SDLL113 - Sous-structuration dynamique transitoire : poutre en traction simple

Résumé :

La structure considérée est une poutre de section annulaire en traction simple, encastrée d'un côté, et soumise à son extrémité à une force de type Heaviside. Sa réponse dynamique transitoire est calculée par sous-structuration.

La poutre est modélisée par des éléments de type poutres de Timoshenko (modèle linéique). Deux modélisations sont proposées selon que la poutre est amortie ou non. L'amortissement testé est de type RAYLEIGH (amortissement proportionnel).

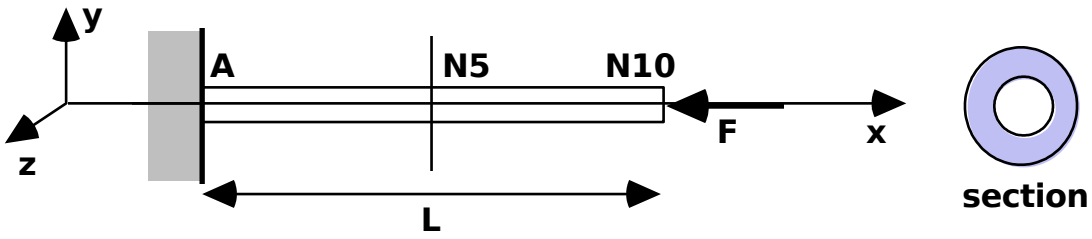
Les résultats de référence sont issus d'un calcul transitoire direct par recombinaison modale sans sous-structuration. Ce test permet donc de valider les outils de calcul de réponse transitoire par sous-structuration, dans le cas linéaire.

Une troisième modélisation traitant exactement le même problème amorti que la deuxième a été ajoutée afin de traiter un cas d'utilisation d'une méthode de condensation dynamique où la résolution du problème dynamique sur base physique s'opère sur un modèle mixte constitué du macro-élément de la partie droite de la structure et d'un modèle physique réduit à sa partie gauche. Les résultats sont exactement les mêmes que ceux de la deuxième modélisation comme espéré.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Longueur de la poutre : $L=1\,m$

Section : Rayon intérieur $=0.09\,m$
Rayon extérieur $=0.10\,m$

1.2 Propriétés des matériaux

$E=10^{10}\,Pa$ $\nu=0.3$ $\rho=1.10^{4}\,kg/m^{3}$

Modélisation A : pas d'amortissement
Modélisation B : Amortissement proportionnel (RAYLEIGH) :

$$C=\alpha K+\beta M \quad \text{avec} \quad \alpha=6.5\,10^{-6}s \quad \text{et} \quad \beta=16.0\,s^{-1}\,.$$

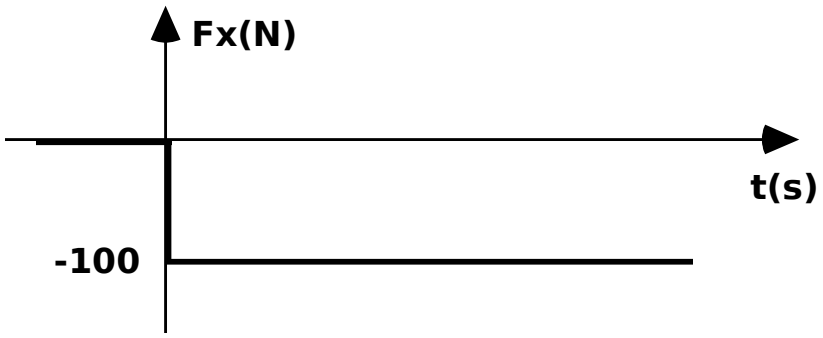
Ces valeurs correspondent à un amortissement réduit de 1 % sur le premier mode de la structure.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Sur toute la structure on impose $DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0$.

Au point A on impose la condition d'encastrement $DX=0$.

En $N10$ on applique une force constante à partir de l'instant $t=0$: $F_x=-100\,N$.



1.4 Conditions initiales

La structure est initialement au repos.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Il existe une solution analytique détaillée dans la référence [bib1].

