SSLL14 - Portique plan articulé en pied

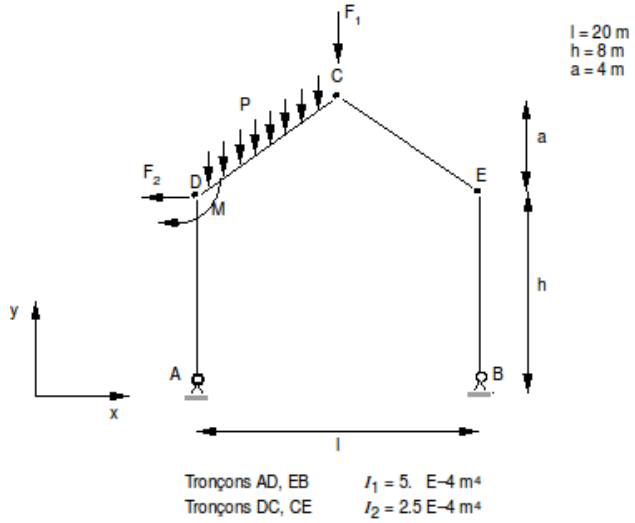
Résumé
Ce test concerne l'étude d'un portique composé de poutres élancées, articulé en pied, en analyse statique linéaire.

Le portique est modélisé avec des éléments linéiques SEG2 et soumis à quatre chargements (répartis ou ponctuels).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Géométrie du portique (m) :

- $l=20$
- $h=8$
- $a=4$

Moments quadratiques des poutres (m^4) :

- Tronçons AD , EB : $I_1=5.0\,E^{-4}$
- Tronçons DC , CE : $I_1=2.5\,E^{-4}$

Le portique est constitué de poutres de sections symétriques, de telle sorte que $IY=IZ.$
On ne tient compte que de l'énergie de flexion, car les poutres sont très élancées. C'est pourquoi les autres caractéristiques de section de poutre n'interviennent pas.

1.2 Propriétés de matériaux

Matériau élastique linéaire isotrope : $E=2.1\,E11\,Pa$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Pieds de poteaux A et B articulés.

Chargements

Force nodale en C :	$F\,y=-2000\,N=F\,1$
Force nodale en D :	$F\,x=-10\,000\,N=F\,2$
Moment en D :	$Mx=-100\,000\,N.m=M$
Force répartie sur le tronçon DC :	$P\,z=-3000\,N/m$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La méthode de calcul et la solution ont été déterminées par F. Voldoire (EDF R&D / AMA) et sont exposées dans l'annexe.

2.2 Résultats de référence

Réactions horizontales Fx et verticales Fy au point A.
Moment de flexion Mz en C.
Déplacements horizontal Dx et vertical Dy du point C.

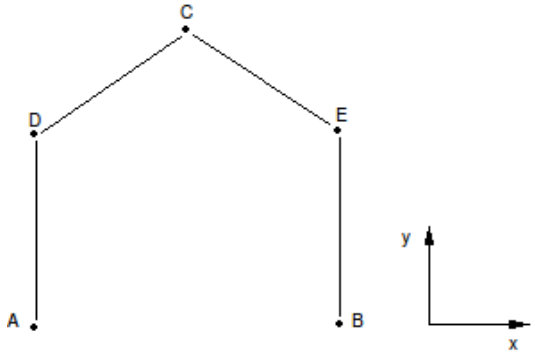
2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



- Modélisation POU_D_E
- 10 éléments par tronçons, soit 40 éléments SEG2
- Déplacement dans le plan : $DZ=0$ sur tout le maillage
- Pieds de poteaux A et B articulés : $DX=DY=0$

3.2 Grandeurs testées et résultats

3.2.1 Valeurs testées

Chargement	Nœud	Valeur testée	Référence
p	C	$Dx(m)$	0.0110476
		$Dy(m)$	–0.012422374
		$Mz(N.m)$	18672.994
	A	$Fx(N)$	5175.37
		$Fy(N)$	24233.24
F_1	C	$Dx(m)$	0.00000
		$Dy(m)$	–0.01497330
		$Mz(N.m)$	41422.161
	A	$Fx(N)$	4881.487
		$Fy(N)$	10000.00
F_2	C	$Dx(m)$	–0.03000956
		$Dy(m)$	–0.00299466
		$Mz(N.m)$	8284.432
	A	$Fx(N)$	5976.297
		$Fy(N)$	4000.00
C	C	$Dx(m)$	0.0273532
		$Dy(m)$	–0.001215646
		$Mz(N.m)$	4916.724
	A	$Fx(N)$	4576.394
		$Fy(N)$	5000.00

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Synthèse des résultats

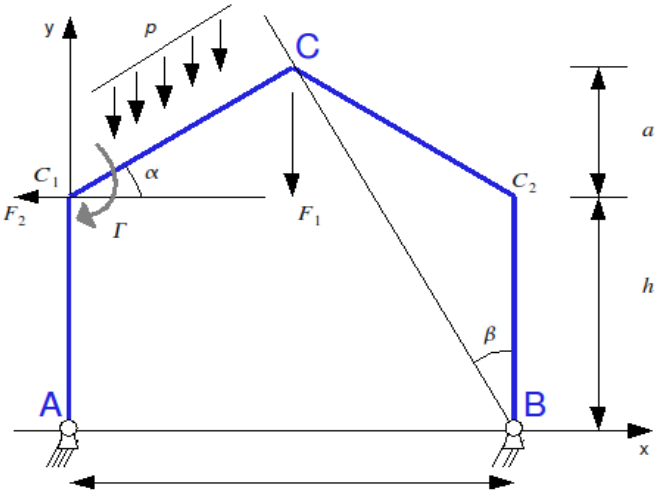
Les résultats obtenus avec la modélisation POU_D_E sont en très bon accord avec la solution analytique et valident donc le calcul de treillis de poutres soumis à des efforts ponctuels ou répartis.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Annexe

5.1 Présentation

On considère le portique ci-contre, soumis à diverses charges.



On considère le portique ci-contre, soumis à diverses charges.

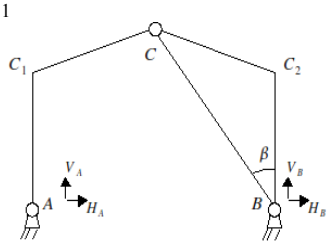
Hyperstaticité de degré 1.
Inconnue hyperstatique : X : moment en C.

Chargement vertical réparti p sur C_1C.

Deux forces F_1, F_2 et un couple en C_1.

