SSLL117 – Validation des modélisations second gradient

Résumé :

Ce test permet de valider les modélisations second gradient [R5.04.03] en s'appuyant sur des solutions analytiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

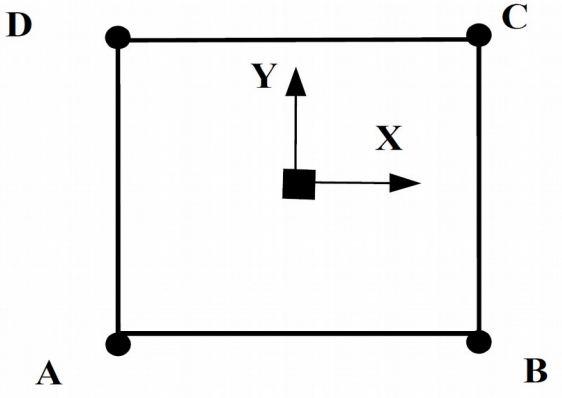


Figure 1.1-a

Coordonnées des points	X	Y
A	-1.0	-1.0
B	1.0	-1.0
C	1.0	1.0
D	-1.0	1.0

La géométrie de la structure est un carré de longueur de coté $1\mathrm{m}$.

L'essai est effectué sur un seul élément fini isoparamétrique de forme quadratique, groupe de mailles nommé ROCHE . Les différents côtés de ce carré, utiles pour cette modélisation, sont des groupes de mailles, DA et BC . Le groupe de mailles ROCHE , contient par ailleurs les groupes de mailles SROCHE et MROCHE ; qui correspondent respectivement aux nœuds sommets et milieux de ce même groupe.

1.2 Propriétés des matériaux

Dans le contexte des milieux du second gradient, il est nécessaire de définir des propriétés matériaux pour les parties rattachées aux premier et second gradients du champ de déplacement. Les propriétés du matériau sont élastiques pour ces deux parties :

- Module d'Young: $\mathrm{E}=1000\,\mathrm{Pa}$;
- Coefficient de Poisson: $\nu=0$;
- Module de rigidité microscopique: $a_1=10\,\mathrm{Pa.m}^2$.
- Paramètre de pénalisation: $r=1\mathrm{E}8$
- Paramètres matériau des milieux du second gradient: $a_2=a_3=a_4=a_5=0\,\mathrm{Pa.m}^2$

1.3 Conditions aux limites et chargements

- $Dy=0$ partout (La modélisation se ramène dans le cas $1\mathrm{D}$)
- $Dx=0$ sur le segment BC
- $Dx=0.1\mathrm{m}$ sur le segment AD

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

Le problème à résoudre est :

$$\int_\Omega \sigma\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}\right)+\sum\left(\frac{\partial \vec{\nu}}{\partial x}\right)-\lambda\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}-\vec{\nu}\right)+\vec{\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\right)+r\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\right)\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}-\vec{\nu}\right)=0$$

avec $\forall u^*,\nu^*,\lambda^*$ cinématiquement admissibles.

Nous avons:

$$\begin{cases}\sigma=E\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \Sigma=F\dfrac{\partial \nu}{\partial x}\end{cases}$$

Notons ω les fonctions de forme du second ordre et N les fonctions de forme du premier ordre sur les éléments linéaires,

Rappelons par la même occasion les définitions de SEG2 et SEG3:

SEG2 : segment à 2 nœuds
nombre de nœuds : 2
nombre de nœuds sommets : 2



Figure 2.1-a

SEG3 : segment à 3 nœuds
nombre de nœuds : 3
nombre de nœuds sommets : 2

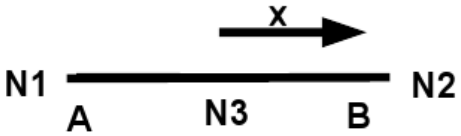


Figure 2.1-b

$N_1=\dfrac{1-x}{2}$ et $N_2=\dfrac{1+x}{2}$ sur l'élément de référence $x\in[-1,+1]$ avec N_1 la fonction de forme au premier nœud.

