SDLD104 - Extrapolation de mesures locales sur un modèle complet (discret)

Résumé :

Il s'agit d'un test de dynamique linéaire discret.

Le but est de tester la commande PROJ_MESU_MODAL dans le cas d'un système discret. Cette commande permet de projeter des réponses transitoires dynamiques expérimentales en un certain nombre de points sur une base modale d'une modélisation numérique.

Ce test contient 2 modélisations où la projection se fait sur un concept de type [mode_meca], la différence étant donnée par la façon dont ce concept est fabriqué.

Pour les 2 modélisations, les mesures expérimentales fournies sont identiques et permettent de tester la recherche des nœuds en vis-à-vis, la prise en compte d'une orientation locale et le traitement d'un échantillonnage en temps constant ou non, pour des mesures en déplacement.

Dans les deux cas, la solution de référence est déterminée analytiquement (par Maple) ; la projection est réalisée dans la configuration favorable où le nombre de modes est égal au nombre de mesures.
Les réponses en déplacement obtenues après projection sont identiques aux déplacements de référence fournis en données.

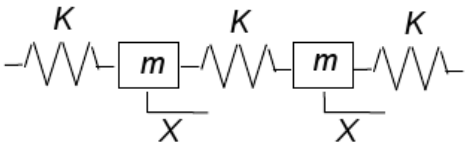
Les valeurs des vitesses et des accélérations déduites des déplacements obtenus après projection sont proches de celles obtenues analytiquement. Les faibles écarts constatés sont dus aux erreurs d'approximation engendrées par la détermination via un schéma linéaire en temps des vitesses et accélérations.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Description du système

Nous considérons le système représenté par le schéma ci-dessous :



1.2 Masses et rigidité

Les trois ressorts sont de rigidité identique : $k = 1000\,N/m$.
Les deux masses sont égales à $m = 10\,kg$.

1.3 Conditions aux limites et chargement

Les deux extrémités sont encastrées.
Le chargement est une force axiale en traction appliquée sur la masse $m1$, sinusoïdale en fonction du temps, de pulsation ω .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution analytique de ce problème est présentée ci-dessous.

- Modes et fréquences de vibration :
  Le système suivant caractérise la dynamique des masses :

$$\begin{cases} m\,\ddot{x}_1 + 2\mathrm{k}\,x_1 - k\,x_2 = 0 \\ m\,\ddot{x}_2 + 2\mathrm{k}\,x_2 - k\,x_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{éq 2.1-1}$$

  Ce qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = 0 \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3\mathrm{k}(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \qquad \text{éq 2.1-2}$$

  Les 2 fréquences propres du système sont donc données par :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3\mathrm{k}}{m}} \qquad \text{éq 2.1-3}$$

  et les déformations modales associées sont :

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{éq 2.1-4}$$

  Les matrices généralisées sont :

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \Phi^T M \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{m} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{m} \end{pmatrix} \\ \bar{K} &= \Phi^T K \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathrm{k} & -k \\ -k & 2\mathrm{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{k} & 0 \\ 0 & 6\mathrm{k} \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{éq 2.1-5}$$

- Réponse transitoire :

  L'effort sinusoïdal est appliqué sur la première masse : $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\omega t)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le système dynamique vérifié est le suivant :

$$M\,\ddot{X}+K\,X=F \qquad \text{éq 2.1-6}$$

En projetant sur la base des modes propres, nous obtenons :

$$\Phi^T M\,\Phi\,\ddot{\eta}+\Phi^T K\,\Phi\,\eta=\Phi^T F \qquad \text{éq 2.1-7}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix}2\mathrm{m} & 0\\ 0 & 2\mathrm{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\eta}_1\\ \ddot{\eta}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\mathrm{k} & 0\\ 0 & 6\mathrm{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\sin(\omega t) \qquad \text{éq 2.1-8}$$

Nous aboutissons donc au système découplé suivant :

$$\begin{cases} m\,\ddot{\eta}_1+k\,\eta_1=\dfrac{1}{2}\sin(\omega t)\\ m\,\ddot{\eta}_2+3\,k\,\eta_2=\dfrac{1}{2}\sin(\omega t)\end{cases} \qquad \text{éq 2.1-9}$$

