SSLL400 - Poutre de section variable, soumise à des efforts ponctuels ou répartis

Résumé :
Ce test est issu de la validation indépendante de la version 4 des modèles de poutres.

Ce test permet la vérification des calculs de poutres droites dans le domaine statique linéaire.(une modélisation avec des éléments de poutres POU_D_E, poutre droite d'EULER).

On calcule simultanément 3 poutres des sections différentes : section cercle, rectangle, et générale. Ces poutres sont soumises à des efforts ponctuels ou répartis.

Les valeurs testées sont les déplacements et rotations, les efforts généralisés, et les contraintes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

1.1.1 Poutre droite de section circulaire variable

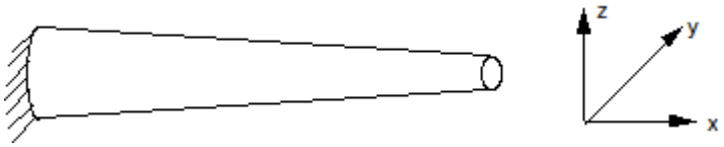


Figure 1.1.1-a : Poutre à section circulaire variable.

Longueur : $1\,m$
Rayon à l'encastrement : $0,1\,m$
Rayon à l'extrémité libre : $0,05\,m$

1.1.2 Poutre droite de section rectangulaire variable

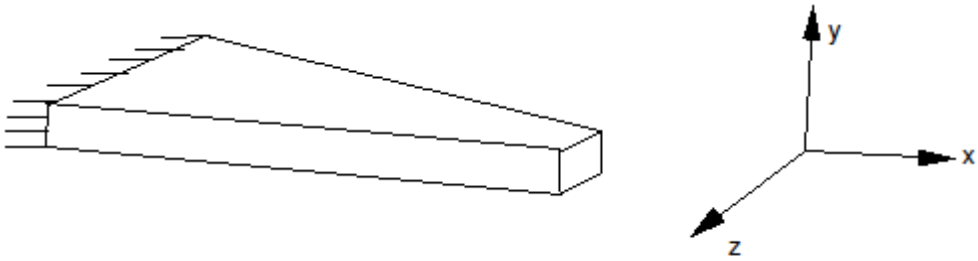


Figure 1.1.2-a : Poutre à section rectangulaire variable

Longueur : $1\,m$
à l'encastrement : $Hy=0,05\,m$ $Hz=0,10\,m$
à l'extrémité libre : $Hy=0,05\,m$ $Hz=0,05\,m$

1.1.3 Poutre droite de section générale variable

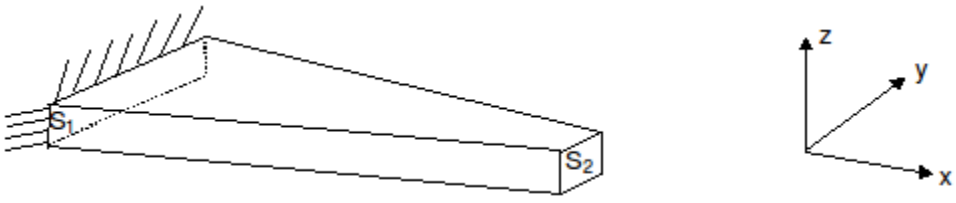


Figure 1.1.3-a : Poutre à section générale variable

Longueur : $1\,m$
à l'encastrement : $A=10^{-2}\,m^2$ $Iy=8,3333\,10^{-6}\,m^4$
à l'extrémité libre : $A=2,510^{-3}\,m^2$ $Iy=5,2083\,10^{-7}\,m^4$

1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young : $E=2.10^{11}\,Pa$
Coefficient de Poisson : $\nu=0,3$
Masse volumique : $\rho=7800\,kg.m^{-3}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargement

Condition aux limites :
Extrémité encastrée : $DX = DY = DZ = DRX = DRY = DRZ = 0$

Chargement :
Sur la poutre droite de section circulaire variable et sur la poutre droite de section rectangulaire variable, on applique successivement :