Les fonctions de forme du segment aux 3 nœuds sont alors:

$\omega_1=-\dfrac{x(1-x)}{2}$ $\omega_2=\dfrac{x(1+x)}{2}$ et $\omega_3=1-x^2$

En posant $u^*=\nu^*=0$ nous montrons que :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\int_{-1}^{+1} \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \nu \right) dx = 0 \text{ or } u = \omega_1 . u_1 + \omega_2 . u_2 + \omega_3 . u_3 \text{ avec } u_2 = 0 \text{ (C.L.)}$$

d'où $\frac{\partial u}{\partial x} = (x - \frac{1}{2}) u_1 - 2 x u_3$ et $v = N_1 . \nu_1 + N_2 . \nu_2$ avec $\nu_2 = 0$ (C.L.)

Nous avons donc $\nu = \frac{(1-x)}{2} \nu_1$ or, il est à noter après intégration que : $\boxed{\nu_1 = -u_1}$(1) $\forall u^*, \nu^*, \lambda^*$ cinématiquement admissibles.

En procédant de la même façon et en posant : $\nu^* = \lambda^* = 0$ nous trouvons que :

$$\boxed{u_3 = \frac{2(E-r)}{4(E+r)} . u_1 \approx -\frac{u_1}{4}} \text{(2)}$$

d'où la formule générale $S_1 = 3.a^1 . \frac{\partial \nu}{\partial x} = -\frac{3}{2} . a^1 . \nu_1$ et après simplification $S_1 = \frac{3}{2} . a^1 . u_1$.

2.2 Grandeurs et résultats de référence

La formule fondamentale et très générale pour le solide est $S_1 = \frac{3}{2} . a^1 . u_1$.

2.3 Incertitudes sur la solution

Solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Les caractéristiques sont identiques à la solution de référence. La modélisation portant sur le premier gradient du champ de déplacement est D_PLAN_SI et celle portant sur le second gradient de dilatation est D_PLAN_DIL avec le choix d'interpolation P2-P1-P0.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le groupe de mailles ROCHE_REG est obtenu par duplication du groupe de mailles nommé ROCHE, dont l'objectif est d'accueillir la modélisation second gradient de dilatation pour la régularisation.

Nombre de nœuds 8
Nombre de SEG3 4
Nombre de QUAD8 2
Nombre de groupe de mailles 6

3.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur testée	Instant	Nœud	Référence	Critère	Aster	Tolérance
Déplacement GONF	1.0	*N1*	'NON_REGRESSION'	RELATIF	-0,10	0.010
Déplacement DX	1.0	*N5*	'NON_REGRESSION'	RELATIF	0,0250	0.010
Force de réaction SIG1	1.0		'NON_REGRESSION'	RELATIF	1,5	0.010
Force de réaction DEPV	1.0		'NON_REGRESSION'	ABSOLU	1.E-6	1.0E-04

3.4 Remarques

Dans le but de valider l'option de résolution RIGI_MECA_ELAS de STAT_NON_LINE, un calcul identique au premier (option MATRICE=TANGENTE) est réalisé en imposant cette option de résolution. Les résultats sont rigoureusement identiques à ceux obtenus avec la première option de calcul qui sont présentés dans le tableau de résultats ci-dessus.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans le cas présent, les paramètres matériaux issus des commandes des tests de non régression générés avec le code source sont identiques dans les deux modélisations A et B, seul diffère le maillage quadratique. L'objectif de cette modélisation est d'avoir une validation sur une structure maillée, la solution analytique étant difficile à obtenir et par conséquent la solution en non-régression, est ici privilégiée.
La modélisation portant sur le premier gradient du champ de déplacement est D_PLAN_SI et celle portant sur le second gradient de dilatation est D_PLAN_DIL avec le choix d'interpolation P2-P1-P0.

