SDLL403 - Vibrations d'un pendule en rotation

Résumé

Le domaine d'application de ce test est l'analyse modale des structures. La structure étudiée est un pendule en rotation autour d'un axe fixe et plongé dans un champ de gravité. Le pendule est lui-même articulé autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de rotation et situé à une certaine distance de celui-ci.
On s'intéresse aux six premières fréquences propres.

L'intérêt de ce test réside dans les aspects suivants :

- analyse modale avec prise en compte de contraintes initiales (raideur géométrique)
- analyse modale avec prise en compte du raidissement centrifuge
- écart relatif important entre deux fréquences successives du spectre

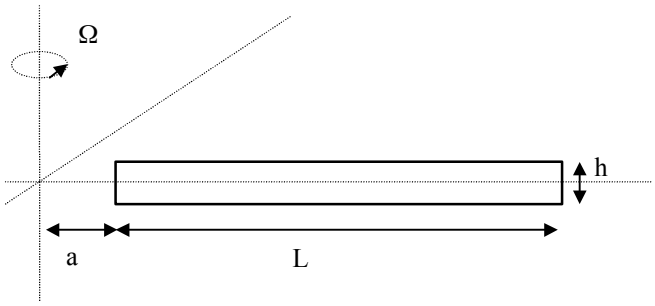
Actuellement, la prise en compte du raidissement centrifuge n'est possible qu'avec des éléments volumiques. L'élément utilisé est l'élément `HEXA20` et on emploie la méthode de Sorensen pour le calcul des fréquences propres.

La première fréquence propre est comparée à une référence analytique. Les fréquences suivantes sont comparées à des valeurs numériques obtenues par un logiciel indépendant de *Code_Aster* et utilisant des modélisations 'poutre' et 'contrainte plane'.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Caractéristiques :

Longueur du pendule	$L=0.6\,m$
Excentricité	$a=0.1\,m$
Hauteur du profil	$h=0.01\,m$
Largeur du profil	$b=0.004\,m$
Section	$S=bh$
Inertie de flexion	$I_Z=bh^3/12$

1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young	$E=7.E10\,N/m^2$
Coefficient de Poisson	$\nu=0.3$
Masse volumique	$\rho=2700\,kg/m^3$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargement

La poutre est articulée au point A. L'axe de l'articulation est l'axe Y. L'état de contrainte initial qui permet de réaliser le calcul des raideurs géométrique et centrifuge est obtenu en imposant une vitesse de rotation et la pesanteur.

Accélération de la pesanteur $g=-9.81\,m/s^2$ (parallèle à l'axe Z)
Vitesse de rotation $\Omega=10\,rad/s$

La position d'équilibre statique θ_0 correspondant à la mise en charge est calculée par la relation :

$$3\,g\cos\theta_0=\Omega^2(3a+2L\cos\theta_0)\sin\theta_0$$

On trouve $\theta_0=11.269931365\,°$

Les conditions sur les déplacements au point A sont les suivantes :

$$u=v=w=0\ ;\ \Phi_X=\Phi_Z=0$$

On considère de plus que la section passant par A reste rigide.

1.4 Conditions initiales

Sans objet en analyse modale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

- première fréquence propre

Les données du problème sont choisies de telle manière que les raideurs en flexion et en extension sont grandes vis-à-vis des raideurs géométrique et centrifuge. Dans ces conditions, la valeur de la première fréquence propre s'obtient analytiquement en considérant un pendule rigide.

En prenant comme degré de liberté l'angle θ entre le pendule et l'axe X l'équation du mouvement s'écrit :

$$2L\ddot{\theta} = 3g\cos\theta - \Omega^2(3a + 2L\cos\theta)\sin\theta$$

On considère ici les petites oscillations $\Delta\theta$ du pendule autour d'une position d'équilibre statique θ_0. En linéarisant l'équation du mouvement au voisinage de cette position, on obtient l'équation aux petites perturbations :

$$2L\Delta\ddot{\theta} + \left[3g\sin\theta_0 + \Omega^2(3a\cos\theta_0 + 2L\cos 2\theta_0)\right]\Delta\theta = 0$$

On en déduit la pulsation du premier mode :

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}\sin\theta_0 + \Omega^2\left[\frac{3a}{2L}\cos\theta_0 + \cos 2\theta_0\right]}$$

Cette pulsation propre peut encore s'écrire sous la forme

$$\omega = \sqrt{\frac{K(\sigma) + K(\Omega^2)}{I}}$$

avec

$K(\sigma) = \frac{1}{2}\rho S L^2 g\sin\theta_0 + \rho S L^2\Omega^2\left[\frac{a}{2}\cos\theta_0 + \frac{L}{3}\cos^2\theta_0\right]$ (raideur géométrique)

$K(\Omega^2) = -\frac{1}{3}\rho S L^3\Omega^2\sin^2\theta_0$ (raideur centrifuge)

$I = \frac{1}{3}\rho S L^3$ (inertie en rotation)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- autres fréquences propres

Les valeurs de référence des fréquences 2 à 6 sont obtenues numériquement au moyen de la version 7 du logiciel SAMCEF. On a utilisé deux modélisations différentes : 20 éléments de poutre déformable à l'effort tranchant et 20×4 éléments de membrane à 8 noeuds. Les résultats obtenus dans les deux cas sont identiques si l'on se limite aux 4 premiers chiffres significatifs. Vu que les corrections de raideur sont petites vis-à-vis des termes de raideur linéaire, on peut vérifier que les fréquences 2 à 6 diffèrent peu des valeurs analytiques obtenues pour une poutre élancée non déformable à l'effort tranchant. En fait, l'écart maximal entre les valeurs numériques et analytiques n'excède pas $1\ \%$.