On adopte les notations suivantes :

E : module de Young
ρ : masse volumique
L : longueur de la barre
A : section de la barre
N : effort normal dirigé selon l'axe X
α , β : coefficients de l'amortissement de Rayleigh

On pose également :

$$\omega_n = (2n-1)\frac{\pi}{2} \text{ où } n = 1,2,3, ...$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}(\alpha \omega_n + \beta / \omega_n)$$

Le déplacement en un point $M(x)$ quelconque est donné par :

$$u(x,t) = \frac{Nx}{EA} + \frac{8NL}{\pi^2 EA} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\omega_n \varepsilon_n t}}{(2n-1)^2} \left\{ \cos\left(\sqrt{1-\varepsilon_n^2}\,\omega_n t\right) + \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{1-\varepsilon_n^2}} \sin\left(\sqrt{1-\varepsilon_n^2}\,\omega_n t\right) \right\}$$

2.2 Résultats de référence

Les valeurs des champs de déplacement, de vitesse et d'accélération de l'extrémité libre (nœud $N10$) valent à l'instant $t = 0.0195\, s$:

	Déplacement (m)	**Vitesse** $(m.s^{-1})$	**Accélération** $(m.s^{-2})$
Calcul sans amortissement	–8.3766x10 –7	1.6753 x 10 –3	0
Calcul avec amortissement structural	–1.00462x10 –6	1.20384x10 –3	–1.21564

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

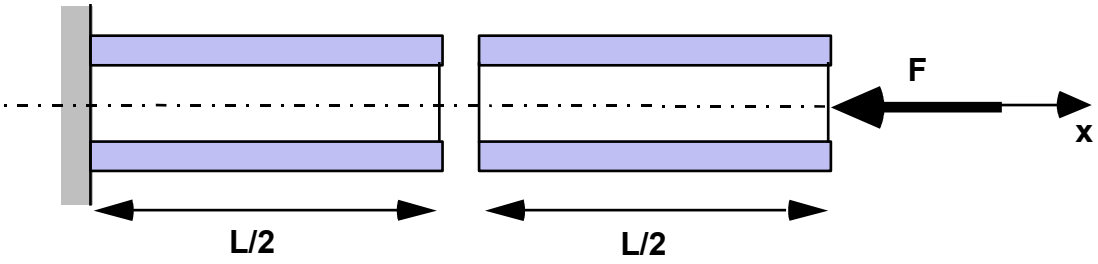
[1] G. ROBERT : Solutions analytiques en dynamique des structures. Rapport Samtech n°121, mars 1996.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

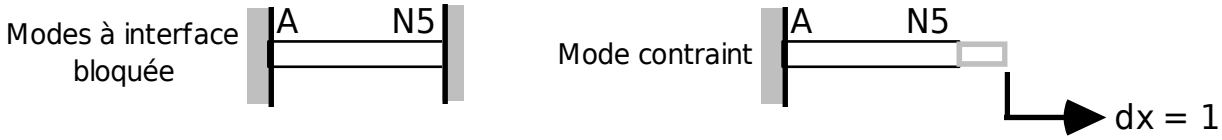
La poutre est découpée en deux parties de dimensions égales. Chaque sous-structure considérée est maillée en segments auxquels sont affectés des éléments de type POU_D_T.



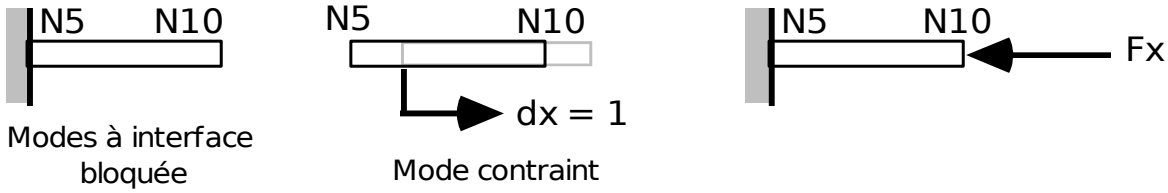
La structure est étudiée à l'aide de la méthode de sous-structuration transitoire avec interfaces de type "Craig-Bampton" (interfaces bloquées).

