SDLD320 - Réponse transitoire d'un système libre de 3 masses et 2 ressorts sous excitation harmonique

Résumé :

On considère l'analyse transitoire d'un système discret masse/ressort linéaire à trois degrés de liberté totalement libre. Ce système possède un amortissement non-proportionnel. Une excitation sinusoïdale est appliquée à une extrémité du système.

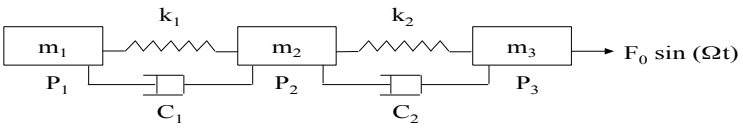
Dans ce problème, on teste, au travers d'un modèle discret, le calcul de la réponse transitoire d'un système dont les modes rigides ne sont pas fixés. On ne s'intéresse qu'au régime transitoire. Pour cela, on recherchera la solution par une intégration sur la base modale complète.

Les résultats obtenus (déplacement, vitesse et accélération) sont comparés à une moyenne de résultats provenant de codes industriels et d'une méthode d'intégration numérique de type β -Newmark améliorée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés des matériaux

Raideurs de liaison : $k_1 = 4.10^9 N.m^{-1}$, $k_2 = 5.33\,10^8 N.m^{-1}$

Masses ponctuelles : $m_1 = 10^6 kg$, $m_2 = m_3 = 12.10^6 kg$

Amortissement visqueux unidirectionnel : $C_1 = 1.2566\,10^6 kg.s^{-1}$, $C_2 = 9.047810^6 kg.s^{-1}$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Système complètement libre.

Chargement au point P_3 suivant l'axe x : $F(t)0 = F_0 \sin(\Omega t)$ pour $t \geq 0$ avec $F_0 = 5.10^4 N$ et $\Omega = 19\pi\, rad.s^{-1}$.

1.4 Conditions initiales

Le système est au repos à $t = 0$: $u(0) = 0$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La recherche de la réponse transitoire de ce problème à amortissement non proportionnel, et où les modes rigides ne sont pas fixés, peut être menée par intégration numérique dans l'espace réel :

$$[M]\{\ddot{u}_n\} + [C]\{\dot{u}_n\} + [K]\{u_n\} = \{F\} \quad .$$

Pour cela, la réponse a été calculée avec deux codes industriels :

- PERMAS : Schéma d'intégration de Newmark ($\alpha = 0{,}25$, $\delta = 0{,}5$), $\Delta t = 10^{-4s}$,
  Schéma d'intégration avec interpolation cubique d'Hermite [bib1], $\Delta t = 10^{-4s}$,
- ABAQUS : Schéma d'intégration de Hilber-Hughes-Taylor [bib2] ($\alpha = -0{,}05$), $\Delta t = 10^{-4s}$,

et la méthode d'intégration de β -Newmark améliorée [bib3] :

$$\left(\frac{[M]}{\Delta t^2} + \frac{[C]}{2\Delta t} + \frac{[K]}{3}\right)\{u_{n+2}\} = \left(\frac{\{F_{n+2}\} + \{F_{n+1}\} + \{F_n\}}{3}\right) + \left(\frac{2[M]}{\Delta t^2} - \frac{[K]}{3}\right)\{u_{n+1}\}$$
$$+ \left(-\frac{[M]}{\Delta t^2} + \frac{[C]}{2\Delta t} - \frac{[K]}{3}\right)\{u_n\}$$

où n , $n+1$, $n+2$ désignent respectivement les calculs effectués aux temps t_n , $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ et $t_{n+2} = t_n + 2\Delta t$ où Δt est l'incrément de temps retenu.

Pour démarrer, on prend :

- u_0 et $u_{-1} = u_0 - \Delta t\ \dot{u}_0$
- $F_{-1} = 2F_0 - F_1$

Le pas de temps adopté est $\Delta t = 10^{-5s}$.

2.2 Résultats de référence

Déplacement, vitesse et accélération du point P_3 .

Différentiel de déplacement entre les points P_3 et P_1 .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3 Incertitude sur la solution

Moyenne de solutions numériques.

