SHLL101 - Poutre droite. Analyse harmonique

Résumé :

Ce problème bidimensionnel consiste à calculer les efforts présents dans une poutre soumise à une traction ou à une flexion lors d'une analyse harmonique. La solution de référence est obtenue à partir des équations discrétisées.

Ce test comporte deux modélisations.

Pour la première modélisation, quatre sollicitations sont testées :

- force de traction,
- force de traction et matériau présentant un amortissement,
- force de flexion,
- force de flexion et matériau présentant un amortissement.

Pour la deuxième modélisation, deux sollicitations sont testées :

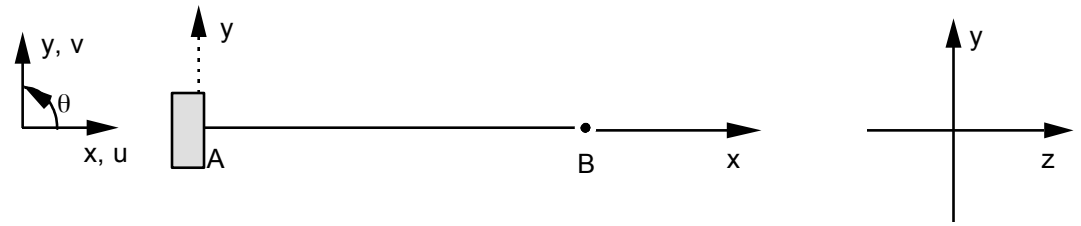
- force de traction,
- force de traction et matériau présentant un amortissement.

La deuxième modélisation permet de tester les chargements complexes imposés par la commande AFFE_CHAR_MECA_C.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Les caractéristiques géométriques de la poutre constituant le modèle mécanique sont les suivantes :

Longueur : $L=10\,m$

Section transversale	Aire	$IZ=IY$	JX
	$3.439\,10^{-3}\,m^2$	$1.377\,10^{-5}\,m^4$	$2.754\,10^{-5}\,m^4$

Les coordonnées (en mètres) des points caractéristiques de la poutre sont :

	A	B
x	0.	10.
y	0.	0.

1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés du matériau constituant la poutre sont :

$E=1.658\times10^{11}\,Pa$

$\nu=0.3$

$\rho=1.3404106\,104\,kg\,.\,m^{-3}$

$\alpha=\text{AMOR_ALPHA}=0.001$

$\beta=\text{AMOR_BETA}=0.$

1.3 Conditions aux limites et chargements

La condition aux limites qui caractérise ce problème est l'encastrement du point A et s'écrit :

$u=v=0.$

$\theta=0.$

Pour le chargement on a :

$Fx=3000.\,N$		$Fy=Fz=0.$	(effort de traction)
$Fx=0.$	$Fy=3000.\,N$	$Fz=0.$	(effort de flexion)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Si la poutre est modélisée par une poutre d'Euler-Bernoulli et par un seul élément fini, le problème harmonique peut s'écrire de la façon suivante :

problème en traction :

$$(1+i\alpha\omega)\frac{ES}{L}u(B)-\omega^2\frac{\rho S L}{6}u(B)=F_x(B)$$

d'où $u(B)=\dfrac{F(B)}{\dfrac{ES}{L}-\omega^2\dfrac{\rho S L}{6}+i\alpha\omega\dfrac{ES}{L}}$

problème en flexion :

$$\left[-\omega^2\begin{bmatrix}\frac{13L}{35} & \frac{-11L^2}{210}\\ \frac{-11L^2}{210} & \frac{L^3}{105}\end{bmatrix}+(1+i\alpha\omega)\frac{12EI_y}{L^3}\begin{bmatrix}1 & \frac{-L}{2}\\ \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{3}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}v(B)\\ \theta(B)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_y(B)\\ 0\end{bmatrix}$$

Remarque :

Si le matériau ne présente pas d'amortissement, on a alors : AMOR_ALPHA = $\alpha=0$.

Les efforts au point B se calculent de la manière suivante :

problème en traction :

$$N(B)=\left(\frac{ES}{L}-\omega^2\frac{\rho S L}{6}\right)u(B)$$

problème en flexion :

$$\begin{bmatrix}VY(B)\\ MFZ(B)\end{bmatrix}=\left[-\omega^2\begin{bmatrix}\frac{13L}{35} & \frac{-11L^2}{210}\\ \frac{-11L^2}{210} & \frac{L^3}{105}\end{bmatrix}+\frac{12EI_y}{L^3}\begin{bmatrix}1 & \frac{-L}{2}\\ \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{3}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}v(B)\\ \theta(B)\end{bmatrix}$$

On résout analytiquement les systèmes 2×2 pour obtenir la solution.