Cas de charge	Nature
1	un effort ponctuel suivant X à l'extrémité libre, $Fx = 100\,N$
2	un effort ponctuel suivant Y à l'extrémité libre, $Fy = 100\,N$
3	un moment ponctuel autour de l'axe X à l'extrémité libre, $Mx = 100\,m.N$
4	un moment ponctuel autour de l'axe Z à l'extrémité libre, $Mz = 100\,m.N$
5	une charge répartie sur l'ensemble de la poutre, $fx = 100\,N.m^{-1}$
6	une charge répartie sur l'ensemble de la poutre, $fy = 100\,N.m^{-1}$

Sur la poutre droite de section générale variable, on applique :

Cas de charge	Nature
7	un effort de pesanteur suivant z avec $g = 9,81\,m.s^{-2}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

2.1.1 Section circulaire

2.1.1.1 Poutre soumise à un effort de traction ponctuel Fx

L"équation d'équilibre est :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA(x)\frac{\partial u}{dx}\right)=0 \text{ avec } A(x)=A_1\left(1+c\frac{x}{L}\right) \text{ et } c=\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}-1,\ N(L)=F_x$$

En intégrant deux fois [R3.08.01], nous obtenons les déplacements en fonction de la force appliquée, soit :

$$u(x)=\frac{LF_x}{EA_1}\left(\frac{x}{L+cx}\right)$$

et donc à l'extrémité L de la poutre :

$$u(L)=\frac{L}{E\sqrt{A_1A_2}}F_x$$

Les efforts internes sont donnés par :

$$N(x)=EA(x)\ \frac{\partial u}{\partial x}(x)=F_x$$

et les contraintes par :

$$\sigma_{xx}=\frac{N(x)}{A(x)}$$

2.1.1.2 Poutre soumise à un effort de flexion ponctuel Fy

L"équation d'équilibre, sous l'hypothèse d'Euler, est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI_z(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=0 \text{ avec } I_z(x)=I_{z_1}\left(1+c\frac{x}{L}\right)^4 \text{ et } c=\left(\frac{I_{z_2}}{I_{z_1}}\right)^{\frac{1}{4}}-1,\ V_y(L)=F_y$$

Nous résolvons l'équation par intégration en tenant compte de la loi de comportement modifiée $MF_z=EI_z\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et l'équation d'équilibre $\frac{\partial MF_z}{\partial x}+V_y=0$

Les quatre intégrations successives, en tenant compte pour le calcul des constantes d'intégration que :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EI_z(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right](L)=-V_y(L)=-F_y$$
$$\left(EI_z(L)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)(L)=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(0)=0$$
$$v(0)=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

mènent à l'expression de :

$$v(x)=+\frac{F_y\,L^2}{6\,E\,I_{z_1}}\;\frac{x^2(3\,L\,-\,x\,+\,2\,cx)}{(L+cx)^2}$$

et à l'expression de $\theta_z(x)$

$$\theta_z(x)=+\frac{F_y L^2}{6\,E\,I_{z_1}}\;\frac{x\left(6\,L^2-3\,Lx+6\,L\,cx-cx^2+2\,c^2\,x^2\right)}{(L+cx)^3}$$

Les efforts internes sont donnés par :

$$V_y(x)=F_y$$
$$MF_z(x)=F_y(L-x)$$

et les contraintes par :

$\sigma_{xx}(x)=\left|MF_z(x)\right|\frac{R(x)}{I_z(x)}$

$\sigma_{xy}=\frac{V_y(x)}{A(x)}$ pas de coefficient de correction du cisaillement en hypothèse d'Euler.