Hyperstaticité de degré 1.
Inconnue hyperstatique : X
Charges appliquées :

- moment en C,
- chargement vertical réparti p sur C_1C_2,
- force $F1$, $F2$ appliquées en C_1,
- couple Γ appliqué en C_1



$$\tan(\alpha)=\frac{2a}{l}=0.4(\Rightarrow(\cos(\alpha))^{-1}=\sqrt{1.16}=1.077033)$$

$$\tan(\beta)=\frac{l}{2(a+h)}=\frac{1}{1.2}$$

$$b=\frac{l}{2\cos(\alpha)} \quad ; \quad \sin(\alpha)=\frac{a}{b}$$

5.2 Sollicitations isostatiques sous charge réelle répartie p sur C_1C

5.2.1 Réactions d'appuis isostatiques

$$H_A+H_B=0 \qquad V_A+V_B=\frac{pl}{2\cos(\alpha)} \qquad lV_B=\frac{pl^2}{8\cos(\alpha)}$$

La partie CB est articulée et chargée seulement à ses extrémités

$$\begin{pmatrix}H_B\\V_B\end{pmatrix}\wedge BC=0\Leftrightarrow H_B=-V_B\tan(\beta)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D'où les réactions isostatiques

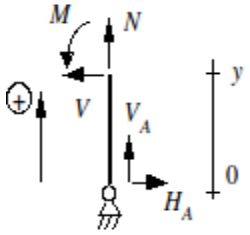
$$H_A=\frac{pl}{8\cos(\alpha)}\tan(\beta) \quad ; V_A=\frac{3\,pl}{8\cos(\alpha)} ; H_B=\frac{-pl}{8\cos(\alpha)}\tan(\beta) ; V_B=\frac{pl}{8\cos(\alpha)}$$

Remarque :

$$\frac{l\tan(\beta)}{8\cos(\alpha)}=\frac{bl}{8(a+h)}$$

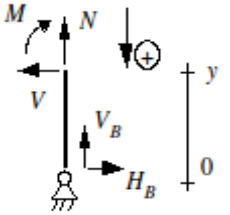
5.2.2 Sollicitations

Poutre AC_1



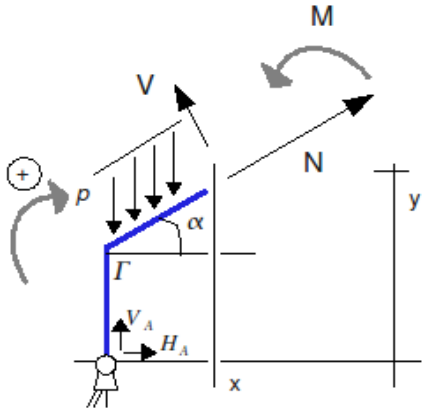
$$N_{iso}=\frac{-3\,pl}{8\cos(\alpha)}$$
$$V_{iso}=\frac{pl}{8\cos(\alpha)}\tan(\beta)$$
$$M_{iso}=\frac{-pl}{8\cos(\alpha)}y.tan(\beta)$$

Poutre C_2B



$$N_{iso}=\frac{-pl}{8\cos(\alpha)}$$
$$V_{iso}=\frac{-pl}{8\cos(\alpha)}\tan(\beta)$$
$$M_{iso}=\frac{-pl}{8\cos(\alpha)}y.tan(\beta)$$

Poutre C_1C



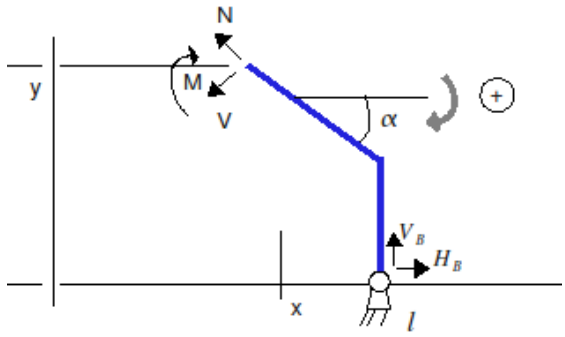
$$N_{iso} = -H_A\cos(\alpha)-V_A\sin(\alpha)+\frac{px}{\cos(\alpha)}\sin(\alpha)$$
$$=-\frac{pl}{8}\left(\tan(\beta)+3\tan(\alpha)-8\tan(\alpha)\frac{x}{l}\right)$$
$$V_{iso} = H_A\sin(\alpha)-V_A\cos(\alpha)+\frac{px}{\cos(\alpha)}\cos(\alpha)$$
$$=\frac{pl}{8}\left(\tan(\beta)\tan(\alpha)-3+8\frac{x}{l}\right)$$
$$M_{iso} = -\frac{px^2}{2\cos(\alpha)}+V_A x-H_A y$$
$$=\frac{p}{\cos(\alpha)}\left(\frac{-x^2}{2}+\frac{3\,lx}{8}-\frac{ly\tan(\beta)}{8}\right)$$

avec $M_{iso}=0$ en C

$$M_{iso}=\frac{-pl}{8(a+h)}\left(2\,s^2\left(\frac{a+h}{b}\right)-s(2a+3h)+bh\right) \text{ avec } s=\frac{x}{\cos(\alpha)}\in[0,b]$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Poutre CC_2

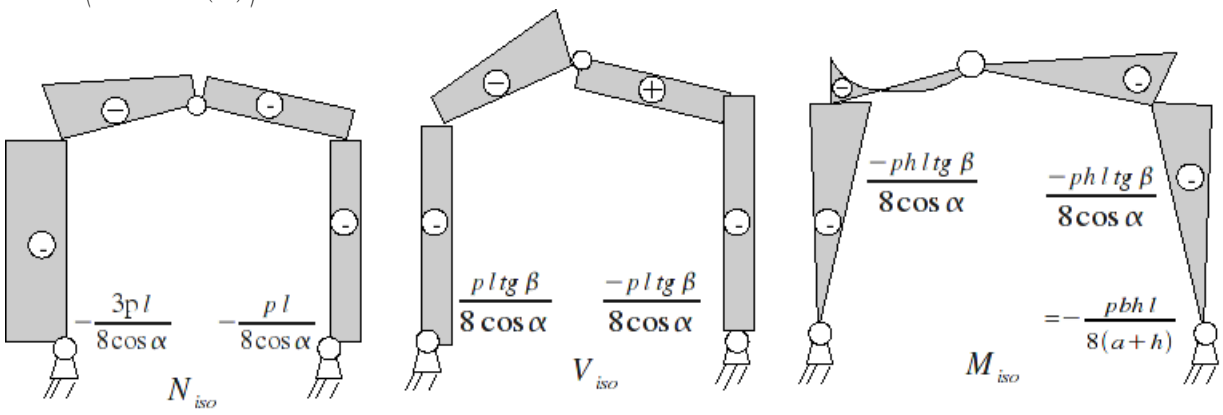


$$N_{iso} = H_B\cos(\alpha) - V_B\sin(\alpha)$$
$$= -\frac{pl}{8}(\tan(\beta)+\tan(\alpha))$$
$$V_{iso} = H_B\sin(\alpha) + V_B\cos(\alpha)$$
$$= -\frac{pl}{8}(\tan(\beta)\tan(\alpha)-1)$$
$$M_{iso} = H_B y - V_B(l-x)$$
$$= -\frac{pl}{8\cos(\alpha)}(y.tan(\beta)-(l-x))$$

avec $M_{iso}=0$ en C

5.2.3 Diagrammes

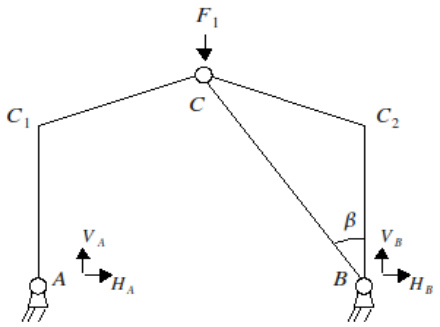
$$\left(b=\frac{l}{2\cos(\alpha)}\right)$$