La solution de ce système est donnée par :

$$\begin{cases}\eta_1(t)=A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)+\dfrac{\sin(\omega t)}{2\mathrm{m}(\omega_1^2-\omega^2)}\\ \eta_2(t)=A_2\cos(\omega_2 t)+B_2\sin(\omega_2 t)+\dfrac{\sin(\omega t)}{2\mathrm{m}(\omega_2^2-\omega^2)}\end{cases} \qquad \text{éq 2.1-10}$$

Les déplacements dans l'espace physique sont obtenus par la formule de Ritz :

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\Phi\,\eta=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1+\eta_2\\ \eta_1-\eta_2\end{pmatrix} \qquad \text{éq 2.1-11}$$

On en déduit les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$\begin{cases}x_1(t)=A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)+A_2\cos(\omega_2 t)+B_2\sin(\omega_2 t)+\dfrac{\sin(\omega t)}{2\mathrm{m}}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2-\omega^2}+\dfrac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right)\\ x_2(t)=A_1\cos(\omega_1 t)+B_1\sin(\omega_1 t)-A_2\cos(\omega_2 t)+B_2\sin(\omega_2 t)+\dfrac{\sin(\omega t)}{2\mathrm{m}}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2-\omega^2}-\dfrac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right)\end{cases}$$

éq 2.1-12

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A l'instant initial, le système est au repos, d'où les expressions finales de $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$\begin{cases} x_1(t)=\frac{1}{2\mathrm{m}}\left[\frac{\sin(\omega t)-\frac{\omega}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2-\omega^2}+\frac{\sin(\omega t)-\frac{\omega}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)}{\omega_2^2-\omega^2}\right] \\ x_2(t)=\frac{1}{2\mathrm{m}}\left[\frac{\sin(\omega t)-\frac{\omega}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2-\omega^2}-\frac{\sin(\omega t)-\frac{\omega}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)}{\omega_2^2-\omega^2}\right] \end{cases} \quad \text{éq 2.1-13}$$

Les vitesses des deux masses sont calculées en dérivant les déplacements par rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=\frac{\omega}{2\mathrm{m}}\left[\frac{\cos(\omega t)-\cos(\omega_1 t)}{\omega_1^2-\omega^2}+\frac{\cos(\omega t)-\cos(\omega_2 t)}{\omega_2^2-\omega^2}\right] \\ \dot{x}_2(t)=\frac{\omega}{2\mathrm{m}}\left[\frac{\cos(\omega t)-\cos(\omega_1 t)}{\omega_1^2-\omega^2}-\frac{\cos(\omega t)-\cos(\omega_2 t)}{\omega_2^2-\omega^2}\right] \end{cases} \quad \text{éq 2.1-14}$$

Les accélérations des deux masses sont calculées en dérivant les vitesses par rapport au temps :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t)=\frac{\omega}{2\mathrm{m}}\left[\frac{\omega\sin(\omega t)-\omega_1\sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2-\omega^2}+\frac{\omega\sin(\omega t)-\omega_2\sin(\omega_2 t)}{\omega_2^2-\omega^2}\right] \\ \ddot{x}_2(t)=\frac{\omega}{2\mathrm{m}}\left[\frac{\omega\sin(\omega t)-\omega_1\sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2-\omega^2}-\frac{\omega\sin(\omega t)-\omega_2\sin(\omega_2 t)}{\omega_2^2-\omega^2}\right] \end{cases} \quad \text{éq 2.1-15}$$

2.2 Résultats de référence

La comparaison des résultats porte sur les déplacements, vitesses et accélérations suivant l'axe des deux masses, à cinq instants différents.

2.3 Incertitude sur la solution

La solution de référence est exacte.

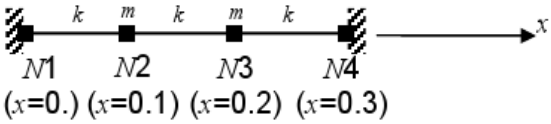
Le modèle discret représente parfaitement le problème posé (la base modale est complète ; il n'y a donc pas d'approximation liée à une éventuelle troncature modale). Le nombre de modes de la base de projection modale est égal au nombre de mesures, donc la solution de l'inversion est exacte (par opposition à une solution approchée d'un problème inverse généralisé). Si la recherche des nœuds en vis-à-vis est bonne, les déplacements obtenus après projection doivent être en parfaite adéquation avec les valeurs expérimentales. Les vitesses et accélérations sont déterminées par dérivation des contributions modales identifiées via un schéma d'approximation linéaire en temps, pouvant donc générer quelques erreurs.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

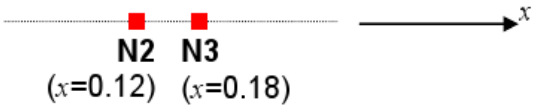
3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation et des maillages

Maillage numérique :
Le maillage numérique est réalisé directement au format ASTER. Il comporte 4 nœuds et 3 mailles discrètes.