La base modale utilisée est composée de 4 modes propres pour la sous-structure de gauche, de 5 modes propres pour la sous-structure de droite auxquels s'ajoutent les modes contraints associés aux degrés de liberté d'interface (au nombre de 2).

Base de projection de la sous-structure de gauche :



Base de projection de la sous-structure de droite :



3.2 Caractéristiques des maillages

Le maillage de la poutre complète pour réaliser le calcul de référence présente les caractéristiques suivantes :

fichier de type maillage Aster (.mail)
Nombre de nœuds = 11
Nombre de mailles = 10 SEG2

Le maillage de la demi-poutre pour réaliser le calcul par sous-structuration, présente les caractéristiques suivantes :

fichier de type Ideas (.msup)
Nombre de nœuds = 6
Nombre de mailles = 5 SEG2

3.3 Fonctionnalités testées

On teste les fonctionnalités de calcul dynamique par sous-structuration ainsi que la restitution dans l'espace physique.

3.4 Grandeurs testées et résultats

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les valeurs sont restituées sur un maillage squelette constitué des deux sous-structures. Le maillage initial qui contient 6 nœuds est dupliqué pour créer la sous-structure de droite. Le nœud d'extrémité correspond donc au nœud 12.

Identification	Référence (poutre complète)	Sous-structuration	Différence (%)
Nœud 12 : déplacement (m)	–6.2818E–7	–6.2818E–7	< 0.1
Nœud 12 : vitesse $(m.s^{-1})$	2.0957E–3	2.0957E–3	< 0.1
Nœud 12 : accélération $(m.s^{-2})$	1.1139E+1	1.1139E+1	< 0.1

3.5 Remarques

On peut s'étonner que la référence adoptée corresponde à la poutre complète modélisée par 10 éléments et non à la solution analytique. Il se trouve que le développement de la solution en série des modes propres converge très lentement : la solution modale est ici très éloignée de la solution théorique. La comparaison pertinente est donc bien celle retenue.

Le calcul par recombinaison modale est réalisé sur la base modale complète de la structure (11 modes) compte tenu de la discrétisation adoptée. De même, la dimension de la base de projection utilisée pour le calcul par sous-structuration dynamique est de 11 (sous-structure de gauche : 4 modes propres + 1 mode contraint ; sous-structure de droite : 5 modes propres + 1 mode contraint). Il est donc normal d'obtenir un excellent accord entre la modélisation de la poutre complète et celle de la poutre divisée en deux sous-structures.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Les caractéristiques de cette modélisation sont identiques à la précédente (modélisation A). La seule différence réside dans le fait que la structure est amortie. L'amortissement utilisé est de type proportionnel :

$$C=\alpha K+\beta M \quad \text{avec} \quad \alpha=6.5\text{x}10^{-6}s \quad \text{et} \quad \beta=16.0\,s^{-1}\ .$$

Ces valeurs correspondent à un amortissement réduit de 1 % sur le premier mode de la structure.

4.2 Caractéristiques du maillage

Les caractéristiques du maillage sont également identiques à celles de la modélisation A (cf. [§ 3.2]).

4.3 Fonctionnalités testées

On teste les fonctionnalités de calcul dynamique, avec prise en compte de l'amortissement, par sous-structuration ainsi que la restitution dans l'espace physique.

4.4 Grandeurs testées et résultats

Les résultats sont restitués sur un maillage squelette constitué des deux sous-structures. Le maillage initial qui contient 6 nœuds est donc dupliqué pour créer la sous-structure de droite. Le nœud d'extrémité correspond donc au nœud 12.