5.3 Sollicitations sous force concentrée F_1 (vers le bas)

5.3.1 Réactions d'appui

$$H_A + H_B = 0\,;$$
$$V_A + V_B = F_1\,;$$
$$\begin{pmatrix} H_A \\ V_A \end{pmatrix} \wedge AC = 0 = \begin{pmatrix} H_B \\ V_C \end{pmatrix} \wedge BC\,;$$



D'où :

$$H_A = \frac{1}{2}F_1\tan(\beta)\,;\; V_A = \frac{1}{2}F_1\,;\; H_B = \frac{-1}{2}F_1\tan(\beta)\,;\; V_B = \frac{1}{2}F_1$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3.2 Sollicitations

Poutre AC_1 :

$$N_{iso}=\frac{-1}{2}F_1$$
$$V_{iso}=\frac{1}{2}F_1\tan(\beta)$$
$$M_{iso}=\frac{-1}{2}F_1 y\tan(\beta)$$

Poutre C_2B :

$$N_{iso}=\frac{-1}{2}F_1$$
$$V_{iso}=\frac{-1}{2}F_1\tan(\beta)$$
$$M_{iso}=\frac{-1}{2}F_1 y\tan(\beta)$$

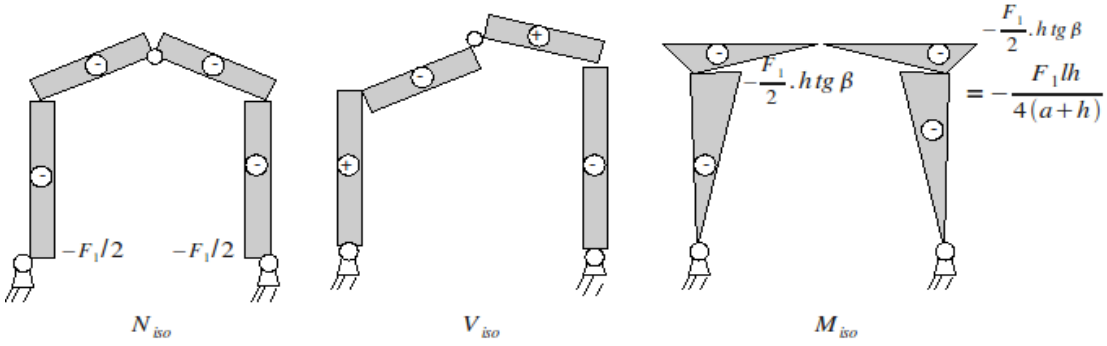
Poutre C_1C :

$$N_{iso}=\frac{-1}{2}F_1(\tan(\beta)\cos(\alpha)+\sin(\alpha))$$
$$V_{iso}=\frac{1}{2}F_1(\tan(\beta)\sin(\alpha)-\cos(\alpha))$$
$$M_{iso}=\frac{-1}{2}F_1(y\tan(\beta)-x)$$

Poutre CC_2 :

$$N_{iso}=\frac{-1}{2}F_1(\tan(\beta)\cos(\alpha)+\sin(\alpha))$$
$$V_{iso}=\frac{1}{2}F_1(\tan(\beta)\sin(\alpha)-\cos(\alpha))$$
$$M_{iso}=\frac{-1}{2}F_1(y\tan(\beta)-(l-x))$$

5.3.3 Diagrammes (F_1 vers le bas)

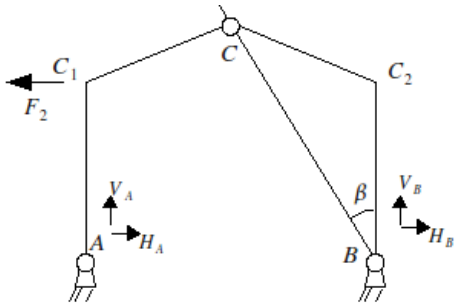


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.4 Sollicitations sous la force concentrée F_2 (vers la gauche)

5.4.1 Réactions d'appui

$$H_A+H_B=F_2;$$
$$V_A+V_B=0;$$
$$lV_B+hF_2=0;$$
$$\begin{pmatrix} H_B \\ V_B \end{pmatrix} ans\ BC=0$$



D'où :

$$H_A=F_1(1-\frac{h}{l}\tan(\beta))\ ;\ V_A=F_2\frac{h}{l}\ ;\ H_B=F_1\frac{h}{l}\tan(\beta)\ ;\ V_B=-F2\frac{h}{l}\ ;$$

Remarque :

$$\frac{h}{l}\tan(\beta)=\frac{h}{2(a+h)} \qquad (1-\frac{h}{l}\tan(\beta))=\frac{2a+h}{2(a+h)}$$
$$\tan(\beta)\sin(\alpha)-\cos(\alpha)=\frac{-hl}{2b(a+h)}\ ,\ \tan(\beta)\cos(\alpha)-\sin(\alpha)=\frac{l^2-4(a^2+ah)}{4b(a+h)}$$

5.4.2 Sollicitations

Poutre AC_1 :

$$N_{iso}=-F_2\frac{h}{l}$$
$$V_{iso}=F_2(1-\frac{h}{l}\tan(\beta))$$
$$M_{iso}=-F_2y(1-\frac{h}{l}\tan(\beta))$$

Poutre C_2B :

$$N_{iso}=F_2\frac{h}{l}$$
$$V_{iso}=F_2\frac{h}{l}\tan(\beta)$$
$$M_{iso}=-F_2y\frac{h}{l}y\tan(\beta)$$

Poutre C_1C :

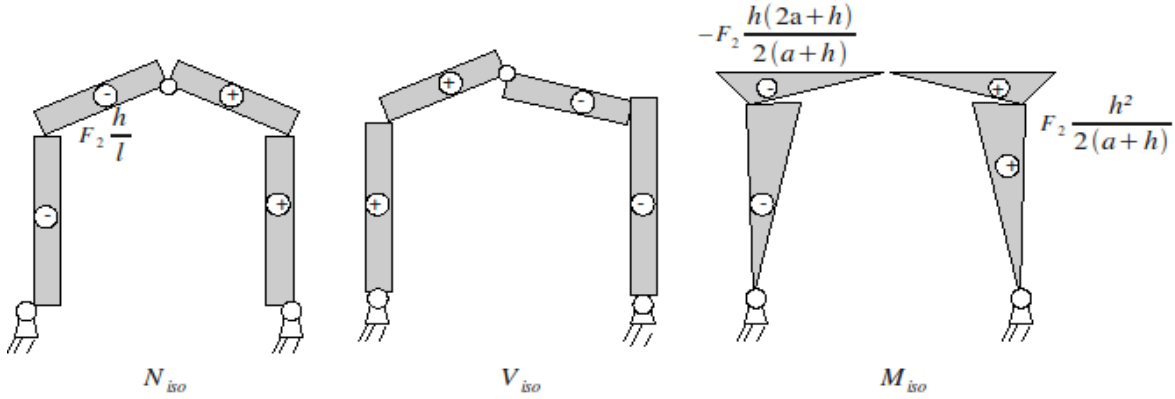
$$N_{iso}=F_2((1-\frac{h}{l}\tan(\beta))\cos(\alpha)-\frac{h}{l}\cos(\alpha))$$
$$V_{iso}=F_2((1-\frac{h}{l}\tan(\beta))-\frac{h}{l}\cos(\alpha))$$
$$M_{iso}=F_2(\frac{h}{l}x-(1-\frac{h}{l}\tan(\beta))y)$$