2.1.1.3 Poutre soumise à un moment de torsion ponctuel Mx

Le mouvement est donné par l'équation :

$\frac{\partial}{\partial x}\left[G\,I_p(x)\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right]=0$ avec $I_p(x)=I_{p_1}\left(1+c\frac{x}{L}\right)^4$ et $c=\left(\frac{I_{p_2}}{I_{p_1}}\right)^{\frac{1}{4}}-1$, $M_x(L)=M_x$

Après intégration, et en tenant compte du fait que :

$$G\,I_p(L)=\frac{\partial\theta_x}{\partial x}(L)=M_x\text{, et }\theta_x(0)=0$$

nous obtenons l'expression de $\theta_x(x)$:

$$\theta_x(x)=\frac{L\,M_x}{3\,G\,I_{p_1}}\;\frac{x\,(3\,L^2+3\,L\,cx+c^2\,x^2)}{(L+cx)^3}$$

Nous devons également avoir pour les efforts internes et les contraintes :

$$M_x(x)=M_x$$
$$\sigma_{xy}(x)=\frac{M_x(x)}{I_p(x)}R_T(x)$$
$$\sigma_{xz}(x)=\frac{M_x(x)}{I_p(x)}R_T(x)$$

2.1.1.4 Poutre soumise à un moment de flexion ponctuel My

Le raisonnement pour trouver la solution analytique est le même que précédemment. Nous utilisons la loi de comportement $M_y(x)=-EI_y(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ et l'équation d'équilibre $\frac{\partial MF_y}{\partial x}-V_z=0$ Le calcul des constantes d'intégration diffère : on a $V_z(L)=0$ et $M_{F_y}(L)=M_y$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On obtient l'expression de $w(x)$:

$$w(x)=\frac{L\ M_y}{6\ E\ I_{y_1}}\ \frac{x^2(3\ L+2cx)}{(L+cx)^2},$$

et l'expression de $\theta_y(x)$:

$$\sigma_y(x)=\frac{L\,M_y}{3E\,I_{yl}}\ \frac{x\left(3L^2+3Lcx+c^2x^2\right)}{(L+cx)^3}$$

On doit également avoir pour les efforts internes et les contraintes :

$$V_z(x)=0$$
$$MF_y(x)=My$$
$$\sigma_{xx}(x)=\left|MF_y(x)\right|\ \frac{R(x)}{I_y(x)}$$

2.1.1.5 Poutre soumise à un effort de traction réparti de façon constante fx

L'équilibre est décrit par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA(x)\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)=-f_x \text{ avec } A(x)=A_1\left(1+c\frac{x}{L}\right)^2 \text{ et } c=\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{1}{2}}-1$$

En intégrant une première fois cette équation, nous obtenons:

$$E\,A(x)\frac{\partial u}{\partial x}=-f_x x+c_1$$

La condition limite $N(L)=0$ implique $c_1=f_x L$. Nous avons donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-f_x\frac{(L-x)}{E\ A(x)}$$

soit :

$$u(x)=f_x\int\frac{(L-x)}{E\ A(x)}dx+c_2$$

c_2 est déterminé pour que $u(0)=0$

Tout calcul fait, nous avons :

$$u(x)=\frac{L^2 f_x}{E\ A_1 c^2}\ \frac{c\ x+c^2x+(L+c\ x)\log\frac{L}{L+c\ x}}{L+c\ x}.$$

Les efforts internes sont déduits de la loi de comportement $N(x)=E\ A(x)\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$N(x)=f_x(L-x)$$

et les contraintes sont données par :

$$\sigma_{xx}(x)=\frac{N(x)}{A(x)}=\frac{f_x(L-x)}{\left[\sqrt{A_1}+\left(\sqrt{A_2}-\sqrt{A_1}\right)\frac{x}{L}\right]^2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.1.1.6 Poutre soumise à un effort de flexion réparti de façon constante fy

Partant de l'équation d'équilibre :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E\ I_z(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=-f_y \text{ avec } I_z(x)=I_{z_1}\left(1+c\frac{x}{L}\right)^4 \text{ et } c=\left(\frac{I_{z_2}}{I_{z_1}}\right)^{\frac{1}{4}}-1$$

nous effectuons quatre intégrations successives. La détermination des constantes d'intégration est faite à partir des conditions limites suivantes :

$$V_y(L)=0$$
$$M_z(L)=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(0)=0$$
$$v(0)=0$$