Identification	Référence (modèle complet)	Sous-Structuration	Différence (%)
Nœud 12 : déplacement (m)	–9.54882E–7	–9.54882E–7	< 0.1
Nœud 12 : vitesse $(m.s^{-1})$	1.22190E–3	1.22190E–3	< 0.1
Nœud 12 : accélération $(m.s^{-2})$	–1.91712E+0	–1.91712E+0	< 0.1

4.5 Remarques

On peut s'étonner que la référence adoptée corresponde à la poutre complète modélisée par 10 éléments et non à la solution analytique. Les écarts importants entre les solutions numériques et théoriques sont imputables au nombre réduit d'éléments. L'utilisation de 50 éléments au lieu de 10 aurait permis d'approcher l'accélération théorique à 1 % près. Cela mis à part, on peut constater que l'utilisation d'une méthode de sous-structuration fournit les mêmes résultats que ceux de la poutre complète.

Le calcul par superposition modale est réalisé sur la base modale complète de la structure (11 modes). De même, la dimension de la base de projection utilisée pour le calcul par sous-structuration dynamique est de 11 (sous-structure de gauche : 4 modes propres + 1 mode contraint ; sous-structure de droite : 5 modes propres + 1 mode contraint). Il est donc normal d'obtenir un excellent accord entre la modélisation de la poutre complète et sa modélisation en deux sous-structures.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Comme dans la modélisation précédente (modélisation B), la structure est amortie avec le même amortissement de type proportionnel et les mêmes coefficients de Rayleigh (cf. [§ 5.1])..
La différence réside dans l'utilisation d'une méthode de condensation dynamique de la partie droite de la structure (comprenant cette fois-ci 6 éléments) qui est alors représentée par un macro-élément dynamique de sous-structuration. La résolution du problème dynamique s'opère sur un modèle mixte constitué du macro-élément de la partie droite de la structure où s'exerce la force appliquée et d'un modèle physique réduit à sa partie gauche comprenant 4 éléments où il y a l'encastrement.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage utilisé est le maillage complet initial (cf. §1.1) obtenu par duplication puis assemblage du maillage de la modélisation A ce qui donne 10 éléments et 11 nœuds.

5.3 Fonctionnalités testées

On teste les fonctionnalités de calcul dynamique avec condensation d'une partie de la structure ainsi que la restitution dans l'espace physique.

5.4 Grandeurs testées et résultats

Les résultats sont restitués sur le maillage initial complet assemblant les deux sous-structures des modélisations précédentes. Le nœud d'extrémité correspond au nœud $N10$ (cf. figure du §1.1). Ce sont exactement les mêmes que ceux de la modélisation B comme espéré.

Identification	Référence (modèle complet)	Condensation dynamique	Différence (%)
Nœud $N10$: déplacement (m)	–9.54882E–7	–9.54882E–7	< 0.1
Nœud $N10$: vitesse ($m.s^{-1}$)	1.22190E–3	1.22190E–3	< 0.1
Nœud $N10$: accélération ($m.s^{-2}$)	–1.91712E+0	–1.91712E+0	< 0.1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Synthèse des résultats

Aussi bien dans le cas non amorti que dans le cas amorti, les résultats obtenus à l'aide du modèle complet et par sous-structuration ne présentent pas d'écarts significatifs. Les opérateurs de calcul transitoire linéaire par sous-structuration sont donc validés.

Dans le cas amorti, l'accord entre les solutions numérique et analytique aurait été meilleur en prenant davantage d'éléments (50 au lieu de 10 par exemple).

Enfin, signalons que les résultats obtenus par *Code_Aster* ont été comparés à des résultats obtenus par SAMCEF. Ils sont repris dans le tableau ci-dessous. On constate que dans le cas non amorti, les deux logiciels fournissent des résultats voisins, tout aussi éloignés de la solution analytique.

Identification	**Cas non amorti**		**Cas amorti**	
	Code_Aster	SAMCEF	*Code_Aster*	SAMCEF
$N12$, déplacement (m)	–6.282E–7	–6.290E–7	–9.549E–7	–9.557E–7
$N12$, vitesse (m/s)	2.096E–3	2.080E–3	1.222E–3	1.222E–3
$N12$, accélération (m/s^2)	1.114E+1	1.075E+1	–1.917E+0	–1.910E+0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)