Poutre CC_2 :

$$N_{iso}=F_2\frac{h}{l}(\tan(\beta)\cos(\alpha)+\sin(\alpha))$$
$$V_{iso}=F_2\frac{h}{l}(\tan(\beta)\sin(\alpha)-\cos(\alpha))$$
$$M_{iso}=F_2\frac{h}{l}(y\tan(\beta)-(l-x))$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

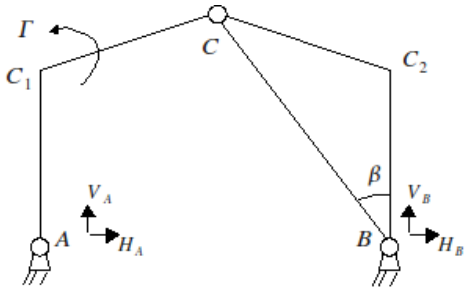
5.4.3 Diagrammes



5.5 Sollicitations sous le couple concentré Γ (positif)

5.5.1 Réactions d'appui

$$H_A + H_B = 0 ;$$
$$V_A + V_B = 0 ;$$
$$l V_B + \Gamma = 0 ;$$
$$\begin{pmatrix} H_B \\ V_B \end{pmatrix} \wedge BC = 0 ;$$



D'où : $H_A = -\Gamma \tan\frac{\beta}{l}$, $V_A = \frac{\Gamma}{l}$, $H_B = \Gamma \tan\frac{\beta}{l}$, $V_A = \frac{-\Gamma}{l}$

Remarque :

$$\frac{\tan(\beta)}{l} = \frac{1}{2(a+h)}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.5.2 Sollicitations

Poutre AC_1 :

$$N_{iso}=\frac{-\Gamma}{l}$$
$$V_{iso}=\frac{-\Gamma\tan(\beta)}{l}$$
$$M_{iso}=\frac{\Gamma\, y\tan(\beta)}{l}$$

Poutre C_2B :

$$N_{iso}=\frac{-\Gamma}{l}$$
$$V_{iso}=\frac{\Gamma\tan(\beta)}{l}$$
$$M_{iso}=\frac{\Gamma\, y\tan(\beta)}{l}$$

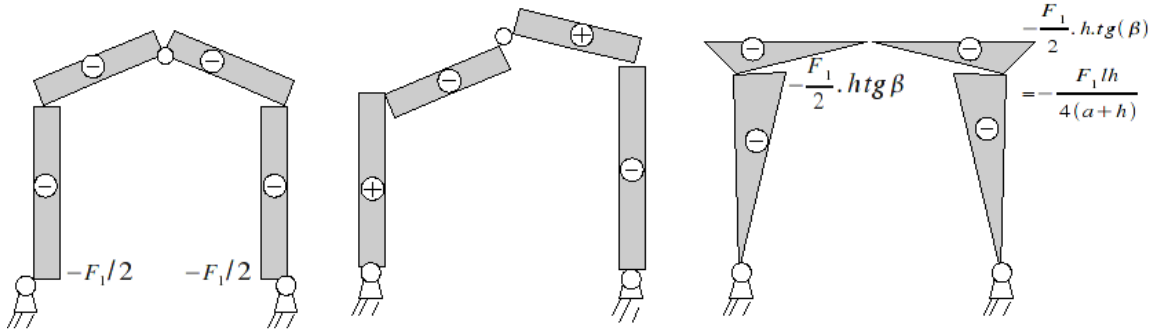
Poutre C_1C :

$$N_{iso}=\frac{\Gamma}{l}(\tan(\beta)\cos(\alpha)-\sin(\alpha))$$
$$N_{iso}=\frac{-\Gamma}{l}(\tan(\beta)\sin(\alpha)+\cos(\alpha))$$
$$N_{iso}=\frac{\Gamma}{l}(x+y\tan(\beta)-l)$$

Poutre CC_2 :

$$N_{iso}=\frac{\Gamma}{l}(\tan(\beta)\cos(\alpha)+\sin(\alpha))$$
$$N_{iso}=\frac{\Gamma}{l}(\tan(\beta)\sin(\alpha)-\cos(\alpha))$$
$$N_{iso}=\frac{\Gamma}{l}(y\tan(\beta)-(l-x))$$

5.5.3 Diagrammes (Γ positif)

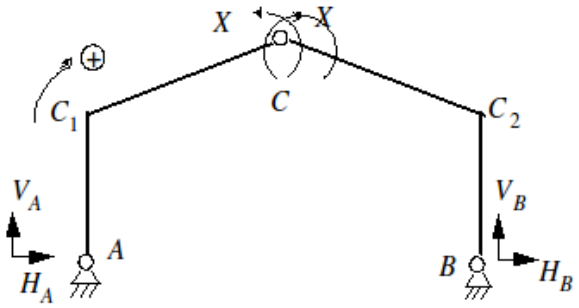


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.6 Sollicitations sous le moment X hyperstatique

