SDLD107 - Minimisation d'une fonctionnelle énergétique de type erreur en relation de comportement en dynamique des structures

Résumé :

Le domaine d'application de ce test concerne la dynamique des structures. Il permet de valider l'opérateur de calcul CALC_ERC_DYN [u4.53.41] qui permet d'obtenir les champs solution d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle énergétique de type erreur en relation en comportement (ERC) sous une formulation modale.

Il s'agit de résoudre le problème d'ERC pour un système composé de 3 masses et 4 ressorts, encastré à ses extrémités en vibration libre. Les ressorts et les masses sont modélisés par des éléments de type 'DIS_T'.

Les résultats de vérifiés pour le cas étudié ont été obtenus semi-analytiquement. Sa résolution, qui fait office de référence, a été réalisée à l'aide du logiciel Matlab.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Le système étudié est composé de 3 masses (m) et 4 ressorts (k). L'ensemble est encastré à ses extrémités.

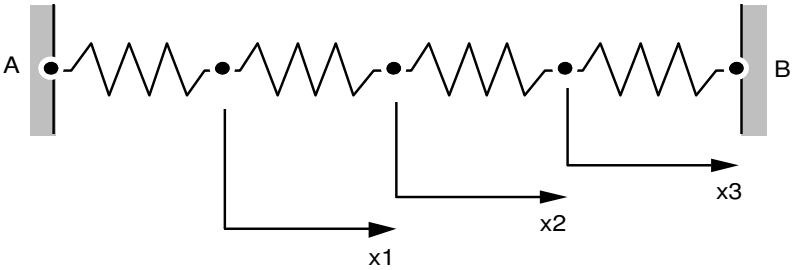


Image 1.1-a: Géométrie du système étudié

1.2 Propriétés de matériaux

Raideur des ressorts : $k=1\ N/m$.

Masses ponctuelles : $m=1\ kg$.

1.3 Conditions aux limites

Points A et B encastrés.

1.4 Conditions initiales

Structure initialement au repos.

1.5 Observation

On considère que les deux translations x1 et x2 sont parfaitement observées.

On considère que les deux premiers modes propres sont observés :

- Pour le premier mode propre, on suppose les deux translations x1 et x2 ainsi que sa pulsation propre parfaitement observées ($\hat{\omega}_1=\omega_1$).
- Pour le deuxième mode propre, on considère les deux translations x1 et x2 parfaitement observées tandis que l'information sur la pulsation propre est supposée être entachée d'une erreur de 25 % ($\hat{\omega}_2=1{,}25*\omega_2$) .

1.6 Fonctionnelle d'erreur

On choisit de minimiser l'erreur de la fonctionnelle énergétique de type erreur en relation de comportement suivante:

$$e_\omega^2(u,v,w)=\frac{\gamma}{2}(u-v)^T[K](u-v)+\frac{1-\gamma}{2}(u-w)^T\omega^2[M](u-w)+\frac{1-\alpha}{\alpha}(Hu-\hat{u})^T[Gr](Hu-\hat{u})$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

2.1.1 Modèle de référence

Pour le modèle de référence, on suppose le vecteur de déplacement suivant :

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les matrices structurelles de masse (M) et de raideur (K) sont :

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les pulsations propres du système masse-ressort valent :

$$\omega_1^2=(2-\sqrt{2}) \quad \omega_2^2=2 \quad \omega_3^2=(2+\sqrt{2})$$

de déformées modales respectives (normées à 1 selon la plus grande amplitude):

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \varphi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matrice permettant d'observer parfaitement x1 et x2 est :

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs la matrice norme (Gr) est choisie par combinaison des matrices réduites de Guyan de masse et de raideur. Pour leur construction, les modes statiques associés à x1 et x2 sont :

$$\psi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

formant la base de modes statiques $\psi=[\psi_1 \psi_2]$. Cela conduit à :

$$G_r=\psi^T[K+M]\psi \ ;$$

$$Gr=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2.75 \end{pmatrix}$$

Les paramètres de pondération de $e_\omega^2(u,v,w)$ sont choisis $\alpha=0.5$ et $\gamma=0.5$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.1.2 Construction du système linéaire associé au problème de la fonctionnelle d'erreur en relation de comportement.

