SHLV301 – Réponse harmonique par sous-structuration : poutre bi-appuyée

Résumé :

La structure étudiée est une poutre bi-appuyée soumise à une charge répartie variant de manière harmonique au cours du temps.
Cette poutre est déformable à l'effort tranchant. Elle est modélisée par des éléments de volume hexaédriques à 20 nœuds (modélisation 3D).

La réponse harmonique est calculée par la méthode de sous-structuration dynamique de Mac-Neal.

Les résultats sont comparés à des valeurs obtenues analytiquement pour un modèle de poutre de Timoshenko déformable à l'effort tranchant et tenant compte de l'inertie rotatoire des sections.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

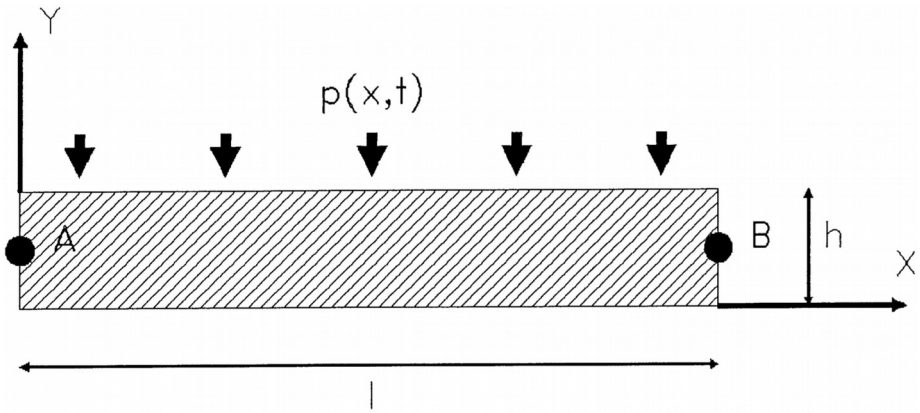


Figure 1.1-1 : Géométrie du problème

Hauteur : $h=0.2\,\mathrm{m}$
Largeur : $b=0.1\,\mathrm{m}$
Longueur : $L=2\,\mathrm{m}$
Section : $A=b\times h=0.02\,\mathrm{m}$
Inertie : $I=\dfrac{b\times h^3}{12}=1.66\times10^{-5}\,\mathrm{m}$
Coefficient de réduction de section $k'=\dfrac{5}{6}$

1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young	$E=2.1\times10^{11}\,Pa$
Coefficient de Poisson	$\nu=0.3$
Masse volumique	$\rho=7800.0\,kg.m^{-3}$
Module de cisaillement	$G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}=8.076\times10^{10}\,\mathrm{Pa}$
Coefficients de l'amortissement de Rayleigh	$\alpha=1.6\times10^{-5}\,\mathrm{s}$ et $\beta=16\,\mathrm{s}^{-1}$

1.3 Conditions aux limites et chargements

On autorise que la flexion dans le plan XY et l'extension le long de l'axe X. Le modèle étant volumique, les conditions aux limites diffèrent quelque peu de celles que l'on imposerait à un modèle poutre.

Déplacement imposé :

En $X=0$, $Y=h/2$	$DX=0$, $DY=0$
En $X=L$, $Y=h/2$	$DX=0$, $DY=0$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En $Z=b/2$	$DZ=0$

Aux conditions précédentes, on ajoute la contrainte de planéité des sections en $X=0$ et $X=L$. Cette contrainte peut s'exprimer comme suit. Désignons par $x^T=(X,Y,Z)$ le vecteur des coordonées et par $u^T=(DX,DY,DZ)$ le vecteur des déplacements; la position d'un point est repérée par le vecteur $x'^T=x^T+u^T=(X',Y',Z')$. Soient A, B et C trois points non-alignés de la section. Un point quelconque P est astreint à la condition :

$$\begin{vmatrix} X'_P & Y'_P & Z'_P & 1 \\ X'_A & Y'_A & Z'_A & 1 \\ X'_B & Y'_B & Z'_B & 1 \\ X'_C & Y'_C & Z'_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Force imposée :

En $Y=h$, pour tout X, la mise en charge est définie par :

$$p(x,t)=p(x)\sin(\omega t)$$

avec $p(x)=p_0=5.0\times10^4\,\mathrm{N.m^{-1}}$ et $\omega=2000\,\pi\,\mathrm{rd.s^{-1}}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est obtenue analytiquement pour une poutre de Timoshenko, prenant en compte la déformation à l'effort tranchant et l'inertie rotatoire des sections.
La solution est développée en série des modes propres. Les aspects théoriques sont développés dans la référence donnée en 2.4.