Maillage expérimental :
Le maillage de mesure ne comprend que 2 éléments ponctuels et 2 nœuds :



3.2 Caractéristiques des mesures

Les mesures expérimentales fournies sont :

- Au nœud $N3$:
  Les données sont les déplacements axiaux, multipliés par $-1/\sqrt{2}$, et appliqués dans la direction $-X$. L'orientation locale indiquée dans le fichier de commande est $(45.0.0.)$
  L'échantillonnage du temps est constant : le temps initial est $0\,s$, le pas de temps est $10^{-3}\,s$ et le nombre d'instants est 1001 (soit jusqu'à un temps final de $1\,s$).

- Au nœud $N2$:
  Les données sont les déplacements axiaux, appliqués dans la direction x.
  L'échantillonnage du temps est variable : tous les instants sont indiqués de $0\,s$ à $1\,s$, par pas de $10^{-3}\,s$ (1001 instants au total).

Les valeurs sont issues du calcul analytique réalisé avec Maple.

3.3 Caractéristiques de la base modale

Les deux seuls modes sont stockés dans un concept de type mode_meca créé par la commande CALC_MODES. Leurs fréquences propres sont identiques aux fréquences propres analytiques.

3.4 Valeurs testées

Identification			Référence	*Code_Aster*	différence
DEPL_X	au nœud $N2$	à t = 0.1 s	$1.745\ 10^{-4}$	$1.745\ 10^{-4}$	0.01 %
		à t = 0.3 s	$6.797\ 10^{-4}$	$6.797\ 10^{-4}$	0.01 %
		à t = 0.5 s	$-1.217\ 10^{-3}$	$-1.217\ 10^{-3}$	0.01 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

(m)	(masse 1)	à t = 0.7 s	$5.214\ 10^{-4}$	$5.214\ 10^{-4}$	–0.01 %
		à t = 0.9 s	$9.031\ 10^{-4}$	$9.031\ 10^{-4}$	0.00 %
DEPL_X (m)	au nœud $N3$ (masse 2)	à t = 0.1 s	$9.154\ 10^{-6}$	$9.154\ 10^{-6}$	0.00 %
		à t = 0.3 s	$6.414\ 10^{-4}$	$6.414\ 10^{-4}$	0.00 %
		à t = 0.5 s	$-8.636\ 10^{-4}$	$-8.636\ 10^{-4}$	0.00 %
		à t = 0.7 s	$-1.107\ 10^{-4}$	$-1.107\ 10^{-4}$	0.03 %
		à t = 0.9 s	$1.633\ 10^{-3}$	$1.633\ 10^{-3}$	0.02 %
VITE_X (m/s)	au nœud $N2$ (masse 1)	à t = 0.1 s	$4.586\ 10^{-3}$	$4.616\ 10^{-3}$	0.65 %
		à t = 0.3 s	$-7.598\ 10^{-3}$	$-7.663\ 10^{-3}$	0.85 %
		à t = 0.5 s	$-1.581\ 10^{-4}$	$-8.000\ 10^{-5}$	$7.81\ 10^{-5}$ m/s
		à t = 0.7 s	$9.382\ 10^{-3}$	$9.354\ 10^{-3}$	–0.30 %
		à t = 0.9 s	$-7.481\ 10^{-3}$	$-7.537\ 10^{-3}$	0.75 %
VITE_X (m/s)	au nœud $N3$ (masse 2)	à t = 0.1 s	$4.328\ 10^{-4}$	$4.405\ 10^{-4}$	1.79 %
		à t = 0.3 s	$3.671\ 10^{-3}$	$3.640\ 10^{-3}$	–0.84 %
		à t = 0.5 s	$-1.539\ 10^{-2}$	$-1.536\ 10^{-2}$	–0.20 %
		à t = 0.7 s	$2.453\ 10^{-2}$	$2.457\ 10^{-2}$	0.15 %
		à t = 0.9 s	$-1.899\ 10^{-2}$	$-1.912\ 10^{-2}$	0.68 %
ACCE_X (m/s^2)	au nœud $N2$ (masse 1)	à t = 0.1 s	$6.112\ 10^{-2}$	$6.100\ 10^{-2}$	–0.20 %
		à t = 0.3 s	$-1.306\ 10^{-1}$	$-1.300\ 10^{-1}$	–0.46 %
		à t = 0.5 s	$1.571\ 10^{-1}$	$1.600\ 10^{-1}$	1.85 %
		à t = 0.7 s	$-5.657\ 10^{-2}$	$-5.800\ 10^{-2}$	2.53 %
		à t = 0.9 s	$-1.124\ 10^{-1}$	$-1.130\ 10^{-1}$	0.53 %
ACCE_X (m/s^2)	au nœud $N3$ (masse 2)	à t = 0.1 s	$1.562\ 10^{-2}$	$1.618\ 10^{-2}$	3.58 %
		à t = 0.3 s	$-6.031\ 10^{-2}$	$-6.223\ 10^{-2}$	3.18 %
		à t = 0.5 s	$5.102\ 10^{-2}$	$5.374\ 10^{-2}$	5.33 %
		à t = 0.7 s	$7.428\ 10^{-2}$	$7.043\ 10^{-2}$	–5.19 %
		à t = 0.9 s	$-2.364\ 10^{-1}$	$-2.263\ 10^{-1}$	–4.28 %