5.6.1 Réactions d'appui

$$H_A+H_B=0\,;$$
$$V_A+V_B=0\,;$$
$$lV_B=0\,;$$
$$H_B(a+h)-X=0\,;$$



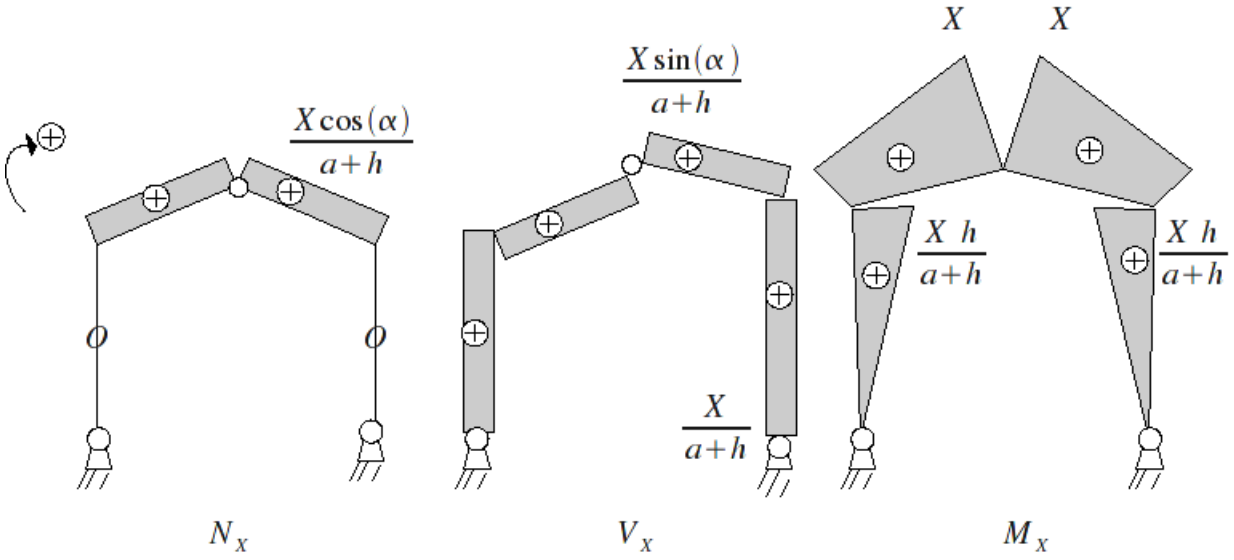
D'où les réactions : $H_a=\frac{-X}{a+h}$, $V_A=0$, $H_B=\frac{X}{a+h}$, $V_B=0$

5.6.2 Sollicitations

Poutre AC_1 :	$N_X=0$ $V_X=\frac{-X}{a+h}$ $M_X=\frac{X}{a+h}y$
Poutre C_2B :	$N_X=0$ $V_X=\frac{X}{a+h}$ $M_X=\frac{X}{a+h}y$
Poutre C_1C :	$N_X=\frac{X}{a+h}\cos(\alpha)$ $V_X=\frac{X}{a+h}\sin(\alpha)$ $M_X=\frac{X}{a+h}y=\frac{X}{a+h}(h+x\tan(\alpha))$
Poutre CC_2 **:**	$N_X=\frac{X}{a+h}\cos(\alpha)$ $V_X=\frac{X}{a+h}\sin(\alpha)$ $M_X=\frac{X}{a+h}y$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.6.3 Diagrammes

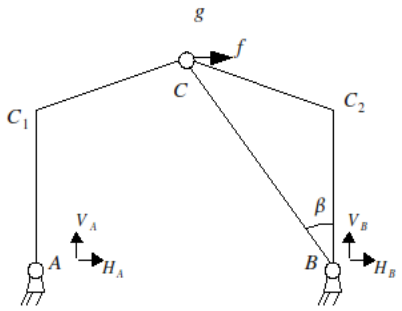


5.7 Sollicitations sous charges fictives ponctuelles en C

Afin de calculer les déplacement en C , à l'aide du Principe des travaux Virtuels (*cf.* le paragraphe $[\S 8]$), il est nécessaire d'établir les diagrammes de sollicitations sous l'action de deux forces "fictives" f et g appliquées en C .

5.7.1 Réactions d'appui

$$H_A+H_B=-f\ ;$$
$$V_A+V_B=-g\ ;$$
$$\begin{pmatrix} H_A \\ V_A \end{pmatrix} \wedge AC = 0 = \begin{pmatrix} H_B \\ V_B \end{pmatrix} \wedge BC$$



D'où :

$$H_A=\frac{-1}{2}(f+g\tan(\beta))\ ,\ V_A=\frac{-1}{2}(g+f\cot(\beta))$$
$$H_B=\frac{-1}{2}(f-g\tan(\beta))\ ,\ V_B=\frac{-1}{2}(g-f\cot(\beta))$$

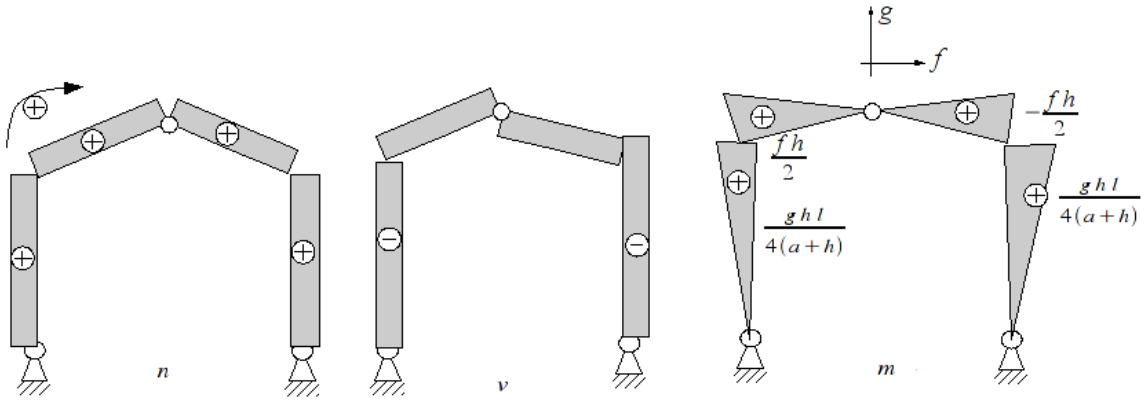
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.7.2 Sollicitations

Poutre AC_1 :	$n=\frac{1}{2}(g+f\cot(\beta))$ $v=\frac{-1}{2}(f+g\tan(\beta))$ $m=\frac{1}{2}(f+g\tan(\beta))$
Poutre C_2B :	$n=\frac{1}{2}(g-f\cot(\beta))$ $v=\frac{-1}{2}(f-g\tan(\beta))$ $m=\frac{-1}{2}(f-g\tan(\beta))\,y$
Poutre C_1C :	$n=\frac{1}{2}(f+g\tan(\beta))\cos(\alpha)+\frac{1}{2}(g+f\cot(\beta))\sin(\alpha)$ $v=\frac{-1}{2}(f+g\tan(\beta))\sin(\alpha)+\frac{1}{2}(g+f\cot(\beta))\cos(\alpha)$ $m=\frac{1}{2}(f+g\tan(\beta))\,y-\frac{1}{2}(g+f\cot(\beta))\,x$
Poutre CC_2 :	$n=\frac{-1}{2}(f-g\tan(\beta))\cos(\alpha)+\frac{1}{2}(g-f\cot(\beta))\sin(\alpha)$ $v=\frac{-1}{2}(f-g\tan(\beta))\sin(\alpha)-\frac{1}{2}(g-f\cot(\beta))\cos(\alpha)$ $m=\frac{-1}{2}(f-g\tan(\beta))\,y-\frac{1}{2}(g-f\cot(\beta))(l-x)$

5.7.3 Diagrammes

Voici les diagrammes de sollicitations sous l'action des deux forces "fictives" f et g . On considère ici : $f\geq 0$, $g\geq fcot(\beta)$.