L'expression analytique pour $v(x)$ et $\theta(z)$ en présence d'un chargement réparti est, tout calcul fait :

$$v(x)=\frac{-f_y L^3}{12\,EI_{z_1}c^4(L+cx)^2}\left[\begin{array}{c}-6L^2cx+x^2\left(-9Lc^2-3Lc^4\right)+x^3\left(-2c^3+2c^4-2c^5\right)\\ +\log\left(1+c\frac{x}{L}\right)\left(6L^3+12L^2cx+6Lc^2x^2\right)\end{array}\right]$$

$$\theta_z(x)=\frac{+L^3 f_y x}{6\,EI_{z_1}(L+cx)^3}\left[3L^2-3Lx+3Lcx+x^2\left(1-c+c^2\right)\right]$$

Les efforts internes sont donnés par :

$$V_y(x)=f_y(L-x) \text{ et } Mf_z(x)=\frac{1}{2}f_y(L-x)^2$$

les contraintes par :

$$\sigma_{xy}(x)=\frac{V_y(x)}{A(x)}$$
$$\sigma_{xx}(x)=\left|Mf_z(x)\right|\frac{R(x)}{I_z(x)}$$

2.1.2 Section rectangulaire

2.1.2.1 Poutre soumise à un effort de traction ponctuel Fx

L'équation d'équilibre est :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \text{ avec } A(x)=A_1+(A_2-A_1)\frac{x}{L},\ N(L)=F_x$$

En intégrant deux fois, et en tenant compte du fait que :

$$E\ A(L)\frac{\partial u}{\partial x}(L)=F_x,\ u(0)=0$$

pour la détermination des constantes d'intégration, nous obtenons l'expression analytique de $u(x)$, soit :

$$u(x)=\frac{F_x L}{A_1 Ec}\log\left(1+c\frac{x}{L}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour les efforts internes et contraintes, nous avons :

$$N(x)=F_x$$
$$\sigma_{xx}=\frac{N(x)}{A(x)}$$

2.1.2.2 Poutre soumise à un effort de flexion ponctuel Fy

Le mouvement est donné par l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E\ I_z(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=0 \text{ avec } I_z(x)=I_{z_1}\left(1+c\frac{x}{L}\right)^3 \text{ et } c=\left(\frac{I_{z_2}}{I_{z_1}}\right)^{\frac{1}{3}}-1,\ V_y(L)=F_y$$

Le même raisonnement que pour la section circulaire mène au résultat suivant :

$$v(x)=-\frac{F_y L^2}{2E I_{z_1} c^3}\ \frac{\left[2Lcx+c^2x^2-c^3x^2+2L(L+cx)\log\left(\frac{L}{L+cx}\right)\right]}{(L+cx)}$$
$$\theta_z(x)=\frac{F_y L^2}{2EI_{z_1}}\frac{x(2L-x+cx)}{(L+cx)^2}$$

Nous devons avoir pour les efforts internes et les contraintes :

$$V_y(x)=F_y$$

$$M_{F_z}(x)=F_y(L-x)$$

$$\sigma_{xx}(x)=\frac{H_y(x)M_{F_x}(x)}{2\mathrm{I}_z(x)}$$

$$\sigma_{xy}(x)=\frac{V_y(x)}{A(x)}$$

2.1.2.3 Poutre soumise à un moment de torsion ponctuel Mx

Le mouvement est donné par l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[G\ I_p(x)\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right]=0 \text{ avec } I_p(x)=I_{p_1}\left(1+c\frac{x}{L}\right)^3 \text{ et } c=\left(\frac{I_{p_2}}{I_{p_1}}\right)^{\frac{1}{3}}-1,\ M_x(L)=M_x$$

Par le même raisonnement que la poutre à section circulaire, nous obtenons l'expression analytique de $\theta_x(x)$:

$$\theta_x(x)=\frac{L\ M_x x(2L+cx)}{2\ I_{p_1} G(L+cx)^2}$$

I_{p_1} et I_{p_2} sont calculés selon les formules données dans la documentation de référence [R3.08.01].
Les efforts internes et les contraintes sont donnés par :

$$M_x(x)=M_x$$
$$\sigma_{xy}(x)=\frac{M_x(x)}{I_p(x)}R_T(x)=\sigma_{xz}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.1.2.4 Poutre soumise à un moment de flexion ponctuel My