4.2 Caractéristiques du maillage

Le groupe de mailles ROCHE_REG est obtenu par duplication du groupe de mailles nommé ROCHE, dont l'objectif est d'accueillir la modélisation second gradient de dilatation pour la régularisation.

Nombre de nœuds	341
Nombre de SEG3	40
Nombre de QUAD8	200
Nombre de groupe de mailles	6

4.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur testée	Instant	Nœud	Type	Critère	Aster	Tolérance
Déplacement GONF	1.0	*N1*	'NON-REGRESSION'	RELATIF	-0.05500	1.0
Déplacement DX	1.0	*N5*	'NON-REGRESSION'	RELATIF	0.09450	1.0
Force de réaction DEPV	1.0		'NON-REGRESSION'	ABSOLU	1.E-6	1.0E-04

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation est identique à la modélisation A. La modélisation portant sur le premier gradient du champ de déplacement est D_PLAN_SI et celle portant sur le second gradient de dilatation est D_PLAN_DIL avec le choix d'interpolation P2-P1-P0.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le groupe de mailles ROCHE_REG est obtenu par duplication du groupe de mailles nommé ROCHE, dont l'objectif est d'accueillir la modélisation second gradient de dilatation pour la régularisation.

Nombre de nœuds	9
Nombre de SEG3	4
Nombre de TRIA6	4
Nombre de groupe de mailles	6

5.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur testée	Instant	Nœud	Type	Critère	Aster	Tolérance
Déplacement GONF	1.0	*N1*	'ANALYTIQUE'	RELATIF	-0.10	0.010
Déplacement DX	1.0	*N5*	'ANALYTIQUE'	RELATIF	0.0250	0.010
Force de réaction SIG1	1.0		'ANALYTIQUE'	RELATIF	1.5	0.010
Force de réaction DEPV	1.0		'ANALYTIQUE'	ABSOLU	1.E-6	1.0E-04

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation est identique à la modélisation B avec un mapping composé de triangles. La modélisation portant sur le premier gradient du champ de déplacement est D_PLAN_SI et celle portant sur le second gradient de dilatation est D_PLAN_DIL avec le choix d'interpolation P2-P1-P0.

6.2 Caractéristiques du maillage

Le groupe de mailles ROCHE_REG est obtenu par duplication du groupe de mailles nommé ROCHE, dont l'objectif est d'accueillir la modélisation second gradient de dilatation pour la régularisation.

Nombre de nœuds	441
Nombre de SEG3	40
Nombre de TRIA6	400
Nombre de groupe de mailles	6

6.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur testée	Instant	Nœud	Type	Critère	Aster	Tolérance
Déplacement GONF	1.0	N1	'NON-REGRESSION'	RELATIF	-5.5E-2	1.0
Déplacement DX	1.0	N5	'NON-REGRESSION'	RELATIF	0.0945	1.0
Force de réaction DEPV	1.0		'NON-REGRESSION'	ABSOLU	1.E-6	1.0E-04

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation portant sur le premier gradient du champ de déplacement est D_PLAN_SI et celle portant sur le second gradient de dilatation est D_PLAN_DIL avec le choix d'interpolation P2-P1-P0.
Le cas présent est identique à la modélisation A avec $r=0$ nous avons alors

$$\begin{cases} \nu_1 = -u_1 \\ u_3 = \dfrac{2(E)}{4(E)}.u_1 \approx \dfrac{u_1}{2} \\ S_1 = \dfrac{3}{2}.a^1.u_1 \end{cases}$$

7.2 Caractéristiques du maillage

Le groupe de mailles ROCHE_REG est obtenu par duplication du groupe de mailles nommé ROCHE, dont l'objectif est d'accueillir la modélisation second gradient de dilatation pour la régularisation.

