SDLD103 - Réponse sismique transitoire d'un système 3 masses et 4 ressorts multi-supporté avec correction statique

Résumé

Le problème consiste à analyser la réponse transitoire d'une structure mécanique de type poutre encastrée-encastrée et non amortie, modélisée par un système 3 masses et 4 ressorts et soumise à un chargement sismique quelconque.

On teste l'élément discret en traction et rotation, le calcul des modes propres et des modes statiques, et le calcul de la réponse transitoire par superposition modale d'une structure soumise à un accélérogramme de translation (modélisation A) ou de rotation (modélisation B). Dans le cas de la modélisation A, on montre la prise en compte de la correction statique *a priori*, via l'ajonction de modes statiques à la base des modes propres dynamiques, nécessaire quand la base des modes propres est tronquée. Ce type de correction statique est la seule disponible en multi-appui (la correction statique *a posteriori* n'est pas disponible).
Dans la modélisation C, on teste la macro-commande MACR_SPECTRE lorsque les supports voient une excitation différente aux appuis.

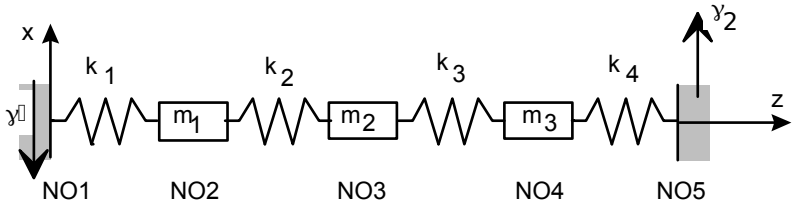
Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats de référence (résultats analytiques). La correction statique permet de retrouver les résultats de référence lorsque la base des modes propres est tronquée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La poutre est modélisée par un ensemble de 4 ressorts et de 3 masses ponctuelles.



1.2 Propriétés de matériaux

Raideur de liaison : $k=k_1=k_2=k_3=k_4=10^4\,N/m$;
masse ponctuelle : $m=m_1=m_2=m_3=10\ kg$.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions aux limites :
Les seuls déplacements autorisés sont les translations selon l'axe x .
Les points $NO1$ et $NO5$ sont encastrés : $dx=dy=dz=drx=dry=drz=0$.
Les autres points sont libres en translation selon la direction x : $dy=dz=drx=dry=drz=0$.

Chargement :
Les points d'ancrage $NO1$ et $NO5$ sont chacun soumis à une accélération transversale $\gamma_1(t)=at^2$ avec $a=2.10^5\,m/s^4$ en $NO1$ et $\gamma_2(t)=0\,m/s^2$ en $NO5$.

1.4 Conditions initiales

Le système est au repos : à $t=0$, $dx(0)=0$, $dx/dt(0)=0$ en tout point.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le problème consiste à calculer la réponse d'un système à cinq degrés de liberté soumis à deux accélérations $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ distinctes de forme quelconque. Il est exposé en détail dans la référence [bib2].

On calcule dans un premier temps les fréquences propres f_i, les vecteurs propres associés normalisés par rapport à la masse modale Φ_{Ni} et les modes statiques Ψ du système (valeurs analytiques). On calcule ensuite la réponse généralisée du système multi-supporté en résolvant analytiquement l'intégrale de Duhamel [bib1]. Enfin, on restitue sur la base physique le vecteur des déplacements relatifs (sur les degrés de liberté actifs) X_r , ce qui nous permet, après avoir calculé le vecteur des déplacements d'entraînement X_e, de calculer le vecteur des déplacements absolus $X_a = X_r + X_e$.

2.2 Résultats de référence

- Calcul des trois fréquences propres f_i, des vecteurs propres associés normalisés par rapport à la masse modale Φ_{Ni} et des modes statiques Ψ du système

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(2+\sqrt{2})\,m/2\mathrm{k}}} = 3.85\,Hz \\ f_2 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{m/2\mathrm{k}}} = 7.12\,Hz \\ f_3 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(2-\sqrt{2})\,m/2\mathrm{k}}} = 9.30\,Hz \end{cases}, \quad \Phi_N = \frac{1}{2\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \Psi = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Calcul de la réponse généralisée du système multi-supporté

L'équation fondamentale de la dynamique, dans le repère relatif sur les degrés de liberté actifs s'écrit : $M\ddot{X}_r + K X_r = (M\Psi + M_{XS})\ddot{X}_S$ avec $\ddot{X}_S = \begin{bmatrix} at^2 \\ 0 \end{bmatrix}$, le vecteur des accélérations imposées au niveau des différents points d'ancrage.