On reprend le même raisonnement que précédemment, on obtient les expressions analytiques suivantes pour $w(x)$ et $\theta_y(x)$:

$$w(x)=-\frac{L\ M_y x^2}{2\,EI_{y_1}(L+cx)}$$

$$\theta_y(x)=\frac{L\ M_y\, x(2\,L+cx)}{2\ E\ I_{y_1}(L+cx)^2}$$

pour les efforts :

$$V_z(x)=0$$
$$MF_y(x)=M_y$$

et pour les contraintes :

$$\sigma_{xx}(x)=\frac{H_z(x)\ \ MF_y(x)}{2\ I_y\,(x)}$$

2.1.2.5 Poutre soumise à un effort de traction réparti de façon constante Fx

L'équation d'équilibre est :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=-f_x \text{ avec } A(x)=A_1\left(1+c\frac{x}{L}\right) \text{ et } c=\left(\frac{A_2}{A_1}\right)-1\,.$$

Après deux intégrations et en tenant compte du fait que $N(L)=0$ pour déterminer la première constante d'intégration, et $u(0)=0$ pour déterminer la deuxième, nous obtenons l'expression analytique de $u(x)$:

$$u(x)=\frac{-L\,f_x}{E\ A_1\ c^2}\left[c\ x+(L+L_c)\log\left(\frac{L}{L+c\ x}\right)\right]$$

Les efforts internes sont connus par l'expression suivante :

$$N(x)=f_x(L-x)$$

et les contraintes par :

$$\sigma_{xx}(x)=\frac{f_x(L-x)}{A(x)}$$

2.1.2.6 Poutre soumise à un effort de flexion réparti de façon constante Fy

L'équation d'équilibre est :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI_z(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=-f_y \text{ avec } I_z(x)=I_{z_1}\left(1+c\frac{x}{L}\right)^3 \text{ et } c=\left(\frac{I_{z_2}}{I_{z_1}}\right)^{\frac{1}{3}}-1$$

Nous intégrons successivement quatre fois cette équation. Les constantes d'intégration sont calculées en tenant compte du fait que :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$V_y(L)=0$$
$$MF_z(L)=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(0)=0$$
$$v(0)=0$$

Le résultat analytique pour la flèche et la rotation en L est le suivant :

$$v(x)=\frac{L^3 f_y}{4\ E\ I_{z_1}\ c^4(L+c\ x)}\left[x\left(6\ Lc+4\ Lc^2\right)+x^2\left(5c^2+2c^3-c^4\right)\right]$$
$$+\left(6L^2+4L^2c+8Lcx+4Lc^2x+2c^2x^2\right)\log\left(\frac{L}{L+cx}\right)$$
$$\theta_z(x)=\frac{L^3 f_y}{4EI_{z_1}c^3(L+cx)^2}\left[x\left(2Lc+2Lc^3\right)+x^2\left(3c^2+2c^3-c^4\right)\right]$$
$$+\left(2L^2+Lcx+2c^2\ x^2\right)\log\left(\frac{L}{L+cx}\right)$$

Les efforts internes sont donnés par les expressions suivantes :

$$V_y(x)=f_y(L-x)\ ,\ Mf_z(x)=\frac{1}{2}f_y(L-x)^2$$

les contraintes par :

$$\sigma_{xy}(x)=\frac{V_y(x)}{A(x)}$$
$$\sigma_{xx}(x)=\left|\frac{Mf_z(x)h_y}{I_z(x)2}\right|$$

2.1.3 Section générale

2.1.3.1 Poutre soumise aux forces de pesanteur

Les efforts de pesanteur sont appliqués suivant l'axe z. Le mouvement de la poutre induit par ces efforts est donc un mouvement de flexion dans le plan $(x\,o\,z)$.
L'équation d'équilibre est donnée par l'expression :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E\ I_y(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=\underbrace{\rho\,A(x)\ g}_{poids\ linéique}$$

avec $A(x)=A_1\left(1+c\frac{x}{L}\right)^2$, $c=\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{1}{2}}-1$ et $I_y(x)=I_{y1}\left(1+d\frac{x}{L}\right)^4$ $d=\left(\frac{I_{y2}}{I_{y1}}\right)^{\frac{1}{4}}-1$

En intégrant une première fois, nous obtenons l'effort tranchant interne :

$$V_z(x)=-\int \rho\ A(x)\ g\ dx+C_1$$

C_1 est déterminé de façon à ce que $V_z(L)=0$.