Nombre de nœuds	8
Nombre de SEG3	4
Nombre de QUAD8	2
Nombre de groupe de mailles	6

7.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur testée	Instant	Nœud	Type	Critère	Aster	Tolérance
Déplacement GONF	1.0	*N1*	'ANALYTIQUE'	RELATIF	-0.10	0.010
Déplacement DX	1.0	*N5*	'ANALYTIQUE'	RELATIF	0.0550	0.010
Force de réaction SIG1	1.0		'ANALYTIQUE'	RELATIF	1.5	0.010
Force de réaction DEPV	1.0		'ANALYTIQUE'	RELATIF	0.0288675	0.010

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

Le cas présent est identique à la modélisation A avec une généralisation du comportement second gradient complet [R5.04.03]. La modélisation portant sur le premier gradient du champ de déplacement est D_PLAN_SI et celle portant sur le second gradient de dilatation est D_PLAN_2DG avec le choix d'interpolation P2-P1-P0.

Nous montrons comme pour la modélisation E que :

$$u_1 = -\nu_1 \text{ de même } u_3 = \frac{u_1}{2}$$

Pour le calcul de Σ_{111} et Σ_{221} pour la définition du champ de doubles contraintes Σ

nous avons donc :

$$\Sigma_{111} = a^{12345}\chi_{111} + a^{23}\chi_{122} + a^{12}(\chi_{212} + \chi_{221})$$

avec :

$$\begin{cases} a^{12345} = 2(a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5) \\ a^{23} = a^2 + 2a^3 \\ a^{12} = a^1 + \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

Etant donné les valeurs des paramètres matériau et des conditions limites nous trouvons:

$$\Sigma_{111} = a^1 . u_1$$

de même nous aboutissons à:

$$\Sigma_{221} = \frac{a^1}{2} . u_1$$

8.2 Caractéristiques du maillage

Le groupe de mailles ROCHE_REG est obtenu par duplication du groupe de mailles nommé ROCHE, dont l'objectif est d'accueillir la modélisation second gradient complet pour la régularisation.

Nombre de nœuds	8
Nombre de SEG3	4
Nombre de QUAD8	2
Nombre de groupe de mailles	6

8.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur testée	Instant	Nœud	Type	Critère	Aster	Tolérance
Déplacement V11	1.0	*N1*	'ANALYTIQUE'	RELATIF	-0.10	0.010
Déplacement DX	1.0	*N5*	'ANALYTIQUE'	RELATIF	0,050	0.010
Force de réaction SIG111	1.0		'ANALYTIQUE'	RELATIF	1	0.010
Force de réaction SIG221	1.0		'ANALYTIQUE'	RELATIF	0.5	0.010

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Force de réaction DEPV11	1.0		'ANALYTIQUE'	RELATIF	0.0288675	0.010

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Modélisation G

9.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation G. est identique à la modélisation A mais avec une interpolation sans multiplicateurs de Lagrange (P2-P1) – voir R5.04.03.

9.2 Caractéristiques du maillage

Le groupe de mailles ROCHE_REG est obtenu par duplication du groupe de mailles nommé ROCHE, dont l'objectif est d'accueillir la modélisation second gradient de dilatation pour la régularisation.

Nombre de nœuds 8
Nombre de SEG3 4
Nombre de QUAD8 2
Nombre de groupe de mailles 6

9.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur testée	Instant	Nœud	Type	Critère	Aster	Tolérance
Déplacement GONF	1.0	N1	'NON-REGRESSION'	RELATIF	-0,1	1.0E-04
Déplacement DX	1.0	N5	'NON-REGRESSION'	RELATIF	0,03	1.0E-04
Contrainte SIG1	1.0		'NON-REGRESSION'	RELATIF	1,5	1.0E-04

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Synthèse des résultats

Ce test permet de vérifier de manière très simple le bon fonctionnement de la modélisation second gradient, qui coïncide également avec les résultats avec la solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)