5.8 Détermination du moment X hyperstatique

On se place en élasticité ; on ne considère que l'énergie de flexion, les poutres étant élancées. L'état naturel est supposé vierge (pas de précontraintes ni de déplacement d'appui).
Le potentiel complémentaire est alors :

$$F*(X)=\int_{poteaux}\frac{(M_{iso}+M_1X)^2}{EI_1}+\int_{charpentes}\frac{(M_{iso}+M_1X)^2}{EI_2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Il est stationnaire à l'équilibre, d'où :

$$\delta . X = \left[\int_{pot} \frac{M_1^2}{EI_1} + \int_{charp} \frac{M_1^2}{EI_2} \right] . X = -\int_{pot} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} - \int_{charp} \frac{M_1 M_{iso}}{Ei_2} = S$$

Le coefficient de souplesse δ est la somme de :

$$\int_{pot} \frac{M_1^2}{EI_1} = \frac{2\mathrm{h}}{3\mathrm{EI}_1} \left(\frac{h}{a+h} \right)^2$$

$$\int_{charp} \frac{M_1^2}{EI_2} = \frac{2\mathrm{b}}{EI_2} [(\frac{h}{a+h})^2 + \frac{1}{3} (\frac{a}{a+h})^2 + \frac{ah}{(a+h)^2}]$$

soit :

$$E . \delta = \frac{2}{(a+h)^2} [\frac{h^3}{3\mathrm{I}_1} + \frac{b(3\mathrm{h}^2 + a^2 + 3\mathrm{ah})}{3\mathrm{I}_2}]$$

Application numérique :

Dans l'exemple considéré :

$$I_1 = 2\mathrm{I}_2 = 5.0\,E-4\,m^4 \ , \ h = 2\mathrm{a} = 8\,m \ , \ l = 20\ m \ , \ b = \frac{l}{2}\sqrt{1.16}$$

D'où : $\gamma = \frac{2}{E(a+h)_1^{2\mathrm{I}}} \underbrace{\frac{h^2}{3}(h + \frac{19\mathrm{b}}{2})}_{2353.45347\,m^3}$

On étudie l'un après l'autre les divers chargements pour calculer les seconds membres S.

5.8.1 Charge répartie p sur C_1C

Le second membre S dû à f est :

$$-\int_{pot} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} = \frac{3\mathrm{h}}{3\mathrm{EI}_1} (\frac{h}{a+h}) (\frac{pblh}{8(a+h)}) = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{ph^3 bl}{24}$$

$$-\int_{CC_2} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} = \frac{pb^2 hl}{8(a+h)EI_2} (\frac{1}{2}\frac{h}{a+h}) + (\frac{a}{6}\frac{a}{a+h}) = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{phb^{2\mathrm{l}}(3\mathrm{h}+a)}{48}$$

$$-\int_{C_1C} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} = \frac{1}{EI_2} \frac{pl}{8(a+h)^2} \int_0^b \left[2\mathrm{s}^2 \frac{a+h}{b} - s(2\mathrm{a}+3\mathrm{h}) + bh \right] \left[h + s\frac{a}{b} \right] ds$$

$$= \frac{1}{E(a+h)^2 I_2} \frac{plb^2}{48} (h^2 + 2\mathrm{ah} + a^2)$$

D'où :

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{plb}{96} \left[\frac{4\mathrm{h}^3}{I_1} + \frac{hb(3\mathrm{h}+a)}{I_2} + \frac{b(h^2 - 2\mathrm{ah} - a^2)}{I_2} \right]$$

Application numérique :

$I_1 = 2\,I_2$; $h = 2\mathrm{a}$; $p = 3000\,N.m^1$ (vers le bas)

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \underbrace{\frac{plbh^2}{96} \left[4\mathrm{h} + \frac{13}{2} b \right]}_{43946021.89\,N.m^4}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D'où :

- le moment en C :
  $X=18672994\,N.m$
- la réaction en A :

$$H_A=p\frac{bl}{8(a+h)}-\frac{X}{a+h}=\frac{\frac{pbl}{8}-X}{a+h}\quad,\quad H_A=5175.37\,N$$

$$V_A=\frac{3\mathrm{pb}}{4}-0\quad,\quad V_A=24233.24\,N$$

5.8.2 Charge ponctuelle F_1 en C

Le second membre s'obtient à l'aide de :

$$-\int_{pot}\frac{M_1M_{iso}}{EI_1}=\frac{2\mathrm{h}}{3\mathrm{EI}_1}(\frac{h}{a+h})(\frac{F_1lh}{4(a+h)})=\frac{2}{E(a+h)^2I_1}\frac{F_1lh^3}{12}$$

$$-\int_{charp}\frac{M_1M_{iso}}{EI_2}=\frac{2\mathrm{b}}{EI_2}\frac{F_1lh}{4(a+h)}(\frac{1}{2}(\frac{h}{a+h})+\frac{1}{6}(\frac{a}{a+h}))=\frac{2}{E(a+h)^2I_2}\frac{F_1blh(3\mathrm{h}+a)}{24}$$

D'où :

$$S=\frac{2}{E(a+h)^2}\frac{F_1lh}{24}\left[\frac{2\mathrm{h}^2}{I_1}+\frac{b(3\mathrm{h}+a)}{I_2}\right]$$

Application numérique :

$I_1=2I_2$; $h=2\mathrm{a}$; $F_1=20000\,N$ (vers le bas)

$$S=\frac{2}{E(a+h)^2I_1}\underbrace{\frac{F_1lh^2}{24}}_{97485127.76\,N.m^4}[2\mathrm{h}+7b]$$

D'où :

- le moment en C :
  $X=41422.161\,N.m$
- la réaction en A :

$$H_A=\frac{1}{4}F_1\frac{l}{a+h}-\frac{X}{a+h}=\frac{\frac{F_1l}{4}-X}{a+h}\quad,\quad H_A=4881.4866\,N$$

$$V_A=\frac{1}{2}F_1-0\quad,\quad V_A=10000.0\,N$$

5.8.3 Charge ponctuelle F_2 en C_1

Le second membre s'obtient à l'aide de :

$$-\int_{AC_1}\frac{M_1M_{iso}}{EI_1}=\frac{h}{3\mathrm{EI}_1}(\frac{h}{a+h})\frac{F_2h(2\mathrm{a}+h)}{2(a+h)}=\frac{2}{E(a+h)^2I_1}\frac{F_2h^3(2\mathrm{a}+h)}{12}$$

$$-\int_{C_2B}\frac{M_1M_{iso}}{EI_1}=\frac{h}{3\mathrm{EI}_1}(\frac{h}{a+h})\frac{(-F_2h^2)}{2(a+h)}=\frac{2}{E(a+h)_1^{2\mathrm{I}}}\frac{F_2h^3(2\mathrm{a}+h)}{12}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$-\int_{C_1C}\frac{M_1M_{iso}}{EI_2}=\frac{b}{EI_2}\frac{F_2h(2a+h)}{2(a+h)}\left[\frac{1}{2}(\frac{h}{a+h})+\frac{1}{6}(\frac{a}{a+h})\right]=\frac{2}{E(a+h)^2I_2}\frac{F_2bh(3h^2+7ah+2a^2)}{24}$$

$$-\int_{CC_2}\frac{M_1M_{iso}}{EI_2}=\frac{b}{EI_2}\frac{-F_2h^2}{2(a+h)}\left[\frac{1}{2}(\frac{h}{a+h})+\frac{1}{6}(\frac{a}{a+h})\right]=\frac{2}{E(a+h)^2I_2}\frac{-F_2bh^2(3h+a)}{24}$$

$$S=\frac{2}{E(a+h)^2}\frac{F_2ha}{12}\left[\frac{2h^2}{I_1}+\frac{b(3h+a)}{I_2}\right]$$