2.1.1 Base modale

Définissons les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$\lambda_n = k_n L$ longueurs d'onde

$\Omega_n = \frac{\rho A L^4}{EI} \omega_n^2$ valeurs propres

$j = \frac{I}{A L^2}$ inertie rotatoire

$g = \frac{EI}{k' A G L^2}$ coefficient de cisaillement

Chaque mode propre de nombre d'ondes k_n est caractérisé par les grandeurs suivantes :
Les fréquences propres :

$$\Omega_{1,2} = \frac{\rho A L^4}{EI} \omega_{1,2}^2 = \frac{(g+j)\lambda_n^2 + 1 \pm \sqrt{(g-j)^2 \lambda_n^4 + 2(g+j)\lambda_n^2 + 1}}{2 g j}$$

avec

$$\lambda_n = n\pi , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

(les indices 1 et 2 correspondent aux signes + et – devant la racine).

Les masses généralisées :

$$\mu_{1,2} = \rho A = \left(k_n - \frac{\omega_{1,2}^2 \rho}{k_n k' G} \right)^2 \rho I .$$

Les pourcentages d'amortissement critique :

$$\epsilon_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\alpha \omega_{1,2} + \frac{\beta}{\omega_{1,2}} \right)$$

2.1.2 Réponse harmonique

L'amplitude et la phase de la flèche W sont données par

$$W(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \left[\sum_{m=1}^{2} \frac{1}{\mu_m (\omega_m^2 - \omega^2 + 2i \epsilon_m \omega_m \omega)} \right] \sin(k_n x)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec

$$p_n = \frac{2\,p_0}{n\,\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

2.2 Résultats de référence

Position	Flèche W	
	Amplitude (m)	Phase
$x=\frac{L}{4}$	2.136×10^{-5}	$22.4°$
$x=\frac{L}{2}$	1.342×10^{-5}	$-121.5°$
$x=3\frac{L}{4}$	2.136×10^{-5}	$22.4°$

Les grandeurs effectivement testées dans le cas-test sont les parties réelles et imaginaires dont on donne les valeurs ci-dessous.

Position	Flèche W	
	Partie réelle (m)	Partie imaginaire (m)
$x=\frac{L}{4}$	$-1.9599467159360556\times10^{-5}$	$-8.4917893914738073\times10^{-6}$
$x=\frac{L}{2}$	$-6.9993870268574731\times10^{-6}$	$-1.1450108350939712\times10^{-5}$
$x=3\frac{L}{4}$	$-1.9599467159360556\times10^{-5}$	$-8.4917893914738073\times10^{-6}$

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

ROBERT G., Solutions analytiques en dynamiques des structures, Rapport Samtech n° 121, Liège, 1996.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation A

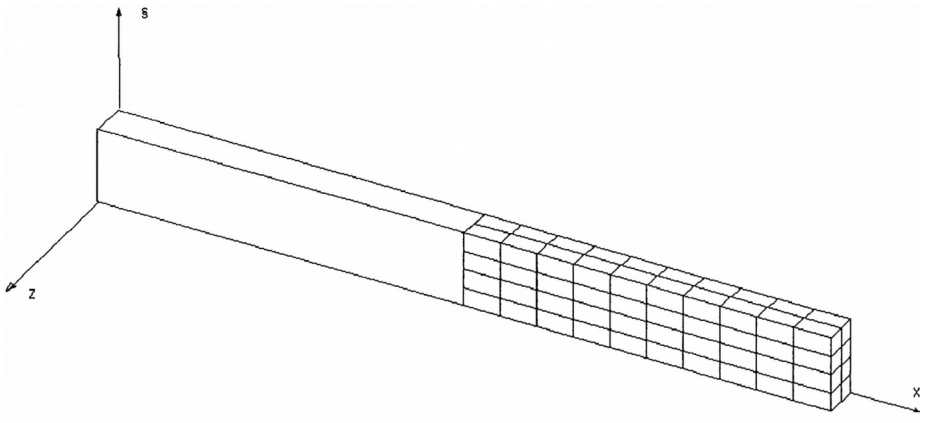


Figure 3.1 Maillage de la géométrie du problème.

La poutre est divisée en deux parties égales. Chaque moitié est représentée par une sous-structure. Celles-ci sont générées par la méthode de Mac-Neal.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 557
Nombre de mailles et types : 80 HEXA20, 20 QUAD8

3.3 Grandeurs testées et résultats

Lieu	Type de grandeur	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
$X=\frac{L}{4}$ (première moitié)	DY	$1.95994\times10^{-5}+8.49179\times10^{-6}\,j$	'ANALYTIQUE'	5.0
$X=\frac{L}{2}$ (première moitié)	DY	$-6.999387\times10^{-6}-1.14501\times10^{-5}\,j$	'ANALYTIQUE'	5.0
$X=\frac{L}{2}$ (seconde moitié)	DY	$-6.999387\times10^{-6}-1.14501\times10^{-5}\,j$	'ANALYTIQUE'	5.0
$X=3\frac{L}{4}$ (seconde moitié)	DY	$1.95994\times10^{-5}+8.49179\times10^{-6}\,j$	'ANALYTIQUE'	5.0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Synthèse des résultats

Ce test permet de valider la sous-structuration dynamique avec interface de type Mac-Neal. La solution est comparée à une solution analytique. Les résultats obtenus sont en bon accord.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)