Nous obtenons :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$V_z(x)=\frac{L A_1 \rho g}{3c}\left[-\left(1+c\frac{x}{L}\right)^3+(1+c)^3\right].$$

En intégrant une deuxième fois, nous obtenons le moment de flexion interne :

$$M_y(x)=\int V_z(x)\,dx+c_2$$

C_2 est calculé afin que $M_y(L)=0$

Nous obtenons :

$$M_y(x)=\frac{A_1 \rho g}{12 L^2}(L-x)^2\left(6L^2+8L^2c+3L^2c^2+4Lcx+2Lcx+\frac{2Lc^2x}{+c^2x^2}\right)$$

Nous calculons ensuite la rotation à partir de la loi de comportement $M_y(x)=E I_y(x)\frac{\partial \theta_y}{\partial x}$

Nous avons donc $\theta_y(x)=\int \frac{M_y(x)}{E I_y(x)}dx+C_3$ avec $\theta_y(0)=0$

La flèche $w(x)$ est déterminée à partir de la relation d'Euler : $\theta_y=-\frac{\partial w}{\partial x}$

Nous calculons $w(x)$ par intégration de $\theta_y(x)$: $w(x)=-\int \theta_y(x)+C_4$

avec C_4 telle que $w(0)=0$.

Les expressions analytiques de $\theta_y(x)$ et $w(x)$ ne sont pas retranscrites ici car elles sont beaucoup trop lourdes. Elles ont été calculées, comme les précédentes, par le logiciel de calcul formel MATHEMATICA.

2.2 Résultats de référence

- Déplacements et rotations à l'extrémité libre
- Efforts intérieurs aux deux extrémités
- Contraintes aux deux extrémités

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

[1] Rapport n° 2314/A de l'Institut Aérotechnique « Proposition et réalisation de nouveaux cas tests manquant à la validation des poutres ASTER »

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé de 10 éléments poutre droite d'Euler.

Section S1 : section circulaire variable
à l'encastrement, $R1 = 0.1\,m$ (section pleine)
à l'extrémité libre, $R2 = 0.05\,m$ (section pleine)

Section S2 : section rectangulaire variable
à l'encastrement, $H_{y1} = 0.05\,m$ $H_{z1} = 0.10\,m$
à l'extrémité libre, $H_{y2} = 0.05\,m$ $H_{z2} = 0.05\,m$

Section S3 : section générale variable
à l'encastrement, $A_1 = 10^2\,m^4$ $I_{y1} = 8.3333\,10^6\,m^4$
à l'extrémité libre, $A_2 = 2.5\,10^3\,m^2$ $I_{y2} = 5.20833\,10^7\,m^4$

3.2 Caractéristiques du maillage

3 sections $\times$ 10 éléments POU_D_E

3.3 Grandeurs testées et résultats

Cas de charge	Section	Identification	Référence	Tolérance %
1	$S1$	$u(l)$	3.1831E–08	1.00E-05
		$n(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$n(l)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(0)$	3.1831E+03	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(l)$	1.2732E+04	1.00E-05
2	$S1$	$v(l)$	4.2441E–06	1.00E-05
		$\theta_z(l)$	8.4882E–06	1.00E-05
		$v_y(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$v_y(l)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$mf_z(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$mf_z(l)$	0.0000E+00	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(0)$	1.2732E+05	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(l)$	0.0000E+00	1.00E-05
3	$S1$	$\theta_x(l)$	3.8621E–05	1.00E-05
		$m_x(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$m_x(l)$	1.0000E+02	1.00E-05
4	$S1$	$w(l)$	–8.4882E–06	1.00E-05
		$\theta_y(l)$	2.9708E–05	1.00E-05
		$v_z(0)$	0.0000E+00	1.00E-05
		$v_z(l)$	0.0000E+00	1.00E-05
		$mf_y(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$mf_y(l)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(0)$	1.2732E+05	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(l)$	1.0185E+06	1.00E-05