Application numérique :

$I_1=2I_2$; $h=2a$; $F_2=10000\,N$ (vers la gauche)

$$S=\frac{2}{E(a+h)^2I_1}\underbrace{\frac{F_2h^2a}{12}}_{19497025.55\,N.m^4}[2h+7b]$$

D'où :

- le moment en C :
  $X=8284.4321\,N.m$
- la réaction en A :

$$H_A=F_2\frac{2a+h}{2(a+h)}-\frac{X}{a+h}=\frac{F_2(a+\frac{h}{2})-X}{a+h}\quad,\quad H_A=5976.297\,N$$

$$V_A=\frac{F_2h}{l}\quad,\quad V_A=4000.0\,N$$

5.8.4 Couple ponctuel Γ en C_1

Le second membre s'obtient à l'aide de :

$$-\int_{pot}\frac{M_1M_{iso}}{EI_1}=\frac{-2h}{3EI_1}(\frac{h}{a+h})\frac{\Gamma h}{2(a+h)}=\frac{2}{E(a+h)^2I_1}\frac{-\Gamma h^3}{6}$$

$$-\int_{C_1C}\frac{b}{EI_2}=\frac{\Gamma(h+2a)}{2(a+h)}\frac{b}{EI_2}\left[\frac{1}{2}(\frac{h}{a+h}+\frac{1}{6}(\frac{a}{a+h}))\right]=\frac{2}{E(a+h)^2I_2}\frac{\Gamma(h+2a)(3h+a)b}{24}$$

$$-\int_{CC_2}\frac{M_1M_{iso}}{EI_2}=\frac{b}{EI_2}\frac{-\Gamma h}{2(a+h)}\left[\frac{1}{2}(\frac{h}{a+h})+\frac{1}{6}(\frac{a}{a+h})\right]=\frac{2}{E(a+h)^2I_2}\frac{-\Gamma hb(3h+a)}{24}$$

D'où :

$$S=\frac{2}{E(a+h)^2}\frac{-\Gamma}{12}\left[\frac{2h^3}{I_1}+\frac{ab(3h+a)}{I_2}\right]$$

Application numérique :

$I_1=2I_2$; $h=2a$; $\Gamma=-100000\,N.m$ (sens aiguilles de montre)

$$S=\frac{2}{E(a+h)^2I_1}\underbrace{\frac{-\Gamma}{6}}_{11571281.93\,N.m^4}[h^3-ab(3h+a)]$$

D'où :

- le moment en C :
  $X=4916.7243\,N.m$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- la réaction en A :

$$H_A=\frac{-\Gamma}{2(a+h)}-\frac{X}{a+h}=\frac{\frac{-\Gamma}{2}-X}{a+h} \quad , \quad H_A=4576.394\ N$$
$$V_A=\frac{\Gamma}{l} \quad , \quad V_A=5\,000.0\ N$$

5.8.5 Récapitulatif

CAS	Moment en C $(N.m)$	Réactions en $A(N)$ H_A	V_A
p sur C_1C	18672.994	5175.37	24233.240
F_1 en C	41422.161	4881.487	10000.000
F_2 en C_1	8284.432	5976.297	4000.000
Γ en C_1	4916.724	4576.394	5000.000
TOTAL	73296.311	22033.31	43233.24

Remarque

Rappel : dans le poteau AC_1 : effort normal = $-V_A$, effort tranchant = H_A .

5.9 Calcul du déplacement en C

On ne considère aussi que l'énergie élastique de flexion (poutres élancées). En appliquant le Principe des Travaux virtuels sur la structure soumise aux forces fictives du paragraphe $[\S 6]$, travaillant dans les déplacements cherchés, on calcule les nombres w et d dépendant linéairement de f et g :

$$f\,u_c+g\,v_c=\int_{pot}\frac{m(M_{iso}+XM_1)}{EI_1}+\int_{charp}\frac{m(M_{iso}+XM_1)}{EI_2}=w+Xd\ ,\ \forall(f\ ,g)$$

5.9.1 Charge répartie p sur C_1C

$$\int_{pot}\frac{m\,M_{iso}}{EI_1}=\frac{2\mathrm{h}}{3\mathrm{EI}_1}\frac{ghl}{4(a+h)}\frac{-pbhl}{8(a+h)}=\frac{2}{E(a+h)^2I_1}\frac{-gpbh^3l^2}{96}$$
$$\int_{C_1C}\frac{m\,M_{iso}}{EI_2}=\frac{2}{E(a+h)^2I_2}\frac{-plhb^2}{384}(2\mathrm{f}(a+h)+gl)(h-a)$$
$$\int_{CC_2}\frac{M_{iso}}{EI_2}=\frac{b}{3\mathrm{EI}_2}\frac{pbhl}{8(a+h)}\left(\frac{fh}{2}-\frac{glh}{4(a+h)}\right)=\frac{2}{E(a+h)^2I_2}\frac{-pb^2lh^2(gl-2\mathrm{f}(a+h))}{192}$$

D'où :

$$w=\frac{2}{E(a+h)^2}\frac{-pbhl}{384}\left(\frac{4\mathrm{glh}^2}{I_1}+\frac{glb(3\mathrm{h}+a)-efb(a+h)^2}{I_2}\right)$$

Application numérique :

$I_1=2\mathrm{I}_2$; $h=2\mathrm{a}$; $p=3000\ N.m^{-1}$ (vers le bas)

$$w=\frac{2}{E(a+h)^2I_1}(gl(2\mathrm{h}+\frac{5}{2}b)-\frac{9}{2}fbh)\underbrace{\frac{-pbh^2l}{192}}_{-215\,406.5922\,N.m^3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.9.2 Charge ponctuelle F_1 en C

$$\int_{pot} \frac{m M_{iso}}{EI_1} = \frac{2\mathrm{h}}{3\mathrm{EI}_1} \frac{ghl}{4(a+h)} \frac{-F_1 hl}{4(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{-F_1 g h^3 l^2}{48}$$

$$\int_{charp} \frac{m M_{iso}}{EI_2} = \frac{2\mathrm{b}}{3\mathrm{EI}_2} \frac{ghl}{4(a+h)} \frac{-F_1 hl}{4(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{-F_1 g b h^2 l^2}{48}$$

D'où (on constate que w ne dépend pas de f pour ce chargement):

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{-F_1 g h^2 l^2}{48} \left(\frac{h}{I_1} + \frac{b}{I_2} \right)$$

Application numérique :