Remarque :

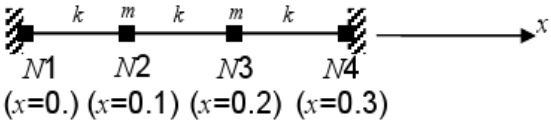
La vitesse au nœud $N2$ à l'instant $t=0.5\,s$ étant relativement proche de zéro, la comparaison est réalisée pour ce cas en valeur absolue.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

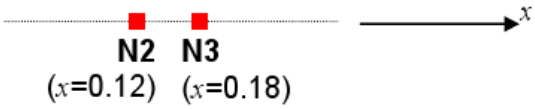
4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation et des maillages

Maillage numérique :
Le maillage numérique est réalisé directement au format ASTER. Il comporte 4 nœuds et 3 mailles discrètes.



Maillage expérimental :
Le maillage de mesure ne comprend que 2 éléments ponctuels et 2 nœuds :



4.2 Caractéristique des mesures

Les mesures expérimentales fournies sont :

- Au nœud $N3$:
  Les données sont les déplacements axiaux, multipliés par $-1/\sqrt{2}$, et appliqués dans la direction $-x$. L'orientation locale indiquée dans le fichier de commande est $(45.0.0.)$
  L'échantillonnage du temps est constant : le temps initial est $0\,s$, le pas de temps est $10^{-3}\,s$ et le nombre d'instants est 1001 (i.e. jusqu'à un temps final de $1\,s$).

- Au nœud $N2$:
  Les données sont les déplacements axiaux, appliqués dans la direction X.
  L'échantillonnage du temps est variable : tous les instants sont indiqués de $0\,s$ à $1\,s$, par pas de $10^{-3}\,s$ (1001 instants au total).

Les valeurs sont issues du calcul analytique réalisé avec Maple.

4.3 Caractéristiques de la base modale

Les deux seuls modes sont stockés dans un concept de type mode_meca, créé par la commande DEFI_BASE_MODALE. L'interface, de type Craig-Bampton, est placée sur le degré de liberté en déplacement suivant x du nœud $N2$ (correspondant à la masse $m1$). La base modale contient donc un mode dynamique (avec $N2$ bloqué) et un mode statique.