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5	*S1*	$u(l)$	1.2296E–08	1.00E-02
		$n(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$n(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
		$\sigma_{xx}(0)$	3.1831E+03	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
6	*S1*	$v(l)$	1.3486E–06	1.00E-02
		$\theta_z(l)$	2.1220E–06	1.00E-02 (absolu)
		$v_y(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$v_y(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
		$mf_z(0)$	5.0000E+01	1.00E-02
		$mf_z(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
		$\sigma_{xx}(0)$	6.3662E+04	1.00E-05
		$\sigma_{xy}(0)$	3.1831E+03	1.00E-05

Cas de charge	Section	Identification	Référence	Ecart %
1	*S2*	$u(l)$	1.3862E–07	1.00E-05
		$n(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$n(l)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(0)$	2.0000E+04	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(l)$	4.0000E+04	1.00E-05
2	*S2*	$v(l)$	1.8969E–04	2.30E-02
		$\theta_z(l)$	3.0238E–04	2.70E-02
		$v_y(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$v_y(l)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$mf_z(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$mf_z(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
		$\sigma_{xx}(0)$	2.4000E+06	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
		$\sigma_{xy}(0)$	2.0000E+04	1.00E-05
		$\sigma_{xy}(l)$	4.0000E+04	1.00E-05
3	*S2*	$\theta_x(l)$	8.3506E–04	5.70E-02
		$m_x(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$m_x(l)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$\sigma_{xy}(0)$	1.5600E+06	1.00E-05
		$\sigma_{xy}(l)$	4.0371E+06	5.00E-02
		$\sigma_{xz}(0)$	1.5600E+06	1.00E-05
		$\sigma_{xz}(l)$	4.0371E+06	5.00E-02
4	*S2*	$w(l)$	–1.2000E–04	3.00E-03
		$\theta_y(l)$	3.600E–04	4.00E-03
		$v_z(0)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
		$v_z(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
		$mf_y(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$mf_y(l)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(0)$	1.2000E+06	1.00E-05

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

		$\sigma_{xx}(l)$	4.8000E+06	1.00E-05
5	*S2*	$u(l)$	6.1370E–08	1.00E-05
		$n(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$n(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
		$\sigma_{xx}(0)$	2.0000E+04	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(l/2)$	1.3333E+04	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
6	*S2*	$v(l)$	6.8626E–05	2.00E-02
		$\theta_z(l)$	9.4847E–05	2.40E-02
		$v_y(0)$	1.0000E+02	1.00E-05
		$v_y(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
		$mf_z(0)$	5.0000E+01	1.00E-02
		$mf_z(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
		$\sigma_{xx}(0)$	1.2000E+06	1.00E-05
		$\sigma_{xx}(l)$	0.0000E+00	1.00E-03 (absolu)
7	*S3*	$w(l)$	–3.8259E–05	1.00E-02
		$\theta_y(l)$	5.7388E–05	1.00E-02
		$v_z(0)$	–4.4633E+02	1.00E-03
		$mf_y(0)$	1.7535E+02	1.00E-02

3.4 Remarques

La modélisation étant faite en poutres d'Euler, les coefficients de cisaillement sont $ky = kz = 1$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus confirment que les éléments POU_D_E avec section variable présentent un bon degré de fiabilité.
Pour la section circulaire, les résultats sont tous exacts aux nœuds (on retrouve les propriétés de l'élément à section constante) sauf pour les efforts répartis où l'effet de la finesse de discrétisation se fait sentir.
Pour une section rectangulaire et une section générale, il faut discrétiser finement pour avoir une solution correcte.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)