L'équation du mouvement projetée sur la base des modes dynamiques normalisés par rapport à la masse modale Φ_N s'écrit, en ne considérant que les degrés de liberté actifs :

$$\ddot{q}(t) + K_G\, q(t) = -\Phi_N^T M \Psi \ddot{X}_S = \frac{a\sqrt{m}\,t^2}{4}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La réponse de ce système linéaire, à un instant t , consiste alors à calculer l'intégrale de Duhamel :

$$q(t)=-\frac{a\sqrt{m^3}}{4\mathrm{k}}\begin{bmatrix}(3+2\sqrt{2})(t^2+(2+\sqrt{2})(\cos\omega_1 t-1)m/k)\\(t^2+(\cos\omega_2 t-1)m/k)/\sqrt{2}\\(3-\sqrt{2})(t^2+(2-\sqrt{2})(\cos\omega_3 t-1)m/k)\end{bmatrix}$$

- Calcul du déplacement relatif aux degrés de liberté actifs : $X_r=\sum_i \Phi_{\mathrm{Ni}} q_i$ soit :

$$X_r=-\frac{am}{8\mathrm{k}}\begin{bmatrix}7t^2+\left[(10+7\sqrt{2})\frac{m}{k}(\cos\omega_1 t-1)+(\cos\omega_2 t-1)+(10-7\sqrt{2})(\cos\omega_3 t-1)\right]m/k\\8t^2+\left[(10\sqrt{2}+14)\frac{m}{k}(\cos\omega_1 t-1)+(-10\sqrt{2}+14)(\cos\omega_3 t-1)\right]m/k\\5t^2+\left[(10+7\sqrt{2})\frac{m}{k}(\cos\omega_1 t-1)-(\cos\omega_2 t-1)+(10-7\sqrt{2})(\cos\omega_3 t-1)\right]m/k\end{bmatrix}.$$

- Calcul des déplacements d'entraînement aux degrés de liberté actifs : $X_e=\Psi X_S=a\frac{t^4}{48}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$.

- Calcul des déplacements absolus aux degrés de liberté actifs : $X_a=X_r+X_e$.

2.3 Incertitude sur la solution

Aucune si l'on calcule l'intégrale de Duhamel analytiquement [bib1].

2.4 Références bibliographiques

1) J.S. PRZEMIENIECKI : Theorie of matrix structural analysis. New York, Mac Graw-Hill, 1968, pages 351-357.

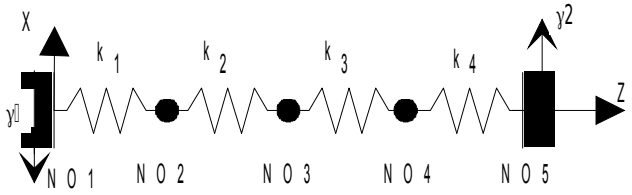
2) Fe WAECKEL : Documentations utilisation et validation des développements réalisés pour calculer la réponse sismique de structures multi-supportées. HP-52/96/002

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Les éléments sont modélisés par des éléments discrets à 3 degrés de liberté DIS_T.



Le nœud $NO1$ est soumis à une accélération imposée $\gamma_1(t)$, le nœud $NO5$ à $\gamma_2(t)$. On calcule le déplacement relatif des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$ par rapport à leur déformée statique, leur déplacement d'entraînement et leur déplacement absolu.

L'intégration temporelle est réalisée avec les algorithmes d'Euler (pas de temps : 10^{-3} seconde), de Devogelaere (pas de temps : 10^{-3} seconde) et avec un algorithme à pas de temps adaptatif d'ordre 2.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 5 noeuds et de 4 éléments discrets (DIST_T).

3.3 Grandeurs testées et résultats

La référence pour les calculs sur base modale complète est analytique. La référence pour les calculs sur base modale tronquée et les calculs avec correction statique est la solution calculée sur base modale complète.

3.3.1 Déplacements relatifs des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$

- Déplacements relatifs du nœud $NO2$ avec les algorithmes d'intégration numérique d'Euler, Devogelaere, adaptatif d'ordre 2 et Runge-Kutta (32 et 54), base modale complète (3 modes propres)

Temps (s)	Référence
0,1	–8,47734E–01
0,3	–1,55202E+01
0,5	–4,36449E+01
0,7	–8,50830E+01
1,0	–1,74790E+02

-
- Déplacements relatifs du nœud $NO2$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler,
  - base modale tronquée (2 modes propres)
  - première base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et du pseudo-mode
  - deuxième base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et des modes statiques à force imposée
  -

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Temps (s)	Référence	Base tronquée
		Tolérance
0,1	–8,47725E–01	5,1%
0,3	–1,55201E+01	2,5%
0,5	–4,36450E+01	2,5%
0,7	–8,50832E+01	2,5%
1,0	–1,74790E+02	2,5%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Déplacements relatifs du nœud $NO3$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler, base modale complète (3 modes propres) :