$I_1 = 2\mathrm{I}_2$, $h = 2\mathrm{a}$, $F_1 = 20\,000\,N$ (vers le bas)

$$w = \frac{2\mathrm{g}}{E(a+h)^2 I_1} \frac{-F_1 h^2 l^2}{48} \underbrace{(h+2\mathrm{b})}_{-3155100365.0\,N.m^5}$$

5.9.3 Charge ponctuelle F_2 en C_1

$$\int_{pot} \frac{m M_{iso}}{EI_1} = \frac{h}{3\mathrm{EI}_1} \frac{F_2 h}{2(a+h)} \left[-(2\mathrm{a}+h)\left(\frac{fh}{2} + \frac{ghl}{4(a+h)}\right) + h\left(\frac{-fh}{2} + \frac{ghl}{4(a+h)}\right) \right]$$

$$= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{-F_2 h^3}{24} (agl + 2\mathrm{f}(a+h)^2)$$

$$\int_{charp} \frac{m M_{iso}}{EI_2} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{-F_2 b h^2}{24} (agl + 2\mathrm{f}(a+h)^2)$$

D'où :

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{-F_2 h^2}{24} (agl + 2\mathrm{f}(a+h)^2) \left(\frac{h}{I_1} + \frac{b}{I_2}\right)$$

Application numérique :

$I_1 = 2\mathrm{I}_2$, $h = 2\mathrm{a}$, $F_2 = 10\,000\,N$ (vers la gauche)

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} (gl + 9\mathrm{gh}) \underbrace{\frac{-F_2 h^3 (h+2\mathrm{b})}{48}}_{-3151003.65\,N.m^4}$$

5.9.4 Couple ponctuel Γ en C_1

$$\int_{pot} \frac{m M_{iso}}{EI_1} = \frac{h}{3\mathrm{EI}_1} \frac{\Gamma h}{2(a+h)} \left[\left(\frac{fh}{2} + \frac{glh}{4(a+h)}\right) + \left(\frac{-fh}{2} + \frac{glh}{4(a+h)}\right) \right]$$

$$= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{\Gamma h^3 lg}{24}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\int_{charp} \frac{m M_{iso}}{EI_2} = \frac{b}{3\mathrm{EI}_2} \frac{\Gamma h}{2(a+h)} \left[-(2\mathrm{a}+h)\left(\frac{fh}{2} + \frac{glh}{4(a+h)}\right) + h\left(\frac{-fh}{2} + \frac{glh}{4(a+h)}\right) \right]$$
$$= \frac{-2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{\Gamma bh}{24} (agl + 2\mathrm{f}(a+h)^2)$$

Application numérique :

$I_1 = 2\mathrm{I}_2 \quad ; \quad h = 2\mathrm{a} \quad ; \quad \Gamma = -100\,000\ N.m$

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \underbrace{\frac{\Gamma h^2}{24}}_{-3151003.65\ N.m^4} (gl(h-b) - 9\mathrm{fhb})$$

5.9.5 Calcul de $d = \int \frac{m \cdot M_1}{EI}$

$$\int_{pot} \frac{mM_1}{EI_1} = \frac{2\mathrm{h}}{3\mathrm{EI}_1} \frac{glh}{4(a+h)} \frac{h}{a+h} = \frac{2}{E(a+h)^2 I^1} \frac{glh^3}{12}$$
$$\int_{charp} \frac{m M_1}{EI_2} = \frac{2\mathrm{b}}{EI_2} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{a+h}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{a+h}\right) \right] \frac{glh}{4(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{glbh(3\mathrm{h}+a)}{24}$$

D'où (on constate que d ne dépend pas de f) :

$$d = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{glh}{24} \left(\frac{2\mathrm{h}^2}{I_1} + \frac{b(3\mathrm{h}+a)}{I_2} \right)$$

Application numérique :

$I_1 = 2\,I_2, \ h = 2\mathrm{a}$

$$d = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} g \frac{lh^2}{24} \underbrace{(2\mathrm{h}+7\mathrm{b})}_{-4874.2564\ N.m^4}$$

5.9.6 Récapitulatif des déplacements u_c et v_c

$I_1 = 5.0\,E-4\ m^4$
$E = 210\,000\ MPA$

CAS	X	$X\,\bar{d}$	w_v
pression sur C_1C	18672.994	91016960.3	–184930109.4
F_1 en C	41422.161	201902233.4	–315100365.0
F_2 en C_1	8284.432	40380445.6	–63020073.0
Γ en C_1	4916.724	23965373.4	14775091.25

CAS	w_h	$u_c(m)$	$v_c(m)$
pression sur C_1C	83519999.94	0.0110476	–0.012422374
F_1 en C	0.00	0.00	–0.01497330
F_2 en C_1	–226872262.8	–0.03000956	–0.00299466
Γ en C_1	206790328.5	0.0273532	–0.001215646

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Note :

$d=\frac{2}{E(a+h)^2 I_1} g \bar{d}$, avec : $\bar{d}=4\,874.2564\,m^4$

$w=\frac{2}{E(a+h)^2 I_1}(g w_v+f w_h)$ voir plus haut

$u_c=\frac{2}{E(a+h)^2 I_1} w_H$; $v_c=\frac{2}{E(a+h)^2 I_1}(w_v+X \bar{d})$

$\frac{2}{E(a+h)^2 I_1}=1.32275132\,E-10\,N^{-1}m^{-4}$

Comparaison *Aster* - référence analytique (R.)

CAS		**Moment en** $C(N.m)$	**Réaction** $H_A(N)$	**Réaction** $V_A(N)$	**Déplacement** $u_c(m)$	**Déplacement** $v_c(m)$
P sur C_1C	R :	18672.994	5175.37	24233.24	0.0110476	–0.012422374
	Aster :	18673.20	5175.36	24233.2	0.0110472	–0.0124233
F_1 en C	R :	41422.161	4881.487	10000.00	0.00000	–0.01497330
	Aster :	41422.40	4881.47	10000.0	0.0000	–0.0
F_2 en C_1	R :	8284.432	5976.297	4000.00	–0.03000956	–0.00299466
	Aster :	8284.34	5976.31	4000.0	–0.0300098	–0.00299450
Γ en C_1	R :	4916.724	4576.394	5000.00	0.0273532	–0.001215646
	Aster :	4916.62	4576.38	5000.0	0.0273536	–0.00121583

Nota :

Le calcul *Aster* a été réalisé en prenant des éléments très élancés, de telle sorte que : $Sl^2 \ll I$.
Ainsi, l'énergie de flexion est prédominante. Les valeurs du calcul *Aster* sont issues du cas-test $VPCS$ appelé $SSLL14$, avec les données suivantes :

$I_1=5.0\,E-4\,m^4$; $I_2=2.5\,E-4\,m^4$; $E=210\,000\,MPa$

$h=2\mathrm{a}=8\,m$; $l=20\,m$; $b=\frac{l}{2}\sqrt{1.16}$

$p=3000\,N.m$ (vers le bas),
$F_1=20\,000\,N$ (vers le bas),
$F_2=10\,000\,N$ (vers la gauche),
$\Gamma=-100\,000\,Nm$ (sens aiguille de montre).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)