Le problème permettant de retrouver les champs associés à la fonctionnelle de type erreur en relation de comportement amène à la résolution du système matriciel linéaire suivant :

$$A\,l = b$$

avec, pour chaque pulsation propre ω_i :

$$A_i = \begin{pmatrix} \gamma\left(K + \gamma/(1-\gamma)\omega_i^2 M\right) & -\gamma\left(K - \omega_i^2 M\right) \\ -\gamma\left(K - \omega_i^2 M\right) & \left(-2\alpha/(1-\alpha)\right) H^T G_r H \end{pmatrix} \text{ et } b_i = \begin{pmatrix} 0_3 \\ \left(-2\alpha/(1-\alpha)\right) H^T G_r \hat{u}_i \end{pmatrix}$$

où $\hat{u}_i$ représente l'observation du mode φ_i associé à la pulsation propre ω_i estimée. α et γ sont, quant à eux, les paramètres de pondération associées à la fonctionnelle d'erreur.
Enfin, le vecteur solution l est la concaténation de deux champs associés a la fonctionnelle d'erreur de telle sorte que:

$$l = \begin{pmatrix} u - v \\ u \end{pmatrix}$$

2.2 Résultats de référence

Deux cas de référence sont testés :

1) Premier mode propre, observations parfaites:

$$\hat{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \hat{\omega_1} = \left(2 - \sqrt{2}\right)$$

Dans ce cas, le résultat est trivial car il doit amener à un résultat de fonctionnelle d'erreur parfaitement nul associé à :

$$(u - v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2) Deuxième mode propre, déplacements parfaits, et pulsation propre entachée d'erreur:

$$\hat{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; \hat{\omega_2} = 1.25 * 2$$

Dans ce cas, la construction du problème matriciel $A\,l = b$ amène à :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$A=\begin{pmatrix} 1+1.25^2 & -0.5 & 0 & -1+1.25^2 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1+1.25^2 & -0.5 & 0.5 & -1+1.25^2 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 1+1.25^2 & 0 & 0.5 & -1+1.25^2 \\ -1+1.25^2 & 0.5 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0.5 & -1+1.25^2 & 0.5 & 2 & -5.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1+1.25^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système d'équations a été résolu à l'aide du logiciel Matlab, conduisant à la solution :

$$l=\begin{pmatrix} 0.223608826207038 \\ 0.107013222975753 \\ -0.095122864867336 \\ -0.957415448053491 \\ 0.038110367724860 \\ 0.494584477951991 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, la valeur de la fonctionnelle vaut :

$$e^2_{\omega_2}(u,v,w)=0.089643288114668$$

dont la partie associé aux champs d'erreur est :

$$\frac{\gamma}{2}(u-v)^T[K](u-v)+\frac{1-\gamma}{2}(u-w)^T\omega^2[M](u-w)=0.083454681437031$$

2.3 Incertitude sur la solution

Premier cas: solution analytique.

Deuxième cas: solution semi-analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 5 dont 2 encastrés

Nombre de mailles et types : 4 SEG2

3.2 Grandeurs testées et résultats

Calcul des champs solution et de la valeur de la fonctionnelle avec l'opérateur CALC_ERC_DYN.

Identification	Référence
Formulation : MODALE	
Premier cas	
Valeur de la fonctionnelle $e^2_{\omega_1}(u,v,w)$	0.0
Deuxième cas	
Valeur de la fonctionnelle $e^2_{\omega_2}(u,v,w)$	0.089643288114668
Valeur de la fonctionnelle $e^2_{\omega_2}(u,v,w)$	0.083454681437031
Champ de déplacement u_1 (m)	-0.957415448053491
Champ de déplacement u_2 (m)	0.038110367724860
Champ de déplacement u_3 (m)	0.494584477951991
Champ de déplacement $(u-v)_1$ (m)	0.223608826207038
Champ de déplacement $(u-v)_2$ (m)	0.107013222975753
Champ de déplacement $(u-v)_3$ (m)	-0.095122864867336

Tableau 3.2-1 : Grandeurs et résultats testés

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Synthèse des résultats

La précision sur les champs optimaux (u) et (u-v) ainsi que sur le valeur de la fonctionnelle est très bonne (erreurs de l'ordre de 1E-12 à 1E-14)

Ce test valide donc l'opérateur CALC_ERC_DYN de calcul de recherche des champs admissibles associés à un problème de fonctionnelle énergétique de type erreur en relation de comportement en dynamique sous une formulation modale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)