Temps (s)	Référence
0,01	9,87666E–10
0,02	2,49501E–07
0,03	6,25468E–06
0,04	6,05829E–05
0,05	3,47191E–04
0,06	1,42349E–03
0,07	4,62144E–03
0,08	1,26245E–02
0,09	3,01825E–02
0,1	–7,68449E–01
0,3	–1,76923E+01
0,5	–4,99310E+01
0,7	–9,70711E+01
1,0	–1,99722E+02

- Déplacements relatifs du nœud $NO3$ avec les algorithmes d'intégration numérique de Devogelaere, adaptatif d'ordre 2 et Runge-Kutta (54 et 32), base modale complète (3 modes propres)

Temps (s)	Référence
0,1	–7,68449E–01
0,3	–1,76923E+01
0,5	–4,99310E+01
0,7	–9,70711E+01
1,0	–1,99722E+02

-
- Déplacements relatifs du nœud $NO3$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler
  - base modale tronquée (2 modes propres)
  - première base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et du pseudo-mode
  - deuxième base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et des modes statiques à force imposée

Temps (s)	Référence	Base tronquée Tolérance
0,1	–7,68420E–01	7,8%
0,3	–1,76922E+01	3,1%
0,5	–4,99311E+01	3,1%
0,7	–9,70714E+01	3,1%
1,0	–1,99722E+02	3,1%

- Déplacements relatifs du nœud $NO4$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler, Devogelaere, adaptatif d'ordre 2 et Runge-Kutta (54 et 32), base modale complète (3 modes propres)

Temps (s)	Référence
0,1	–4,09632E–01
0,3	–1,10372E+01
0,5	–3,12415E+01
0,7	–6,05833E+01
1,0	–1,24803E+02

-
- Déplacements relatifs du nœud $NO4$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler
  - base modale tronquée (2 modes propres)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- première base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et du pseudo-mode
- deuxième base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et des modes statiques à force imposée

Temps (s)	Référence	Base tronquée Tolérance
0,1	–4,09604E–01	10,5%
0,3	–1,10371E+01	3,5%
0,5	–3,12416E+01	3,5%
0,7	–6,05835E+01	3,5%
1,0	–1,24804E+02	3,5%

3.3.2 Déplacements absolus des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$

- Déplacements absolus du nœud $NO2$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler, Devogelaere, adaptatif d'ordre 2 et Runge-Kutta (54 et 32), base modale complète (3 modes propres)

Temps (s)	Référence
0,1	4,02266E–01
0,3	8,57E+001
0,5	7,37605E+02
0,7	2,91617E+03
1,0	1,23252E+04

-
- Déplacements absolus du nœud $NO2$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler,
  - base modale tronquée (2 modes propres)
  - première base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et du pseudo-mode
  - deuxième base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et des modes statiques à force imposée

Temps (s)	Référence	Base tronquée Tolérance
0,1	4,02275E–01	10,70%
0,3	8,5730E+001	0,40%
0,5	7,37605E+02	0,30%
0,7	2,91617E+03	0,10%
1,0	1,23252E+04	0,04%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Déplacements absolus du nœud $NO3$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler , Devogelaere, adaptatif d'ordre 2 et Runge-Kutta (54 et 32), base modale complète (3 modes propres)

Temps (s)	Référence
0,1	6,48847E–02
0,3	4,98077E+01
0,5	4,70902E+02
0,7	1,90376E+03
1,0	8,13361E+03

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Déplacements absolus du nœud $NO3$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler,
  - base modale tronquée (2 modes propres)
  - première base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et du pseudo-mode
  - deuxième base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et des modes statiques à force imposée

Temps (s)	Référence	Base tronquée Tolérance
0,1	6,49134E–02	93,00%
0,3	4,98078E+01	1,10%
0,5	4,70902E+02	0,40%
0,7	1,90376E+03	0,20%
1,0	8,13361E+03	0,08%

- Déplacements absolus du nœud $NO4$ avec l'algorithme d'intégration numérique de Devogelaere, base modale complète (3 modes propres)

Temps (s)	Référence
0,1	7,03506E-03
0,3	2,27128E+01
0,5	2,29175E+02
0,7	9,39833E+02
1,0	4,04186E+03

-
- Déplacements absolus du nœud $NO4$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler,
  - base modale tronquée (2 modes propres)
  - première base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et du pseudo-mode
  - deuxième base de Ritz, constituée des 2 premiers modes propres et des modes statiques à force imposée

Temps (s)	Référence	Base tronquée Tolérance
0,1	7,06261E-03	4,30%
0,3	2,27129E+01	1,70%
0,5	2,29175E+02	0,50%
0,7	9,39833E+02	0,20%
1,0	4,04186E+03	0,20%

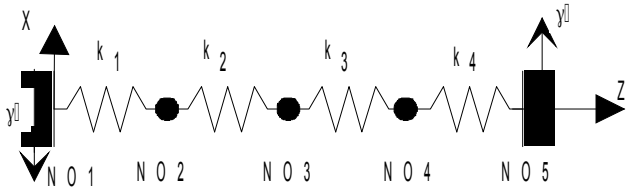
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

C'est la même modélisation que la précédente à l'exception du chargement qui est un accélérogramme de rotation.

