation 3D .

La modélisation F permet de valider que le calcul de précontrainte est correct lorsque le béton est modélisé par la loi GLRC_DAMAGE .

Ceci valide l'utilisation de la macro-commande CALC_PRECONT pour les coques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)