2.2 Résultats de référence

Les 5 premières charges critiques sont classées par ordre de module croissant.

Mode	Fréquence propre (Hz)
1	1.75556
2	100.2
3	324.0
4	674.4
5	1150.
6	1748.

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique pour la première fréquence. Solution numérique pour les autres. La tolérance estimée des résultats numériques est de $1\ \%$.

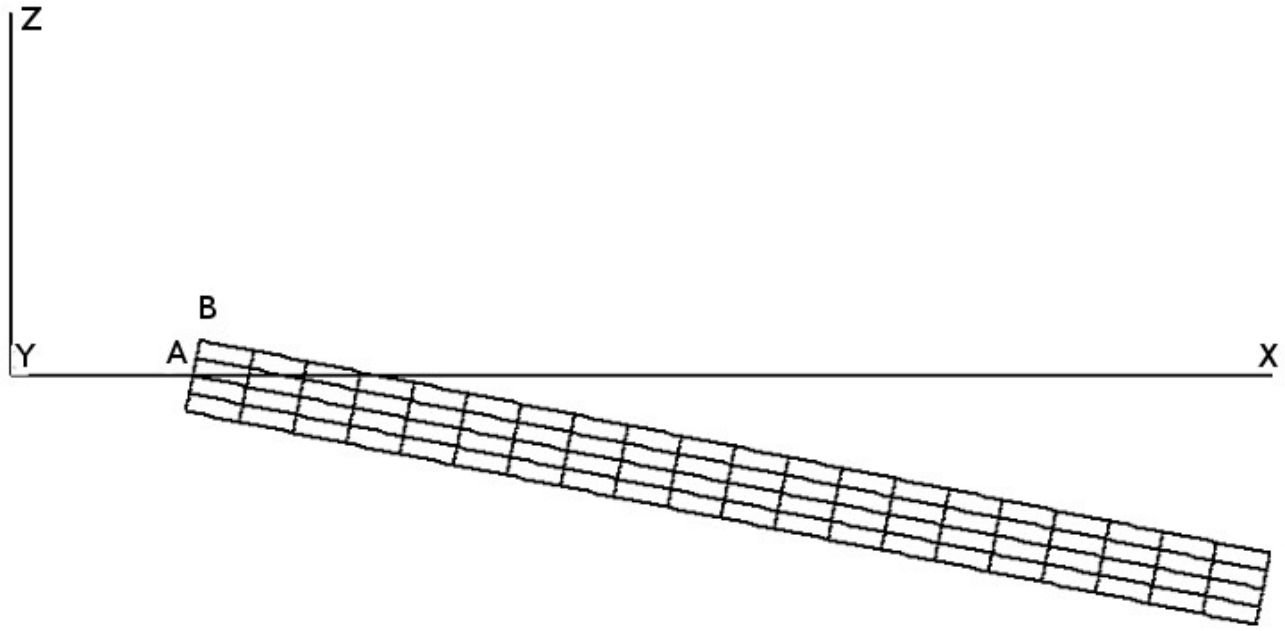
2.4 Références bibliographiques

Sans objet.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



La poutre est maillée au moyen d'éléments HEXA20.

Conditions aux limites :

Au point A tel que $X=0.1$, $Y=0$, $Z=0$:

$$DX=DY=DY=DRX=DRZ=0$$

D'autre part, tous les noeuds de la section passant par A sont liés rigidement.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 1077
Nombre de mailles : 160 HEXA20
8 QUAD8

3.3 Grandeurs testées et résultats

Fréquences en Hz

Mode	Référence	*Code_Aster*	Tolérance (%)
1	1.75556	1.75979	0.6
2	100.2	100.272	0.1
3	324.0	324.65	0.3
4	674.4	677.1	0.5
5	1150.	1157.8	0.7
6	1748.	1766.7	1.1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Synthèse des résultats

Bon accord avec la solution de référence (moins de $1.\%$ d'erreur sur tous les modes sauf sur le premier où l'erreur est de 2.2%).

Ce test n'a pu être réalisé avec un élément de poutre car le calcul de la matrice de rigidité centrifuge n'est pas disponible pour ce type d'élément. De même, comme elle n'est pas disponible pour les éléments discrets, nous n'avons pas pu utiliser de liaison 3D-poutre. Afin de palier ce problème, tous les nœuds de la surface contenant le point A ont été liés par un liaison solide.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)