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Les éléments sont modélisés par des éléments discrets à 3 degrés de liberté DIS_T.



Le nœud $NO1$ est soumis à une accélération imposée $\gamma_1(t)$, le nœud $NO5$ à $\gamma_2(t)$. On calcule le déplacement relatif des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$ par rapport à leur déformée statique, leur déplacement d'entraînement et leur déplacement absolu.

L'intégration temporelle est réalisée avec l'algorithme d'Euler (pas de temps : 10^{-3} seconde).

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 5 noeuds et de 4 éléments discrets (**DIST_TR**).

4.3 Grandeurs testées et résultats

4.3.1 Déplacements relatifs des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$

- Déplacements relatifs du nœud $NO2$:

Temps (s)	Référence
0,1	–8,47734E–01
0,3	–1,55202E+01
0,5	–4,36449E+01
0,7	–8,50830E+01
1,0	–1,74790E+02

- Déplacements relatifs du nœud $NO3$:

Temps (s)	Référence
0,1	–7,68449E–01
0,3	–1,76923E+01
0,5	–4,99310E+01
0,7	–9,70711E+01
1,0	–1,99722E+02

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Déplacements relatifs du nœud $NO4$:

Temps (s)	Référence
0,1	–4,09632E–01
0,3	–1,10372E+01
0,5	–3,12415E+01
0,7	–6,05833E+01
1,0	–1,24803E+02

4.3.2 Déplacements absolus des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$

•Déplacements absolus du nœud $NO2$:

Temps (s)	Référence
0,1	4,02266E–01
0,3	8,57298E+01
0,5	7,37605E+02
0,7	2,91617E+03
1,0	1,23252E+04

•Déplacements absolus du nœud $NO3$:

Temps (s)	Référence
0,01	9,87666E–10
0,02	2,49501E–07
0,03	6,25468E–06
0,04	6,05829E–05
0,05	3,47191E–04
0,06	1,42349E–03
0,07	4,62144E–03
0,08	1,26245E–02
0,09	3,01825E–02
0,10	6,48847E–02
0,30	4,98077E+01
0,50	4,70902E+02
0,70	1,90376E+03
1,0	8,13361E+03

•Déplacements absolus du nœud $NO4$:

Temps (s)	Référence
0,1	7,03506E-03
0,3	2,27128E+01
0,5	2,29175E+02
0,7	9,39833E+02
1,0	4,04186E+03

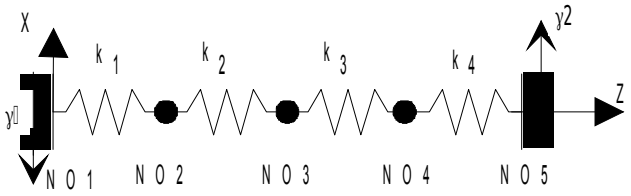
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

C'est la même modélisation que la précédente, le chargement est identique au chargement de la modélisation A.

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Les éléments sont modélisés par des éléments discrets à 3 degrés de liberté DIS_T.



Le nœud $NO1$ est soumis à une accélération imposée $\gamma_1(t)$, le nœud $NO5$ à $\gamma_2(t)$. L'intégration temporelle est réalisée avec l'algorithme d'Euler (pas de temps : 10^{-3} seconde).

On calcule le spectre enveloppe de l'accélération absolue des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$. Ce calcul peut se faire soit à l'aide d'un enchainement de commande RECU_FONCTION et CALC_FONCTION soit à l'aide de la macro-commande MACR_SPECTRE qui fait appel à ces mêmes commandes.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 5 noeuds et de 4 éléments discrets (**DIST_TR**).

5.3 Grandeurs testées et résultats

5.3.1 Accélération absolue enveloppe des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$

- Accélération enveloppe:

Fréquence (Hz)	Référence
0,1	483.65
0,3	3840,04
0,52	9016,62

6 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus pour les modélisations A (base modale complète constituée des 3 modes propres, base de Ritz constituée des 2 premiers modes propres et du pseudo-mode, base de Ritz constituée des 2 premiers modes propres et des modes statiques à force imposée) et B (base modale complète) avec *Code_Aster* sont conformes aux résultats de référence (l'erreur est en générale inférieure à 0,03%).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)