2.2 Résultats de référence

Les résultats de référence sont les déplacements, les vitesses, les accélérations et les efforts généralisés obtenus au point B lors de l'analyse harmonique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3 Remarque pour la modélisation B

Pour la modélisation B, on veut tester dans le cas du problème en traction le mot-clé FORCE_POUTRE qui permet d'appliquer des efforts répartis. Pour obtenir la même solution que la poutre soumise à force nodale en son extrémité, la relation entre l'effort réparti constant et la force nodale est :

$$F_x(B)=\frac{f\,L}{2}$$

Avec les valeurs données au paragraphe 1.3, on a : $f=600\,N/m$

2.4 Incertitude sur la solution

Si les hypothèses sont vérifiées (poutre d'Euler-Bernoulli), la solution est analytique.

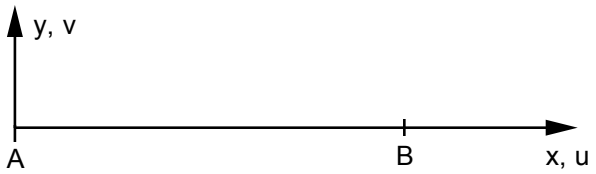
2.5 Références bibliographiques

1) [R3.08.01] Éléments de poutres "exacts" (droits et courbes).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



La poutre est constituée d'une seule maille.

La modélisation utilisée pour la poutre est celle d'Euler-Bernoulli (POU_D_E).

L'extrémité A est encastrée :

```
DX = DY = DZ = 0.      DRX = DRY = DRZ = 0.
```

Les vitesses et accélérations sont obtenues de façon suivantes en harmonique :

$$v(B) = i\,\omega\,u(B)$$
$$a(B) = -\omega^2 u(B)$$

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2

Nombre de mailles et types : 1 maille de type SEG 2

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées (forme réel-imaginaire)

Problème 1 : traction

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(5.318 10^{-5}, 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(0., 3.341 10^{-3})	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(–2.099 10^{-1}, 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(3000., 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05

Problème 2 : flexion

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DY	(1.828 10^{-2}, 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(1.82 10^{-2}, 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DY	(0., 1.1489)	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(0., 1.1438)	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DY	(–72.19, 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(–71.86, 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	VY	(3000., 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05

Problème 3 : traction + amortissement

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(5.296 10^{-5}, –3.363 10^{-6})	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(2.113 10^{-4}, 3.327 10^{-3})	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(–2.091 10^{-1}, 1.327 10^{-2})	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(2.9879 10^{3}, –1.897 10^{2})	'ANALYTIQUE'	0,05

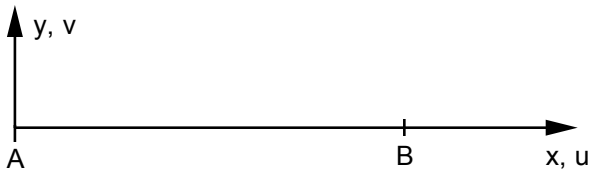
Problème 4 : flexion + amortissement

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DY	(1.746 10^{-2}, –4.469 10^{-3})	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(1.7579 10^{-2}, –3.402 10^{-3})	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DY	(2.808 10^{-1}, 1.097)	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(2.138 10^{-1}, 1.1045)	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DY	(–68.95, 17.64)	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(–69.4, 13.43)	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	VY	(3.0215 10^{3}, 1.212 10^{2})	'ANALYTIQUE'	0,05
		MFZ	(–1.567 10^{2}, –8.583 10^{2})	'ANALYTIQUE'	0,05

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



La poutre est constituée d'une seule maille.

La modélisation utilisée pour la poutre est celle d'Euler-Bernoulli (POU_D_E).

L'extrémité A est encastrée :

```
DX = DY = DZ = 0.      DRX = DRY = DRZ = 0.
```

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2

Nombre de mailles et types : 1 maille de type SEG 2

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Grandeurs testées (forme réel-imaginaire)

Problème 1 : traction (effort réparti réel : partie imaginaire nulle)

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(5.318 10^{-5}, 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(0., 3.341 10^{-3})	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(–2.099 10^{-1}, 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(3000., 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05

Problème 2 : traction (effort réparti complexe : partie rélle nulle)

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(0., 5.318 10^{-5})	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(-3.341 10^{-3} , 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(0., –2.099 10^{-1})	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(0., 3000.)	'ANALYTIQUE'	0,05

Problème 3 : traction + amortissement (effort réparti réel : partie imaginaire nulle)

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(5.296 10^{-5}, –3.363 10^{-6})	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(2.113 10^{-4}, 3.327 10^{-3})	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(–2.091 10^{-1}, 1.327 10^{-2})	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(2.9879 10^{3}, –1.897 10^{2})	'ANALYTIQUE'	0,05

Problème 4 : flexion + amortissement (effort réparti complexe : partie réelle nulle)

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(3.363 10^{-3} , 5.296 10^{-5})	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(-3.327 10^{-3} , 2.113 10^{-4})	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(-1.327 10^{-2}, -2.091 10^{-1})	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(1.897 10^{2} , 2.9879 10^{3})	'ANALYTIQUE'	0,05

Quand l'effort réparti est appliqué en tant que partie imaginaire du chargement, la solution de référence est obtenue à partir de celle de la modélisation A en échangeant partie réelle et partie imaginaire et en changeant le signe des nouvelles parties réelles.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

On retrouve bien les résultats analytiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)