4.4 Valeurs testées

Identification		Référence	*Code_Aster*	différence
	à t = 0.1 s	1.745 10^{-4}	1.745 10^{-4}	0.01 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

DEPL_X (m)	au nœud $N2$ (masse 1)	à t = 0.3 s	$6.797\ 10^{-4}$	$6.797\ 10^{-4}$	0.01 %
		à t = 0.5 s	$-1.217\ 10^{-3}$	$-1.217\ 10^{-3}$	0.01 %
		à t = 0.7 s	$5.214\ 10^{-4}$	$5.214\ 10^{-4}$	–0.01 %
		à t = 0.9 s	$9.031\ 10^{-4}$	$9.031\ 10^{-4}$	0.00 %
DEPL_X (m)	au nœud $N3$ (masse 2)	à t = 0.1 s	$9.154\ 10^{-6}$	$9.154\ 10^{-6}$	0.00 %
		à t = 0.3 s	$6.414\ 10^{-4}$	$6.414\ 10^{-4}$	0.00 %
		à t = 0.5 s	$-8.636\ 10^{-4}$	$-8.636\ 10^{-4}$	0.00 %
		à t = 0.7 s	$-1.107\ 10^{-4}$	$-1.107\ 10^{-4}$	0.03 %
		à t = 0.9 s	$1.633\ 10^{-3}$	$1.633\ 10^{-3}$	0.02 %
VITE_X (m/s)	au nœud $N2$ (masse 1)	à t = 0.1 s	$4.586\ 10^{-3}$	$4.616\ 10^{-3}$	0.65 %
		à t = 0.3 s	$-7.598\ 10^{-3}$	$-7.663\ 10^{-3}$	0.85 %
		à t = 0.5 s	$-1.581\ 10^{-4}$	$-8.000\ 10^{-5}$	$7.81\ 10^{-5}$ m/s
		à t = 0.7 s	$9.382\ 10^{-3}$	$9.354\ 10^{-3}$	–0.30 %
		à t = 0.9 s	$-7.481\ 10^{-3}$	$-7.537\ 10^{-3}$	0.75 %
VITE_X (m/s)	au nœud $N3$ (masse 2)	à t = 0.1 s	$4.328\ 10^{-4}$	$4.405\ 10^{-4}$	1.79 %
		à t = 0.3 s	$3.671\ 10^{-3}$	$3.640\ 10^{-3}$	–0.84 %
		à t = 0.5 s	$-1.539\ 10^{-2}$	$-1.536\ 10^{-2}$	–0.20 %
		à t = 0.7 s	$2.453\ 10^{-2}$	$2.457\ 10^{-2}$	0.15 %
		à t = 0.9 s	$-1.899\ 10^{-2}$	$-1.912\ 10^{-2}$	0.68 %
ACCE_X (m/s^2)	au nœud $N2$ (masse 1)	à t = 0.1 s	$6.112\ 10^{-2}$	$6.100\ 10^{-2}$	–0.20 %
		à t = 0.3 s	$-1.306\ 10^{-1}$	$-1.300\ 10^{-1}$	–0.46 %
		à t = 0.5 s	$1.571\ 10^{-1}$	$1.600\ 10^{-1}$	1.85 %
		à t = 0.7 s	$-5.657\ 10^{-2}$	$-5.800\ 10^{-2}$	2.53 %
		à t = 0.9 s	$-1.124\ 10^{-1}$	$-1.130\ 10^{-1}$	0.53 %
ACCE_X (m/s^2)	au nœud $N3$ (masse 2)	à t = 0.1 s	$1.562\ 10^{-2}$	$1.618\ 10^{-2}$	3.58 %
		à t = 0.3 s	$-6.031\ 10^{-2}$	$-6.223\ 10^{-2}$	3.18 %
		à t = 0.5 s	$5.102\ 10^{-2}$	$5.374\ 10^{-2}$	5.33 %
		à t = 0.7 s	$7.428\ 10^{-2}$	$7.043\ 10^{-2}$	–5.19 %
		à t = 0.9 s	$-2.364\ 10^{-1}$	$-2.263\ 10^{-1}$	–4.28 %

Remarque :

La vitesse au nœud $N2$ à l'instant $t=0.5\,s$ étant relativement proche de zéro, la comparaison est réalisée pour ce cas en valeur absolue.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Pour les deux modélisations, les réponses en déplacement obtenues après projection sont identiques aux déplacements de référence calculés analytiquement avec Maple et fournis en données.

Les valeurs des vitesses et des accélérations déduites des déplacements obtenus après projection sont proches de celles obtenues analytiquement. Les faibles écarts constatés sont dus aux erreurs d'approximation engendrées par la détermination par un schéma linéaire en temps des vitesses et accélérations.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)