2.4 Références bibliographiques

1) J.H. ARGYRIS, P.C. DUNNE and T. ANGELOPOULOS « Non-linear oscillations using the finite element technique » Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.2, 1972, pp. 203-254
2) H.M. HILBER, T.J.R. HUGHES and R.L. TAYLOR « Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics » Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.5, 1977, pp. 283-292

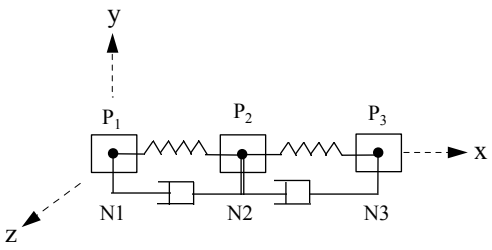
3) N.M. NEWMARK « A method of computation for structural dynamics » Proceeding ASCE J.Eng.Mech. Div E-3, July 1959, pp. 67-94

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Éléments discrets de rigidité, amortissement et masse.



Caractéristiques des éléments :

DISCRET :	masses nodales	M_TR_D_N
	rigidités linéaires	K_TR_D_L
	amortissements linéaires	A_TR_D_L

Pas de conditions aux limites, en tous les nœuds : $DX\ ,\ DY\ ,\ DZ\ ,\ DRX\ ,\ DRY\ ,\ DRZ$ libres.

Noms des nœuds : $P_1 = N1$, $P_2 = N2$, $P_3 = N3$.

Méthode de calcul :

Intégration sur la base modale complète avec Newmark ($\alpha = 0{,}25$, $\delta = 0{,}5$),
Pas de temps : $\Delta t = 10^{-4}\text{s}$ puis recombinaison modale.

Durée d'observation : 5s .

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 3
Nombre de mailles et type : 2 mailles **SEG2**

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

- Déplacement du point P_3

Temps (s)	Déplacement Référence (m)	Déplacement Aster (m)	Différence (%)
0,09	6,7395 E-6	6,73326 E-6	-0,093
0,32	1,1019 E-5	1,10002 E-6	-0,171
1,18	3,6683 E-5	3,66122 E-5	-0,193
4,92	1,6615 E-4	1,65849 E-4	-0,181

- Vitesse du point P_3

Temps (s)	Vitesse Référence ($m.s^{-1}$)	Vitesse Aster ($m.s^{-1}$)	Différence (%)
0,05	1,3425 E-4	1,34131 E-4	-0,088
0,32	-6,4111 E-5	-6,41097 E-4	-0,002
1,18	1,6104 E-5	1,60598 E-5	-0,274
3,55	4,4262 E-5	4,41720 E-5	-0,203

- Accélération du point P_3

Temps (s)	Accélération Référence ($m.s^{-2}$)	Accélération Aster ($m.s^{-2}$)	Différence (%)
0,09	-3,5694 E-3	-3,56634 E-3	-0,086
0,18	-4,3924 E-3	-4,38933 E-3	-0,070
0,55	4,3766 E-3	4,37283 E-3	-0,086
1,18	4,2459 E-3	4,24264 E-3	-0,077
4,92	-4,2233 E-3	-4,21962 E-3	-0,087

- Déplacement relatif du point P_3 par rapport au point P_1

Temps (s)	u_3-u_1 Référence (m)	u_3-u_1 Aster (m)	Différence (%)
0,18	8,0987 E-6	8,04800 E-6	-0,626
0,55	-6,2246 E-6	-6,21194 E-6	-0,203
0,82	5,3064 E-6	5,34121 E-6	0,656
1,18	-4,5552 E-6	-4,52071 E-6	-0,757
1,92	-3,0416 E-6	-3,04417 E-6	0,085
3,55	1,8448 E-6	1,82742 E-6	-0,942
4,92	1,4832 E-6	1,47526 E-6	-0,535

3.4 Remarques

En plus de la comparaison pour les valeurs testées, on vérifie que les variables cinématiques autres que celles liées à la translation suivant x restent nulles.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Synthèse des résultats

- Pour obtenir une bonne précision des résultats, il est d'abord nécessaire d'obtenir une base modale précise et parfaitement orthogonale (CALC_MODES) :
  - en évitant les modes multiples (rigidité différente sur les degrés de liberté non excités),
  - en calculant correctement les modes de corps rigides (préférer l'option 'CENTRE' dans CALC_MODES aux autres options),
  - en spécifiant la méthode 'JACOBI' (dans le mot-clé facteur SOLVEUR_MODAL) pour une extraction modale complète.
- La précision des résultats est bonne aussi bien pour les déplacements que pour les vitesses et les accélérations.

Pour la réponse élastique du système (déplacements relatifs u_3-u_1), la précision numérique est un peu moins bonne du fait du cumul numérique des erreurs sur les valeurs absolues.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)